HALLIDAY • RESNICK

Volume 1

Mecânica

Fundamentos de Física



LTC

Jearl Walker

Fórmulas Matemáticas*

Equação do Segundo Grau

Se $ax^2 + bx + c = 0$, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Teorema Binomial

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots \qquad (x^2 < 1)$$

Produtos de Vetores

Seja θ o menor dos dois ângulos entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Nesse caso,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab\cos\theta$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} & \hat{\mathrm{j}} & \hat{\mathrm{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\mathrm{i}} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{\mathrm{j}} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{\mathrm{k}} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= (a_y b_z - b_y a_z)\hat{\mathrm{i}} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{\mathrm{j}} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{\mathrm{k}}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \operatorname{sen} \theta$$

Identidades Trigonométricas

$$\operatorname{sen} \alpha \pm \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Derivadas e Integrais

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x \qquad \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x \qquad \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \qquad \int e^x\, dx = e^x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$\int \frac{x\, dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 (x^2 + a^2)^{1/2}}$$

Regra de Cramer

Um sistema de duas equações com duas incógnitas x e y,

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \quad \text{e} \quad a_2 x + b_2 y = c_2,$$

tem como soluções

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

*Uma lista mais completa está no Apêndice E.

Prefixos do SI

Fator	Prefixo	Símbolo	Fator	Prefixo	Símbolo
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	mili	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^{9}	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^{6}	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^{3}	quilo	k	10^{-18}	atto	a
10^{2}	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^{1}	deca	da	10^{-24}	yocto	y

Fundamentos de Física

8E

VOLUME 1

MECÂNICA



Duzentos anos de tradição produzindo, publicando e comercializando livros. Este é o valor da marca Wiley que, desde sua fundação, em 1807, acompanha as mudanças políticas, sociais e econômicas ocorridas em todo o mundo.

Renomada pela divulgação das mais recentes teorias e técnicas acadêmicas nas áreas científica, tecnológica e de engenharia, a editora norte-americana promove, assim, o intercâmbio e o debate globais.

A tradicional parceria da LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional, com a John Wiley & Sons, Inc., responde, em parte, por esse sucesso no Brasil, uma vez que traz para o mercado conceitos técnico-científicos de ponta essenciais para a formação das futuras gerações de profissionais e pesquisadores.

HALLIDAY/RESNICK

Fundamentos de Física

8E

VOLUME 1

Jearl Walker

Cleveland State University



Tradução e Revisão Técnica

Ronaldo Sérgio de Biasi, Ph.D.
Professor Titular do Instituto Militar de Engenharia — IME





gen | LTC

Os autores e a editora empenharam-se para citar adequadamente e dar o devido crédito a todos os detentores dos direitos autorais de qualquer material utilizado neste livro, dispondo-se a possíveis acertos caso, inadvertidamente, a identificação de algum deles tenha sido omitida.

Não é responsabilidade da editora nem dos autores eventuais danos ou perdas a pessoas ou bens que tenham origem no uso desta publicação.

Travessa do Ouvidor, 11
Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040
Tel.: 21-3970-9480
Fax: 21-2221-3202
ltc@grupogen.com.br
www.ltceditora.com.br

Cover Designer: Norm Christiansen
Cover Image: ©Eric Heller/Photo Researchers
Usada com permissão de John Wiley & Sons, Inc.

Editoração Eletrônica: REDBSTYLE

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ.

H691f
8.ed.

Halliday, David, 1916-
Fundamentos de física, volume 1 : mecânica / David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker ; tradução e revisão técnica Ronaldo Sérgio de Biasi. - 8.ed. - Rio de Janeiro : LTC, 2008.

Tradução de: Fundamentals of physics, 8th ed.
Inclui índice
ISBN 978-85-216-1605-4

1. Mecânica. 2. Física. I. Resnick, Robert, 1923-. II. Walker, Jearl, 1945-. III. Título.

08-3551. CDD: 531
CDU: 531

Sumário Geral

Sumário

VOLUME 1

Prefácio

Diversão com um grande desafio. É assim que venho encarando a física desde o dia em que Sharon, uma das alunas do curso que eu estava ministrando como aluno de doutorado, me perguntou de repente:

— O que isso tem a ver com a minha vida?

Respondi prontamente:

— Sharon, isso é física! Tem tudo a ver com a sua vida!

A moça me pediu um exemplo. Dei tratos à bola, mas não consegui encontrar nenhum. Naquela noite criei *O Circo Voador da Física* para Sharon, mas também para mim, porque percebi que o problema de Sharon também era meu. Tinha passado seis anos estudando em dezenas de livros de física escritos com a melhor das intenções, mas alguma coisa estava faltando. A física é o assunto mais interessante do mundo porque descreve o modo como o mundo funciona, mas não havia nos livros qualquer ligação com o mundo real. A diversão estava faltando.

Procurei incluir muita física do mundo real neste livro, ligando-o à nova edição de *O Circo Voador da Física*. Boa parte dos assuntos vem das minhas aulas, onde posso julgar, pelas expressões e comentários dos alunos, quais são os assuntos e apresentações que funcionam. As notas que tomei a respeito de meus sucessos e fracassos ajudaram a estabelecer as bases para este livro. Minha mensagem aqui é a mesma que dei para todos os estudantes que encontrei desde o dia em que Sharon fez aquele comentário:

— Sim, você *pode* usar os conceitos básicos da física para chegar a conclusões válidas a respeito do mundo real, e é nesse entendimento do mundo real que está a diversão.

Tive muitos objetivos ao escrever este livro, mas o principal foi proporcionar aos professores um instrumento através do qual possam ensinar os alunos a estudar assuntos científicos, identificar conceitos fundamentais, pensar a respeito de questões científicas e resolver problemas quantitativos. Esse processo não é fácil, nem para os alunos nem para os professores. Na verdade, o curso associado a este livro pode ser um dos mais difíceis do currículo. Entretanto, pode ser também um dos mais interessantes, pois revela os mecanismos fundamentais do mundo, responsáveis por todas as aplicações científicas e de engenharia.

Muitos usuários da sétima edição (professores e alunos) enviaram comentários e sugestões para aperfeiçoar o livro. Esses melhoramentos foram incorporados à exposição e aos problemas desta edição. Nós (o autor Jearl Walker e a editora John Wiley & Sons) vemos este livro como um projeto permanente, e gostaríamos de contar com uma maior participação dos leitores. Sinta-se à vontade para enviar sugestões, correções e comentários positivos ou negativos para a LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional, no endereço eletrônico www.ltceditora.com.br. Talvez não seja possível responder a todas as sugestões, mas lemos e consideramos cada uma delas.

Principais Mudanças de Conteúdo

• Tópicos do *Circo Voador* foram introduzidos de várias formas: em textos de abertura dos capítulos, em exemplos e em problemas. Isso foi feito com dois objetivos: (1) tornar o assunto mais interessante e divertido; (2) mostrar ao aluno que o mundo que nos cerca pode ser examinado e compreendido usando os princípios fundamentais da física.

Movimento em Duas e Três Dimensões 4



O que um jogador faz para saber onde deve estar para apanhar uma bola de beisebol?

•28 Os ventos violentos de um tornado podem fazer com que pequenos objetos fiquem encravados em árvores, paredes de edifícios e até mesmo placas de sinalização de metal. Em uma simulação de laboratório um palito comum de madeira foi disparado por um canhão pneumático em um galho de carvalho. A massa do palito era 0,13 g, sua velocidade antes de penetrar no galho era 220 m/s e a profundidade de penetração foi 15 mm. Se o palito sofreu uma desaceleração constante, qual foi o módulo da força exercida pelo galho sobre o palito?

•••62 Uma bailarina começa um *tour jeté* (Fig. 11-20*a*) com uma velocidade angular ω_i e um momento angular formado por duas partes: $I_{perna} = 1{,}44$ kg · m² da perna estendida, que faz um ângulo $\theta = 90{,}0°$ com o corpo, e $I_{tronco} = 0{,}660$ kg · m² do resto do corpo (principalmente o tronco). Quando está quase atingindo a altura máxima suas duas pernas fazem um ângulo $\theta = 30°$ com o corpo e sua velocidade angular é ω_f (Fig. 11-20*b*). Supondo que I_{tronco} permanece o mesmo, qual é o valor da razão ω_f/ω_i?

3. ***Salto em distância*** Quando um atleta deixa o solo em uma prova de salto em distância a força exercida pelo solo sobre o pé de impulsão imprime ao atleta uma rotação para a frente em torno de um eixo horizontal. Esta rotação, se não for controlada, não permite que o atleta chegue ao solo com a postura correta: na descida, as pernas devem estar juntas e estendidas para a frente, para que os calcanhares toquem na areia o mais longe possível do ponto de partida. Depois que o atleta deixa o solo seu momento angular não pode mudar (é conservado), já que não está sujeito a nenhum torque externo. Entretanto, ele pode transferir a maior parte do momento angular para os braços, fazendo-os girar em um plano vertical (Fig. 11-19). Com isso, o corpo permanece na orientação correta para parte final do salto.

Exemplo 4-8

Suponha que um jogador de beisebol B rebata uma bola na direção de um jogador F com uma velocidade inicial $v_0 = 40$ m/s e um ângulo inicial $\theta_0 = 35°$. Durante o trajeto da bola uma reta ligando o jogador F à posição da bola faz um ângulo ϕ com o solo. Faça um gráfico do ângulo de visada ϕ em função do tempo t, supondo (a) que o jogador F está na posição correta para apanhar a bola; (b) que o jogador está a 6,0 m de distância da posição correta, mais perto do jogador B; (c) está a 6,0 m de distância da posição correta, mais longe do batedor B.

IDÉIAS-CHAVE (1) Desprezando a resistência do ar, a bola é um projétil para o qual o movimento vertical e o movimento horizontal podem ser analisados separadamente. (2) Supondo que a bola é apanhada aproximadamente na mesma altura em que é rebatida, a distância horizontal percorrida pela bola é o alcance R, dado pela Eq. 4-26, $R = (v_0^2/g)$ sen $2\theta_0$.

• Os assuntos que também são discutidos em *O Circo Voador da Física* estão indicados pelo desenho de um biplano. A bibliografia do *Circo Voador* (mais de 10.000 referências a revistas científicas e de engenharia)  pode ser encontrada no site http://www.flyingcircusofphysics.com.

• A lei da gravitação de Newton, a lei de Coulomb e a lei de Biot-Savart são agora apresentadas na notação de vetores unitários.

• A maior parte dos textos de abertura dos capítulos (exemplos de física aplicada que têm por objetivo despertar o interesse do leitor pelo assunto que será discutido no capítulo) é nova e foi extraída de artigos científicos em vários campos de pesquisa.

• Milhares de problemas no final dos capítulos foram reformulados para tornar mais claros tanto os enunciados como as respostas.

Características dos Capítulos

Textos de abertura. Uma situação curiosa é descrita no início de cada capítulo e explicada em algum ponto do texto para motivar o estudante a ler o capítulo. Esses textos, que constituem uma das características tradicionais de Fundamentos de Física, são baseados em pesquisas recentes publicadas em revistas de ciência, engenharia, medicina e direito.

O que É Física? O corpo de cada capítulo agora começa com essa pergunta e com uma resposta que diz respeito ao assunto do capítulo. (Um bombeiro hidráulico uma vez me perguntou: "Em que você trabalha?" Respondi: "Sou professor de física." O bombeiro pensou por alguns instantes e depois me perguntou: "O que é física?" A profissão do bombeiro dependia inteiramente da física, ainda que ele não soubesse o que é física. Muitos estudantes de física introdutória não sabem o que é física, mas supõem que ela é irrelevante para a carreira que escolheram.)

Os **Testes** são pontos intermediários em que se pergunta ao estudante: "Você é capaz de responder a essa pergunta usando um raciocínio baseado no texto ou no exemplo que acaba de ler?" Se a resposta é negativa, o estudante deve voltar e rever o que já leu antes de prosseguir no capítulo. Veja, por exemplo, o Teste 1 da Seção 4-3, do Capítulo 4, e o Teste 2 da Seção 11-4, do Capítulo 11. *As respostas de todos os testes estão no final do livro.*

Os **Exemplos** foram escolhidos para mostrar que os problemas de física devem ser resolvidos usando o raciocínio e não simplesmente introduzindo números em uma equação, sem nenhuma preocupação com o seu significado. Os exemplos com a indicação "Aumente sua capacidade" são, em geral, mais longos e apresentam mais comentários.

As **Idéias-chave** dos exemplos mostram ao estudante quais são os conceitos básicos necessários para resolver um problema. O que queremos dizer com essas idéias-chave é o seguinte: "Vamos começar a solução usando este conceito básico, um método que nos prepara para resolver muitos outros problemas. Não começamos sacando do bolso uma equação para uma simples substituição de números, um método que não nos prepara para nada."

As **Táticas para a solução de problemas** são instruções para ajudar os alunos principiantes a resolver problemas e evitar os erros mais comuns.

A **Revisão e Resumo** é um breve sumário do capítulo que contém os conceitos essenciais, mas não substitui a leitura do capítulo.

As **Perguntas** se parecem com os testes e requerem raciocínio e entendimento, em vez de cálculos. *As respostas das perguntas ímpares estão no final do livro.*

Os **Problemas** estão agrupados por seções e possuem uma indicação do grau de dificuldade. *As respostas dos problemas ímpares estão no final do livro.*

Símbolos. O quadro a seguir, que é repetido no início de cada lista de problemas, mostra os símbolos usados neste livro.

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

 Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

Problemas adicionais. Esses problemas não estão classificados, de modo que cabe ao estudante determinar a que parte do capítulo se refere cada problema.

Características Adicionais

Raciocínio *versus* aplicação de fórmulas. Um dos principais objetivos deste livro é ensinar os estudantes a usar o raciocínio para resolver problemas, desde os princípios básicos até a solução final. Embora tenham sido incluídos (de propósito) alguns problemas que envolvem a simples aplicação de fórmulas, a maioria dos problemas exige algum tipo de raciocínio.

Capítulos de tamanho razoável. Para não acabar escrevendo um livro suficientemente grosso para deter uma bala (e a maioria dos estudantes), procurei manter os capítulos com um tamanho razoável. Explico o suficiente para colocar o estudante no caminho certo, mas não tanto que o estudante não precise analisar e combinar idéias. Afinal de contas, o estudante ainda vai ter necessidade de analisar e combinar idéias muito depois de ler este livro e completar o curso.

Uso de calculadoras gráficas. Quando os cálculos vetoriais de um exemplo podem ser feitos diretamente da tela de uma calculadora gráfica esse fato é indicado na solução do exemplo, mas é apresentada a solução tradicional através de componentes. Quando os cálculos vetoriais não podem ser feitos diretamente na tela o motivo é explicado.

Gráficos como enigmas. Estes são problemas nos quais se fornece um gráfico e pede-se um resultado que exige muito mais do que simplesmente ler um dado em um gráfico. Na verdade, a solução exige uma compreensão do significado físico do problema e dos princípios que estão por trás das equações associadas. Esses problemas se parecem com enig-

mas de Sherlock Holmes, já que cabe ao estudante determinar quais são os dados importantes. Veja, por exemplo, o problema 50 do Capítulo 4, o problema 12 do Capítulo 5 e o problema 22 do Capítulo 9.

Problemas de física aplicada, baseados em pesquisas publicadas, aparecem em muitos lugares, como os textos de abertura dos capítulos, os exemplos e os problemas. Veja, por exemplo, o texto de abertura do Capítulo 4, o Exemplo 4-8, da Seção 4-6, e o problema 62 do Capítulo 11. Também existem séries de problemas encadeados, como os problemas 2, 39 e 61 do Capítulo 6.

Problemas com situações inusitadas. Aqui está um desses problemas, escolhido entre as centenas que existem no livro: o problema 69 do Capítulo 5 se baseia na história verdadeira de como o vôo 143 da Air Canada ficou sem combustível a 7,9 km de altitude porque a tripulação e o pessoal de terra não usaram as unidades corretas para a quantidade de combustível nos tanques (uma lição importante para os estudantes que costumam "misturar" unidades).

Para o Professor

Os professores que adotarem o livro podem solicitar à LTC materiais suplementares de apoio pedagógico, em inglês. O pedido deve ser encaminhado a:

LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
Uma editora integrante do
GEN | Grupo Editorial Nacional
A/C Editorial Técnico
Travessa do Ouvidor, 11
Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040
Tel.: 21-3970-9480
Fax: 21-2221-3202
ltc@grupogen.com.br.
www.ltceditora.com.br

Agradecimentos

Muitas pessoas contribuíram para este livro. J. Richard Christman, da U.S. Coast Guard Academy, mais uma vez criou muitos suplementos valiosos; suas recomendações para este livro foram inestimáveis. Sen-Ben Liao, do Lawrence Livermore National Laboratory, James Whitenton, da Southern Polytechnic State University, e Jerry Shi, do Pasadena City College, foram responsáveis pela tarefa hercúlea de resolver todos os problemas do livro. Na John Wiley o livro foi apoiado por Stuart Johnson, o editor que supervisionou todo o projeto, Tom Kulesa, que coordenou o estado-da-arte do pacote de mídia, e Geraldine Osnato, que gerenciou uma superequipe para produzir um impressionante pacote de suplementos. Agradecemos a Elizabeth Swain, editora de produção, por ter juntado todas as partes durante o complexo processo de produção. Agradecemos também a Maddy Lesure, pelo seu projeto gráfico tanto do texto quanto da produção da capa; Lee Goldstein, que foi responsável pela diagramação; Helen Walden, pela edição dos originais; Anna Melhorn, que cuidou das ilustrações; e Lilian Brady, que se encarregou da revisão. Hilary Newman foi brilhante na busca de fotografias inusitadas e interessantes. Tanto a editora John Wiley & Sons, Inc. como Jearl Walker gostariam de agradecer às seguintes pessoas por comentários e idéias a respeito da 7.ª edição: Richard Woodard, University of Florida; David Wick, Clarkson University; Patrick Rapp, University of Puerto Rico em Mayagüez; Nora Thornber, Raritan Valley Community College; Laurence I. Gould, University of Hartford; Greg Childers, California State University em Fullerton; Asha Khakpour, California State University em Fullerton; Joe F. McCullough, Cabrillo College. Finalmente, nossos revisores externos realizaram um trabalho excepcional, e expressamos a cada um deles nossos agradecimentos.

Maris A. Abolins
Michigan State University

Edward Adelson
Ohio State University

Nural Akchurin
Texas Tech

Barbara Andereck
Ohio Wesleyan University

Mark Arnett
Kirkwood Community College

Arun Bansil
Northeastern University

Richard Barber
Santa Clara University

Neil Basecu
Westchester Community College

Anand Batra
Howard University

Richard Bone
Florida International University

Michael E. Browne
University of Idaho

Timothy J. Burns
Leeward Community College

Joseph Buschi
Manhattan College

Philip A. Casabella
Rensselaer Polytechnic Institute

Randall Caton
Christopher Newport College

Roger Clapp
University of South Florida

W. R. Conkie
Queen's University

Renate Crawford
University of Massachusetts-Dartmouth

Mike Crivello
San Diego State University

Robert N. Davie, Jr.
St. Petersburg Junior College

Cheryl K. Dellai
Glendale Community College

Eric R. Dietz
California State University em Chico

N. John DiNardo
Drexel University

Eugene Dunnam
University of Florida

Robert Endorf
University of Cincinnati

F. Paul Esposito
University of Cincinnati

Jerry Finkelstein
San Jose State University

Robert H. Good
California State University-Hayward

John B. Gruber
San Jose State University

Ann Hanks
American River College

Randy Harris
University of California-Davis

Samuel Harris
Purdue University

Harold B. Hart
Western Illinois University

Rebecca Hartzler
Seattle Central Community College

John Hubisz
North Carolina State University

Joey Huston
Michigan State University

David Ingram
Ohio University

Shawn Jackson
University of Tulsa

Hector Jimenez
University of Puerto Rico

Sudhakar B. Joshi
York University

Leonard M. Kahn
University of Rhode Island

Leonard Kleinman
University of Texas em Austin

Craig Kletzing
University of Iowa

Arthur Z. Kovacs
Rochester Institute of Technology

Kenneth Krane
Oregon State University

Priscilla Laws
Dickinson College

Edbertho Leal
Polytechnic University of Puerto Rico

Vern Lindberg
Rochester Institute of Technology

Peter Loly
University of Manitoba

Andreas Mandelis
University of Toronto

Robert R. Marchini
Memphis State University

Paul Marquard
Caspar College

David Marx
Illinois State University

James H. McGuire
Tulane University

David M. McKinstry
Eastern Washington University

Eugene Mosca
United States Naval Academy

James Napolitano
Rensselaer Polytechnic Institute

Michael O'Shea
Kansas State University

Patrick Papin
San Diego State University

Kiumars Parvin
San Jose State University

Robert Pelcovits
Brown University

Oren P. Quist
South Dakota State University

Joe Redish
University of Maryland

Timothy M. Ritter
University of North Carolina em Pembroke

Gerardo A. Rodriguez
Skidmore College

John Rosendahl
University of California em Irvine

Todd Ruskell
Colorado School of Mines

Michael Schatz
Georgia Institute of Technology

Darrell Seeley
Milwaukee School of Engineering

Bruce Arne Sherwood
North Carolina State University

Ross L. Spencer
Brigham Young University

Paul Stanley
Beloit College

Harold Stokes
Brigham Young University

Michael G. Strauss
University of Oklahoma

Jay D. Strieb
Villanova University

Dan Styer
Oberlin College

Michael Tammaro
University of Rhode Island

Marshall Thomsen
Eastern Michigan University

David Toot
Alfred University

Tung Tsang
Howard University

J. S. Turner
University of Texas em Austin

T. S. Venkataraman
Drexel University

Gianfranco Vidali
Syracuse University

Fred Wang
Prairie View A & M

Robert C. Webb
Texas A & M University

William M. Whelan
Ryerson Polytechnic University

George Williams
University of Utah

David Wolfe
University of New Mexico

Comentários e Sugestões

Apesar dos melhores esforços dos autores, do tradutor, do editor e dos revisores, é inevitável que surjam erros no texto. Assim, são bem-vindas as comunicações de usuários sobre correções ou sugestões referentes ao conteúdo ou ao nível pedagógico que auxiliem o aprimoramento de edições futuras. Encorajamos os comentários dos leitores que podem ser encaminhados à LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional, no endereço: Travessa do Ouvidor, 11 — Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040 ou ao endereço eletrônico ltc@grupogen.com.br.

Fundamentos de Física

8E

VOLUME 1

MECÂNICA

Medição



Quando um terremoto atinge uma região habitada, pode fazer edifícios e outras construções racharem ou tombarem. Em algumas regiões, porém, um terremoto pode fazer as construções afundarem no solo até ficarem parcialmente enterradas, como se estivessem apoiadas em um fluido viscoso e não em terra firme.

Como pode um edifício afundar no chão?

A resposta está neste capítulo.

©AP/Wide World Photos

1-1 O QUE É FÍSICA?

A ciência e a engenharia se baseiam em medições e comparações. Assim, precisamos de regras para estabelecer de que forma as grandezas devem ser medidas e comparadas, e de experimentos para estabelecer as unidades para essas medições e comparações. Um dos propósitos da física (e também da engenharia) é projetar e executar esses experimentos.

Assim, por exemplo, os físicos se empenham em desenvolver relógios extremamente precisos para que intervalos de tempo possam ser medidos e comparados com exatidão. O leitor pode estar se perguntando se essa exatidão é realmente necessária. Eis um exemplo de sua importância: se não houvesse relógios extremamente precisos, o Sistema de Posicionamento Global (GPS — Global Positioning System), usado atualmente no mundo inteiro em uma infinidade de aplicações, não seria possível.

1-2 | Medindo Grandezas

Descobrimos a física aprendendo a medir e comparar grandezas como comprimento, tempo, massa, temperatura, pressão e corrente elétrica.

Medimos cada grandeza física em unidades apropriadas, por comparação com um **padrão**. A **unidade** é um nome particular que atribuímos às medidas dessa grandeza. Assim, por exemplo, o metro (m) é uma unidade da grandeza comprimento. O padrão corresponde a exatamente 1,0 unidade da grandeza. Como vamos ver, o padrão de comprimento, que corresponde a exatamente 1,0 m, é a distância percorrida pela luz, no vácuo, durante uma certa fração de segundo. Em princípio, podemos definir uma unidade e seu padrão da forma que quisermos, mas é importante que cientistas em diferentes partes do mundo concordem que nossas definições são ao mesmo tempo razoáveis e práticas.

Depois de escolher um padrão (de comprimento, digamos), precisamos estabelecer procedimentos através dos quais qualquer comprimento, seja ele o raio do átomo de hidrogênio, a largura de um skate ou a distância de uma estrela, possa ser expresso em termos do padrão. Usar uma régua de comprimento aproximadamente igual ao padrão pode ser uma forma de executar medidas de comprimento. Entretanto, muitas das comparações são necessariamente indiretas. É impossível usar uma régua, por exemplo, para medir o raio de um átomo ou a distância de uma estrela.

Existem tantas grandezas físicas que não é fácil organizá-las. Felizmente, elas não são todas independentes; assim, por exemplo, a velocidade é a razão entre as grandezas comprimento e tempo. Assim, o que fazemos é escolher, através de um acordo internacional, um pequeno número de grandezas físicas, como comprimento e tempo, e atribuir padrões apenas a elas. Em seguida, definimos as demais grandezas físicas em termos dessas *grandezas fundamentais* e de seus padrões (conhecidos como *padrões fundamentais*). A velocidade, por exemplo, é definida em termos das grandezas fundamentais comprimento e tempo e seus padrões fundamentais.

Os padrões fundamentais devem ser ao mesmo tempo acessíveis e invariáveis. Se definimos o padrão de comprimento como a distância entre o nariz de uma pessoa qualquer e a ponta do dedo indicador com o braço estendido, certamente temos um padrão acessível, mas que varia, obviamente, de pessoa para pessoa. A necessidade de precisão na ciência e na engenharia nos força, em primeiro lugar, a buscar a invariabilidade. Só então nos preocupamos em produzir réplicas dos padrões fundamentais que sejam acessíveis a todos que precisem utilizá-los.

TABELA 1-1

Unidades de Três Grandezas Fundamentais do SI

Grandeza	Nome da Unidade	Símbolo da Unidade
Comprimento	metro	m
Tempo	segundo	s
Massa	quilograma	kg

1-3 | O Sistema Internacional de Unidades

Em 1971, na 14ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, foram selecionadas sete grandezas como fundamentais, as quais constituem a base do Sistema Internacional

de Unidades, cuja abreviação é SI, popularmente conhecido como *sistema métrico*. A Tabela 1-1 mostra as unidades das três grandezas fundamentais (comprimento, massa e tempo) que serão usadas nos primeiros capítulos deste livro. Essas unidades foram definidas de modo a serem da mesma ordem de grandeza que a "escala humana".

Muitas *unidades derivadas* do SI são definidas em termos dessas unidades fundamentais. Assim, por exemplo, a unidade de potência no SI, chamada **watt** (W), é definida em termos das unidades fundamentais de massa, comprimento e tempo. Como veremos no Capítulo 7,

$$1 \text{ watt} = 1 \text{ W} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3, \tag{1-1}$$

onde o último conjunto de símbolos de unidades é lido como quilograma metro quadrado por segundo ao cubo.

Para expressar as grandezas muito grandes ou muito pequenas freqüentemente encontradas na física usamos a *notação científica*, que emprega potências de 10. Nesta notação,

$$3\,560\,000\,000 \text{ m} = 3{,}56 \times 10^9 \text{ m} \tag{1-2}$$

e

$$0{,}000\,000\,492 \text{ s} = 4{,}92 \times 10^{-7} \text{ s}. \tag{1-3}$$

Nos computadores a notação científica às vezes assume uma forma mais abreviada, como 3.56 E9 e 4.92 E–7, onde E é usado para designar o "expoente de dez". Em algumas calculadoras a notação é ainda mais abreviada, com o E substituído por um espaço em branco.

Também por conveniência, quando lidamos com grandezas muito grandes ou muito pequenas usamos os prefixos da Tabela 1-2. Como se pode ver, cada prefixo representa uma certa potência de 10, sendo usado como um fator multiplicativo. Incorporar um prefixo a uma unidade do SI tem o efeito de multiplicar a unidade pelo fator correspondente. Assim, podemos expressar uma certa potência elétrica como

$$1{,}27 \times 10^9 \text{ watts} = 1{,}27 \text{ gigawatt} = 1{,}27 \text{ GW} \tag{1-4}$$

ou um certo intervalo de tempo como

$$2{,}35 \times 10^{-9} \text{ s} = 2{,}35 \text{ nanossegundos} = 2{,}35 \text{ ns}. \tag{1-5}$$

Alguns prefixos, como os usados em mililitro, centímetro, quilograma e megabyte, são provavelmente familiares para o leitor.

TABELA 1-2

Prefixos das Unidades do SI

Fator	Prefixo[a]	Símbolo
10^{24}	iota-	Y
10^{21}	zeta-	Z
10^{18}	exa-	E
10^{15}	peta-	P
10^{12}	tera-	T
10^{9}	**giga-**	**G**
10^{6}	**mega-**	**M**
10^{3}	**quilo-**	**k**
10^{2}	hecto-	h
10^{1}	deca-	da
10^{-1}	deci-	d
10^{-2}	**centi-**	**c**
10^{-3}	**mili-**	**m**
10^{-6}	**micro-**	**μ**
10^{-9}	**nano-**	**n**
10^{-12}	**pico-**	**p**
10^{-15}	femto-	f
10^{-18}	ato-	a
10^{-21}	zepto-	z
10^{-24}	iocto-	y

[a]Os prefixos mais usados aparecem em negrito.

1-4 | Mudança de Unidades

Muitas vezes precisamos mudar as unidades nas quais uma grandeza física está expressa. Isto pode ser feito usando um método conhecido como *conversão em cadeia*. Nesse método multiplicamos o valor original por um **fator de conversão** (uma razão entre unidades que é igual à unidade). Assim, por exemplo, como 1 min e 60 s correspondem a intervalos de tempo iguais, temos:

$$\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 1.$$

Assim, as razões (1 min)/(60 s) e (60 s)/(1 min) podem ser usadas como fatores de conversão. Note que isso *não* é o mesmo que escrever $\frac{1}{60} = 1$ ou $60 = 1$; cada *número* e sua *unidade* devem ser tratados conjuntamente.

Como a multiplicação de qualquer grandeza por um fator unitário deixa essa grandeza inalterada, podemos usar fatores de conversão sempre que isso for conveniente. No método de conversão em cadeia usamos os fatores de conversão para cancelar unidades indesejáveis. Para converter 2 min em segundos, por exemplo, temos:

$$2 \text{ min} = (2 \text{ min})(1) = (2 \cancel{\text{min}})\left(\frac{60 \text{ s}}{1 \cancel{\text{min}}}\right) = 120 \text{ s}. \tag{1-6}$$

Se você introduzir um fator de conversão e as unidades indesejáveis não desaparecerem, inverta o fator e tente novamente. Nas conversões as unidades obedecem às mesmas regras algébricas que se aplicam a variáveis e números.

O Apêndice D fornece fatores de conversão entre unidades de SI e outras unidades, como as que ainda são usadas até hoje nos Estados Unidos. Os fatores de conversão são fornecidos na forma "1 min = 60 s", e não na forma de uma razão. Seguem alguns exemplos de conversão de unidades.

Exemplo 1-1

Quando, segundo a lenda, Feidípides correu de Maratona até Atenas, em 490 a.C., para levar a notícia da vitória dos gregos sobre os persas, ele provavelmente correu a uma velocidade de cerca de 23 rides por hora (rides/h). O ride é uma antiga unidade grega para comprimento, como o stadium e o plethron: 1 ride valia 4 stadia, 1 stadium valia 6 plethra e, em termos de uma unidade moderna, 1 plethron equivale a 30,8 m. Qual foi a velocidade de Feidípides em quilômetros por segundo (km/s)?

IDÉIA-CHAVE No método de conversão em cadeia escrevemos os fatores de conversão como razões que eliminem as unidades indesejáveis.

Cálculo: Nesse caso, temos

$$23 \text{ rides/h} = \left(23\,\frac{\cancel{\text{rides}}}{\cancel{\text{h}}}\right)\left(\frac{4\,\cancel{\text{stadia}}}{1\,\cancel{\text{ride}}}\right)\left(\frac{6\,\cancel{\text{plethra}}}{1\,\cancel{\text{stadium}}}\right)$$

$$\times\left(\frac{30{,}8\,\cancel{\text{m}}}{1\,\cancel{\text{plethron}}}\right)\left(\frac{1\text{ km}}{1000\,\cancel{\text{m}}}\right)\left(\frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3600\text{ s}}\right)$$

$$= 4{,}7227\times10^{-3}\text{ km/s} \approx 4{,}7\times10^{-3}\text{ km/s}.$$

(Resposta)

Exemplo 1-2

O arenque é um tipo de peixe abundante no Atlântico Norte. O *cran* é uma unidade de volume britânica para arenques frescos: 1 cran = 170,474 litros (L) de arenque, cerca de 750 arenques. Suponha que, para liberação pela alfândega da Arábia Saudita, um carregamento de 1255 crans deva ser declarado em termos de covidos cúbicos, onde o covido é uma unidade de comprimento árabe: 1 covido = 48,26 cm. Qual é o volume a ser declarado?

IDÉIA-CHAVE De acordo com o Apêndice D, 1 L equivale a 1000 cm^3. Para converter centímetros *cúbicos* em covidos *cúbicos* devemos elevar ao *cubo* a razão de conversão entre centímetros e covidos.

Cálculo: Escrevemos a seguinte cadeia de conversões:

$$1255 \text{ crans}$$

$$= (1255\text{ crans})\left(\frac{170{,}474\text{ L}}{1\text{ cran}}\right)\left(\frac{1000\text{ cm}^3}{1\text{ L}}\right)\left(\frac{1\text{ covido}}{48{,}26\text{ cm}}\right)^3$$

$$= 1{,}903\times10^3\text{ covidos}^3.$$

(Resposta)

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 1: *Algarismos Significativos e Casas Decimais* Se você calculou a resposta do Exemplo 1-1 sem que sua calculadora tenha arredondado automaticamente o resultado, o número 4.722 666 666 67 $\times 10^{-3}$ deve ter aparecido no visor. A precisão sugerida por este número é ilusória. Arredondamos a resposta para 4,7 $\times 10^{-3}$ km/s para não dar a impressão de que ela é mais precisa que os dados fornecidos. A velocidade conhecida de 23 rides/h contém dois algarismos, que são chamados de **algarismos significativos**. Assim, arredondamos a resposta para dois algarismos significativos. Neste livro, os resultados finais dos cálculos são freqüentemente arredondados para se obter o mesmo número de algarismos significativos que o dado com o menor número de algarismos significativos. (Entretanto, algumas vezes um algarismo significativo a mais é mantido.) Quando o primeiro dígito à direita a ser descartado é maior ou igual a 5, o último dígito mantido é acrescido de uma unidade; caso contrário, ele permanece inalterado. Assim, por exemplo, 11,3516 arredondado para três algarismos significativos é igual a 11,4, enquanto 11,3279 é igual a 11,3. (As respostas dos exemplos neste livro são usualmente apresentadas com o símbolo = em vez de ≈, mesmo que haja um arredondamento.)

Quando um número como 3,15 ou 3,15 $\times 10^3$ é fornecido em um problema, o número de algarismos significativos é evidente, mas o que dizer do número 3000? Ele tem apenas um algarismo significativo (3 $\times 10^3$), ou quatro algarismos significativos (3,000 $\times 10^3$)? Neste livro, supomos que todos os zeros em números como 3000 são significativos, mas outros textos podem usar outra interpretação.

Não confunda *algarismos significativos* com *casas decimais*. Considere os comprimentos 35,6 mm, 3,56 m e 0,00356 m. Todos têm três algarismos significativos mas possuem uma, duas e cinco casas decimais, respectivamente.

1-5 | Comprimento

Em 1792, a recém-criada República da França estabeleceu um novo sistema de pesos e medidas. Sua base era o metro, definido como um décimo de milionésimo da distância entre o pólo norte e o equador. Mais tarde, por razões práticas, esse padrão foi abandonado e o metro veio a ser definido como a distância entre duas linhas finas gravadas perto das extremidades de uma barra de platina-irídio, a **barra do metro-padrão**, mantida no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, nas vizinhanças de Paris. Réplicas precisas dessa barra foram enviadas a laboratórios de padronização em várias partes do mundo. Esses **padrões secundários** foram usados para produzir outros padrões, ainda mais acessíveis, de tal forma que, no final, todos os instrumentos de medição de comprimento estavam relacionados à barra do metro-padrão através de uma complicada cadeia de comparações.

Com o passar do tempo, um padrão mais preciso que a distância entre duas finas ranhuras em uma barra de metal se tornou necessário. Em 1960, foi adotado um novo padrão para o metro, baseado no comprimento de onda da luz. Especificamente, o metro foi redefinido como sendo 1 650 763,73 comprimentos de onda de uma certa luz vermelho-alaranjada emitida por átomos de criptônio-86 (um isótopo do criptônio) em um tubo de descarga de gás. Esse número de comprimentos de onda aparentemente estranho foi escolhido para que o novo padrão não fosse muito diferente do definido pela antiga barra do metro-padrão.

Em 1983, entretanto, a necessidade de maior precisão havia alcançado tal ponto que mesmo o padrão do criptônio-86 já não era suficiente, e naquele ano foi dado um passo audacioso. O metro foi redefinido como a distância percorrida pela luz em um intervalo de tempo especificado. Nas palavras da 17ª Conferência Geral de Pesos e Medidas:

> O metro é a distância percorrida pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de 1/299 792 458 de segundo.

Este intervalo de tempo foi escolhido para que a velocidade da luz c seja exatamente

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}.$$

Como as medidas da velocidade da luz haviam se tornado extremamente precisas, fazia sentido adotar a velocidade da luz como uma grandeza definida e usá-la para redefinir o metro.

A Tabela 1-3 mostra uma ampla gama de comprimentos, que vai desde o tamanho do universo conhecido (linha de cima) até o tamanho de alguns objetos muito pequenos.

TABELA 1-3

Alguns Comprimentos Aproximados

Descrição	Comprimento em Metros
Distância das galáxias mais antigas	2×10^{26}
Distância da galáxia de Andrômeda	2×10^{22}
Distância da estrela mais próxima	4×10^{16}
Distância de Plutão	6×10^{12}
Raio da Terra	6×10^{6}
Altura do monte Everest	9×10^{3}
Espessura desta página	1×10^{-4}
Comprimento de um vírus típico	1×10^{-8}
Raio do átomo de hidrogênio	5×10^{-11}
Raio do próton	1×10^{-15}

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 2:* *Ordem de Grandeza A *ordem de grandeza* de um número é a potência de dez que aparece quando o número é expresso em notação científica. Assim, por exemplo, se $A = 2{,}3 \times 10^4$ e $B = 7{,}8 \times 10^4$, a ordem de grandeza de A e de B é 4.

Freqüentemente, engenheiros e cientistas estimam o resultado de um cálculo pela ordem de grandeza *mais próxima*. Em nosso exemplo, a ordem de grandeza mais próxima é 4 para A e 5 para B. É comum fazer esse tipo de estimativa quando os dados necessários para executar um certo cálculo não são conhecidos com precisão, como ilustra o Exemplo 1-3.

Exemplo 1-3 Aumente sua capacidade

O maior novelo do mundo tem cerca de 2 m de raio. Qual é a ordem de grandeza do comprimento L do fio que forma o novelo?

IDÉIA-CHAVE Poderíamos, evidentemente, desenrolar o novelo e medir o comprimento L do fio, mas isso daria muito trabalho, além de deixar o fabricante do novelo muito insatisfeito. Em vez disso, como estamos interessados apenas na ordem de grandeza, podemos estimar as grandezas necessárias para fazer o cálculo.

Cálculos: Vamos supor que o novelo seja uma esfera de raio $R = 2$ m. O fio do novelo certamente não está apertado (existem espaços vazios entre trechos vizinhos do fio). Para levar em conta esses espaços vazios, vamos superestimar um pouco a área de seção transversal do fio, supondo que ela seja quadrada, com lado de comprimento $d = 4$ mm. Nesse caso, com uma área da seção transversal d^2 e um comprimento L, o fio ocupa um volume total de

$$V = (\text{área da seção transversal})(\text{comprimento}) = d^2L.$$

Este valor é aproximadamente igual ao volume do novelo, dado por $4\pi R^3/3$, que é quase igual a $4R^3$, já que π é quase igual a 3. Assim, temos:

$$d^2L = 4R^3,$$

ou

$$L = \frac{4R^3}{d^2} = \frac{4(2\text{ m})^3}{(4\times10^{-3}\text{ m})^2}$$
$$= 2 \times 10^6\text{ m} \approx 10^6\text{ m} = 10^3\text{ km}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(Note que você não precisa usar uma calculadora para realizar um cálculo simples como este.) A ordem de grandeza do comprimento do fio é, portanto, 1000 km!

1-6 | Tempo

O tempo tem dois aspectos. No dia-a-dia e para alguns fins científicos queremos saber a hora do dia para podermos ordenar eventos em seqüência. Em muitos trabalhos científicos estamos interessados em conhecer a duração de um evento. Assim, qualquer padrão de tempo deve ser capaz de responder a duas perguntas: "*Quando* isso aconteceu?" e "*Quanto tempo* isso durou?". A Tabela 1-4 mostra alguns intervalos de tempo.

Qualquer fenômeno repetitivo pode ser usado como padrão de tempo. A rotação da Terra, que determina a duração do dia, foi usada para esse fim durante séculos; a Fig. 1-1 mostra um exemplo interessante de relógio baseado nessa rotação. Um relógio de quartzo, no qual um anel de quartzo é posto em vibração contínua, pode ser sincronizado com a rotação da Terra por meio de observações astronômicas e usado para medir intervalos de tempo no laboratório. Entretanto, a calibração não pode ser realizada com a exatidão exigida pela tecnologia moderna da engenharia e da ciência.

TABELA 1-4

Alguns Intervalos de Tempo Aproximados

Descrição	Intervalo de Tempo em Segundos
Tempo de vida do próton (teórico)	3×10^{40}
Idade do universo	5×10^{17}
Idade da pirâmide de Quéops	1×10^{11}
Expectativa de vida de um ser humano	2×10^{9}
Duração de um dia	9×10^{4}
Intervalos entre duas batidas de um coração humano	8×10^{-1}
Tempo de vida do múon	2×10^{-6}
Pulso mais curto obtido em laboratório	1×10^{-16}
Tempo de vida da partícula mais instável	1×10^{-23}
Tempo de Planck[a]	1×10^{-43}

[a]Tempo decorrido após o big bang, a partir do qual as leis de física que conhecemos passaram a ser válidas.



FIG. 1-1 Quando o sistema métrico foi proposto, em 1792, a hora foi redefinida para que um dia tivesse 10 horas. A idéia não vingou. O fabricante deste relógio de 10 horas sabiamente incluiu um pequeno mostrador convencional. Os dois mostradores indicam a mesma hora? *(Pitkin Studio, Rockford, IL, USA)*

Para atender à necessidade de um melhor padrão de tempo, foram desenvolvidos relógios atômicos. Um relógio atômico do National Institute of Standards and Technology (NIST) em Boulder, Colorado, EUA, é o padrão da Hora Coordenada Universal (UTC) nos Estados Unidos. Seus sinais de tempo estão disponíveis através de ondas curtas de rádio (estações WWV e WWVH) e por telefone (303-499-7111). Sinais de tempo (e informações relacionadas) estão também disponíveis no United States Naval Observatory, no site http://tycho.usno.navy.mil/time.html.* (Para acertar um relógio de forma extremamente precisa no local onde você se encontra seria necessário levar em conta o tempo necessário para que esses sinais cheguem até você.)

A Fig. 1-2 mostra as variações da duração de um dia na Terra durante um período de quatro anos, obtidas por comparação com um relógio atômico de césio. Como a variação mostrada na Fig. 1-2 é sazonal e repetitiva, desconfiamos da Terra quando existe uma diferença entre a Terra e um átomo como padrões de tempo. A variação se deve a efeitos de maré causados pela Lua e pela circulação atmosférica.

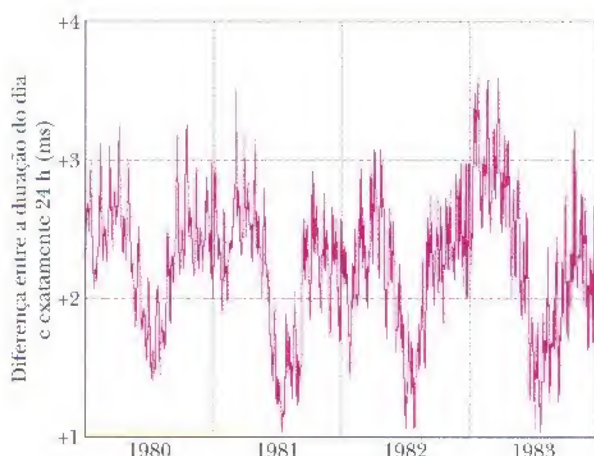


FIG. 1-2 Variações da duração do dia em um período de 4 anos. Note que toda a escala vertical corresponde a uma variação de apenas 3 ms (= 0,003 s).

Em 1967, a 13ª Conferência Geral de Pesos e Medidas adotou como padrão de tempo um segundo baseado no relógio de césio:

> Um segundo é o intervalo de tempo que corresponde a 9 192 631 770 oscilações da luz (de uma transição atômica especificada) emitida por um átomo de césio-133.

Os relógios atômicos são tão estáveis que, em princípio, dois relógios de césio teriam que funcionar por 6000 anos para que a diferença entre suas leituras fosse maior que 1 s. Mesmo assim, essa precisão não é nada em comparação com a dos relógios que estão sendo desenvolvidos atualmente, que pode chegar a uma parte em 10^{18}, ou seja, 1 s em 1×10^{18} s (cerca de 3×10^{10} anos).

1-7 | Massa

O Quilograma-Padrão

O padrão de massa do SI é um cilindro de platina-irídio (Fig. 1-3), mantido no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, nas proximidades de Paris, ao qual foi atribuída, por acordo internacional, a massa de 1 quilograma. Cópias precisas desse cilindro foram enviadas a laboratórios de padronização de outros países, e as massas de outros corpos podem ser determinadas comparando-os com uma dessas cópias.



FIG. 1-3 O quilograma-padrão internacional de massa, um cilindro de platina-irídio com 3,9 cm de altura e 3,9 cm de diâmetro. *(Cortesia do Bureau Internacional de Pesos e Medidas, França)*

* O Observatório Nacional fornece a hora legal brasileira no site http://pcdsh01.on.br. (N.T.)

TABELA 1-5

Algumas Massas Aproximadas

Descrição	Massa em Quilogramas
Universo conhecido	1×10^{53}
Nossa galáxia	2×10^{41}
Sol	2×10^{30}
Lua	7×10^{22}
Asteróide Eros	5×10^{15}
Montanha pequena	1×10^{12}
Transatlântico	7×10^{7}
Elefante	5×10^{3}
Uva	3×10^{-3}
Grão de poeira	7×10^{-10}
Molécula de penicilina	5×10^{-17}
Átomo de urânio	4×10^{-25}
Próton	2×10^{-27}
Elétron	9×10^{-31}

A Tabela 1-5 mostra algumas massas expressas em quilogramas, em uma faixa de aproximadamente 83 ordens de grandeza.

A cópia norte-americana do quilograma-padrão está guardada em um cofre do NIST. Ela é removida, não mais do que uma vez por ano, com o objetivo de aferir duplicatas usadas em outros lugares. Desde 1889 ela foi levada para a França duas vezes para comparação com o padrão primário.

Um Segundo Padrão de Massa

As massas dos átomos podem ser comparadas entre si mais precisamente do que com o quilograma-padrão. Por essa razão, temos um segundo padrão de massa, o átomo de carbono-12, ao qual, por acordo internacional, foi atribuída uma massa de 12 **unidades de massa atômica** (u). A relação entre as duas unidades é a seguinte:

$$1 \text{ u} = 1{,}660\,538\,86 \times 10^{-27} \text{ kg}, \tag{1-7}$$

com uma incerteza de ±10 nas duas últimas casas decimais. Os cientistas podem determinar experimentalmente, com razoável precisão, as massas de outros átomos em relação à massa do carbono-12. O que nos falta no momento é uma forma confiável de estender tal precisão a unidades de massa mais comuns, como o quilograma.

Massa Específica

Como vamos ver no Capítulo 14, a **massa específica** ρ de uma substância é a massa por unidade de volume:

$$\rho = \frac{m}{V}. \tag{1-8}$$

As massas específicas são normalmente expressas em quilogramas por metro cúbico ou em gramas por centímetro cúbico. A massa específica da água (1,00 grama por centímetro cúbico) é muito usada para fins de comparação. A massa específica da neve fresca é de 10% da massa específica da água; a da platina é 21 vezes maior que a da água.

Exemplo 1-4

Um objeto pesado pode afundar no solo durante um terremoto se o tremor fizer com o que o solo passe por um processo de *liquefação*, no qual as partículas do solo deslizam umas em relação às outras quase sem atrito. Nesse caso, o solo se torna praticamente uma areia movediça. A possibilidade de liquefação de um solo arenoso pode ser prevista em termos do *índice de vazios e* de uma amostra do solo:

$$e = \frac{V_v}{V_p}. \tag{1-9}$$

onde V_p é o volume total das partículas de areia na amostra e V_v é o volume total do espaço entre as partículas (isto é, dos *vazios*). Se e excede o valor crítico de 0,80, pode ocorrer liquefação durante um terremoto. Qual é a massa específica da areia, ρ_a, correspondente ao valor crítico? A massa específica do dióxido de silício (principal componente da areia) é ρ_{SiO_2} 2,600 × 10³ kg/m³.

IDÉIA-CHAVE A massa específica da areia, ρ_a, em uma amostra é a massa por unidade de volume, ou seja, a razão entre a massa total m_a das partículas de areia e o volume total V_t da amostra:

$$\rho_a = \frac{m_a}{V_t}. \tag{1-10}$$

Cálculos: O volume total V_t de uma amostra é dado por

$$V_t = V_p + V_v.$$

Substituindo V_v pelo seu valor, dado pela Eq. 1-9, e explicitando V_p, obtemos:

$$V_p = \frac{V_t}{1+e}. \tag{1-11}$$

De acordo com a Eq. 1-8, a massa total m_a das partículas de areia é o produto da massa específica do dióxido de silício pelo volume total das partículas de areia:

$$m_a = \rho_{SiO_2} V_p. \quad (1\text{-}12)$$

Substituindo esta expressão na Eq. 1-10 e substituindo V_p pelo seu valor, dado pela Eq. 1-11, obtemos:

$$\rho_a = \frac{\rho_{SiO_2}}{V_t} \frac{V_t}{1+e} = \frac{\rho_{SiO_2}}{1+e}. \quad (1\text{-}13)$$

Fazendo $\rho_{SiO_2} = 2{,}600 \times 10^3$ kg/m^3 e $e = 0{,}80$ nesta equação, descobrimos que a liquefação acontece quando a massa específica da areia é maior que

$$\rho_a = \frac{2{,}600 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}{1{,}80} = 1{,}4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

(Resposta)

REVISÃO E RESUMO

A Medição na Física A física se baseia na medição de grandezas físicas. Algumas grandezas físicas, como comprimento, tempo e massa, foram escolhidas como **grandezas fundamentais**; cada uma foi definida através de um **padrão** e recebeu uma **unidade** de medida (como metro, segundo e quilograma). Outras grandezas físicas são definidas em termos das grandezas fundamentais e de seus padrões e unidades.

Unidades do SI O sistema de unidades adotado neste livro é o Sistema Internacional de Unidades (SI). As três grandezas físicas mostradas na Tabela 1-1 são usadas nos primeiros capítulos. Os padrões, que têm que ser acessíveis e invariáveis, foram estabelecidos para essas grandezas fundamentais por um acordo internacional. Esses padrões são usados em todas as medições físicas, tanto das grandezas fundamentais quanto das grandezas secundárias. A notação científica e os prefixos da Tabela 1-2 são usados para simplificar a notação das medições.

Mudança de Unidades A conversão de unidades pode ser feita usando o método de *conversão em cadeia*, no qual os dados originais são multiplicados sucessivamente por fatores de conversão unitários e as unidades são manipuladas como quantidades algébricas até que apenas as unidades desejadas permaneçam.

Comprimento O metro é definido como a distância percorrida pela luz durante um intervalo de tempo especificado.

Tempo O segundo é definido em termos das oscilações da luz emitida por um isótopo de um certo elemento químico (césio-133). Sinais de tempo precisos são enviados a todo o mundo através de sinais de rádio sincronizados por relógios atômicos em laboratórios de padronização.

Massa O quilograma é definido em termos de um padrão de massa de platina-irídio mantido em um laboratório nas vizinhanças de Paris. Para medições em escala atômica é comumente usada a unidade de massa atômica, definida em termos do átomo de carbono-12.

Massa específica A massa específica ρ de uma substância é a massa por unidade de volume:

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (1\text{-}8)$$

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 1-5 Comprimento

•1 O micrômetro (1 μm) também é chamado de *mícron*. (a) Quantos mícrons tem 1,0 km? (b) Que fração do centímetro é igual a 1,0 μm? (c) Quantos mícrons tem uma jarda?

•2 As dimensões das letras e espaços de um livro são expressas em termos de pontos e paicas: 12 pontos = 1 paica e 6 paicas = 1 polegada. Se em uma das provas do livro uma figura apareceu deslocada de 0,80 em relação à posição correta, qual foi o deslocamento (a) em paicas e (b) em pontos?

•3 Em um certo hipódromo da Inglaterra, um páreo foi disputado em uma distância de 4,0 furlongs. Qual é a distância da corrida em (a) varas e (b) cadeias? (1 furlong = 201,168 m, 1 vara = 5,0292 m e uma cadeia = 20,117 m.)

•4 Um *gry* é uma antiga medida inglesa de comprimento, definida como 1/10 de uma linha; *linha* é uma outra medida inglesa de comprimento, definida como 1/12 de uma polegada. Uma medida comum usada nas editoras é o *ponto*, definido como 1/72 de uma polegada. Quanto vale uma área de 0,50 gry^2 em pontos quadrados (points^2)?

•5 A Terra tem a forma aproximada de uma esfera com 6,37 × 10^6 m. Determine (a) a circunferência da Terra em quilômetros, (b) a área da superfície da Terra em quilômetros quadrados e (c) o volume da Terra em quilômetros cúbicos.

••6 A ponte de Harvard, que liga o MIT às sociedades estudantis através do rio Charles, tem um comprimento de 364,4 smoots mais uma orelha. A unidade de um smoot se baseia no comprimento de Oliver Reed Smoot, Jr., classe de 1962, que foi carregado ou arrastado pela ponte para que outros membros da sociedade Lambda Chi Alpha pudessem marcar (com tinta) comprimentos de 1 Smoot ao longo da ponte. As marcas têm sido refeitas semestralmente por membros da sociedade, normalmente em horários de pico, para que a polícia não possa interferir facilmente. (Os policiais podem ter ficado aborrecidos porque o Smoot não é uma unidade fundamental do SI, mas hoje em dia

parecem ter aceito a unidade.) A Fig. 1-4 mostra três segmentos de reta paralelos medidas em Smoots (S), Willies (W) e Zeldas (Z). Quanto vale uma distância de 50,0 Smoots (a) em Willies e (b) em Zeldas?



FIG. 1-4 Problema 6.

••7 A Antártica é aproximadamente semicircular, com um raio de 2000 km (Fig. 1-5). A espessura média da cobertura de gelo é de 3000 m. Quantos centímetros cúbicos de gelo contém a Antártica? (Ignore a curvatura da Terra.)



FIG. 1-5 Problema 7.

••8 Hoje em dia, as conversões de unidades mais comuns podem ser feitas com o auxílio de calculadoras e computadores, mas é importante que o aluno saiba usar uma tabela de conversão como as do Apêndice D. A Tabela 1-6 é parte de uma tabela de conversão para um sistema de medidas de volume que já foi comum na Espanha; um volume de 1 fanega equivale a 55,501 dm^3 (decímetros cúbicos). Para completar a tabela, que números (com três algarismos significativos) devem ser inseridos (a) na coluna de cahiz, (b) na coluna de fanegas, (c) na coluna de cuartillas e (d) na coluna de almudes? Expresse 7,00 almudes em (e) medios, (f) cahizes e (g) centímetros cúbicos (cm^3).

TABELA 1-6

Problema 8

	cahiz	fanegas	cuartillas	almudes	medios
1 cahiz =	1	12	48	144	288
1 fanega =		1	4	12	24
1 cuartilla =			1	3	6
1 almude =				1	2
1 medio =					1

••9 Os engenheiros hidráulicos dos Estados Unidos usam freqüentemente, como unidade de volume de água, o *acre-pé*, definido como um volume de água suficiente para cobrir 1 acre de terra até uma profundidade de 1 pé. Uma forte tempestade despejou 2,0 polegadas de chuva em 30 min em uma cidade com uma área de 26 km^2. Que volume de água, em acres-pés, caiu sobre a cidade?

seção 1-6 Tempo

•10 A planta de crescimento mais rápido de que se tem notícia é uma *Hesperoyucca whipplei*, que cresceu 3,7 m em 14 dias. Qual foi a velocidade de crescimento da planta em micrômetros por segundo?

•11 O fortnight é uma simpática medida inglesa de tempo igual a 2,0 semanas (a palavra é uma contração de "fourteen nights", ou seja, quatorze noites). Pode ser um tempo adequado para passar com uma companhia agradável, mas uma dolorosa seqüência de microssegundos se for passado com uma companhia desagradável. Quantos microssegundos existem em um fortnight?

•12 Um tempo de aula (50 min) é aproximadamente igual a 1 microsséculo. (a) Qual é a duração de um microsséculo em minutos? (b) Usando a relação

$$\text{erro percentual} = \left(\frac{\text{real} - \text{aproximado}}{\text{real}}\right)100,$$

determine o erro percentual dessa aproximação.

•13 Por cerca de 10 anos após a Revolução Francesa o governo francês tentou basear as medidas de tempo em múltiplos de dez: uma semana tinha 10 dias, um dia tinha 10 horas, uma hora consistia em 100 minutos e um minuto consistia em 100 segundos. Quais são as razões (a) da semana decimal francesa para a semana comum e (b) do segundo decimal francês para o segundo comum?

•14 Os padrões de tempo são baseados atualmente em relógios atômicos. Um padrão promissor para o segundo é baseado em *pulsares*, que são estrelas de nêutrons (estrelas altamente compactas compostas apenas de nêutrons) que possuem um movimento de rotação. Alguns pulsares giram com velocidade constante, produzindo um sinal de rádio que passa pela superfície da Terra uma vez a cada rotação, como o feixe de luz de um farol. O pulsar PSR 1937+21 é um exemplo; ele gira uma vez a cada 1,557 806 448 872 75 ± 3 ms, em que o símbolo ±3 indica a incerteza na última casa decimal (*não significa* ±3 ms). (a) Quantas rotações o PSR 1937+21 executa em 7,00 dias? (b) Quanto tempo o pulsar leva para girar exatamente um milhão de vezes, e (c) qual é a incerteza associada?

•15 Três relógios digitais, *A*, *B* e *C*, funcionam com velocidades diferentes e não têm leituras simultâneas de zero. A Fig. 1-6 mostra leituras simultâneas de pares dos relógios em quatro ocasiões. (Na primeira ocasião, por exemplo, *B* indica 25,0 s e *C* indica 92,0 s.) Se o intervalo entre dois eventos é de 600 s, de acordo com o relógio *A*, qual é o intervalo entre os eventos (a) no relógio *B* e (b) no relógio *C*? (c) Quando o relógio *A* indica 400 s, qual é a indicação do relógio *B*? (d) Quando o relógio *C* indica 15,0 s, qual é a indicação do relógio *B*? (Suponha que as leituras são negativas para instantes anteriores a zero.)

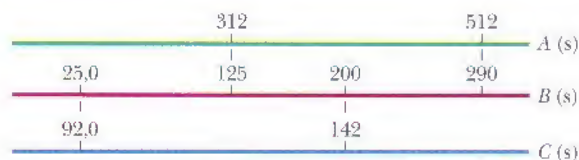


FIG. 1-6 Problema 15.

•16 Até 1913, cada cidade do Brasil tinha sua hora local. Hoje em dia os viajantes acertam o relógio apenas quando a variação de tempo é igual a 1,0 h (o que corresponde a um fuso horário). Que distância, em média, uma pessoa deve percorrer, em graus de longitude, para passar de um fuso horário a outro e ter que acertar o relógio? (*Sugestão:* A Terra gira 360° em aproximadamente 24 h.)

•17 Cinco relógios estão sendo testados em um laboratório. Exatamente ao meio-dia, de acordo com o Observatório Nacional, em dias sucessivos da semana as leituras dos relógios foram anotadas na tabela a seguir. Coloque os relógios em ordem de confiabilidade, começando pelo melhor. Justifique sua escolha.

Relógio	Dom.	Seg.	Ter.	Qua.	Qui.	Sex.	Sáb.
A	12:36:40	12:36:56	12:37:12	12:37:27	12:37:44	12:37:59	12:38:14
B	11:59:59	12:00:02	11:59:57	12:00:07	12:00:02	11:59:56	12:00:03
C	15:50:45	15:51:43	15:52:41	15:53:39	15:54:37	15:55:35	15:56:33
D	12:03:59	12:02:52	12:01:45	12:00:38	11:59:31	11:58:24	11:57:17
E	12:03:59	12:02:49	12:01:54	12:01:52	12:01:32	12:01:22	12:01:12

••18 Como a velocidade de rotação da Terra está diminuindo gradualmente, a duração dos dias está aumentando: o dia no final de 1,0 século é 1,0 ms mais longo que o dia no início do século. Qual é o aumento da duração do dia após 20 séculos?

•••19 Suponha que você está deitado na praia, perto do equador, vendo o Sol se pôr em um mar calmo, e liga um cronômetro no momento em que o Sol desaparece. Em seguida, você se levanta, deslocando os olhos para cima de uma distância $H = 1{,}70$ m, e desliga o cronômetro no momento em que o Sol volta a desaparecer. Se o tempo indicado pelo cronômetro é $t = 11{,}1$ s, qual é o raio da Terra?

seção 1-7 Massa

•20 O ouro, que tem uma massa específica de 19,32 g/cm^3, é um metal extremamente dúctil e maleável, isto é, pode ser transformado em fios ou folhas muito finas. (a) Se uma amostra de ouro, com uma massa de 27,63 g, é prensada até se tornar uma folha com 1,000 μm de espessura, qual é a área dessa folha? (b) Se, em vez disso, o ouro é transformado em um fio cilíndrico com 2,500 μm de raio, qual é o comprimento do fio?

•21 (a) Supondo que a água tenha uma massa específica de exatamente 1 g/cm^3, determine a massa de um metro cúbico de água em quilogramas. (b) Suponha que são necessárias 10,0 h para drenar um recipiente com 5700 m^3 de água. Qual é a "vazão de massa" da água do recipiente, em quilogramas por segundo?

•22 O recorde para a maior garrafa de vidro foi estabelecido em 1992 por uma equipe de Millville, Nova Jersey, que soprou uma garrafa com um volume de 193 galões americanos. (a) Qual é a diferença entre esse volume e 1,0 milhão de centímetros cúbicos? (b) Se a garrafa fosse enchida com água a uma vazão de 1,8 g/min, em quanto tempo estaria cheia? A massa específica da água é de 1000 kg/m^3.

•23 A Terra tem uma massa de $5{,}98 \times 10^{24}$ kg. A massa média dos átomos que compõem a Terra é 40 u. Quantos átomos existem na Terra?

••24 Em um centímetro cúbico de uma nuvem cúmulo típica existem de 50 a 500 gotas d'água, com um raio típico de 10 μm. Para essa faixa de valores, determine os valores mínimo e máximo, respectivamente, das seguintes grandezas: (a) número de metros cúbicos de água numa nuvem cúmulo cilíndrica com 3,0 km de altura e 1,0 km de raio; (b) número de garrafas de 1 litro que podem ser enchidas com essa quantidade de água; (c) a massa da água contida nessa nuvem, sabendo que a massa específica da água é de 1000 kg/m^3.

••25 A massa específica do ferro é de 7,87 g/cm^3, e a massa de um átomo de ferro é de $9{,}27 \times 10^{-26}$ kg. Se os átomos são esféricos e estão densamente compactados, (a) qual é o volume de um átomo de ferro e (b) qual é a distância entre os centros de dois átomos vizinhos?

••26 Um mol de átomos contém $6{,}02 \times 10^{23}$ átomos. Qual é a ordem de grandeza do número de átomos que existem em um gato grande? As massas de um átomo de hidrogênio, de um átomo de oxigênio e de um átomo de carbono são 1,0 u, 16 u e 12 u, respectivamente.

••27 Em uma viagem à Malásia você não resiste à tentação e compra um touro que pesa 28,9 piculs no sistema local de unidades de peso: 1 picul = 100 gins, 1 gin = 16 tahils, 1 tahil = 10 chees e 1 chee = 10 hoons. O peso de 1 hoon corresponde a uma massa de 0,3779 g. Quando você despacha o boi para casa, que massa deve declarar à alfândega? (*Sugestão:* Use conversões em cadeia.)

••28 Os grãos de areia das praias da Califórnia são aproximadamente esféricos, com um raio de 50 μm, e são feitos de dióxido de silício, que tem uma massa específica de 2600 kg/m^3. Que massa de grãos de areia possui uma área superficial total (soma das áreas de todas as esferas) igual à área da superfície de um cubo com 1,00 m de aresta?

••29 Durante uma tempestade, parte da encosta de uma montanha, com 2,5 km de largura, 0,80 km de altura ao longo da encosta e 2,0 m de espessura, desliza até um vale em uma avalanche de lama. Suponha que a lama fique distribuída uniformemente em uma área quadrada do vale com 0,40 km de lado e que ela tenha uma massa específica de 1900 kg/m^3. Qual é a massa da lama existente em uma área de 4,0 m^2 do vale?

••30 Despeja-se água em um recipiente que possui um vazamento. A massa m de água no recipiente em função do tempo t é dada por $m = 5{,}00t^{0,8} - 3{,}00t + 20{,}00$ para $t \geq 0$, onde a massa está em gramas e o tempo em segundos. (a) Em que instante a massa de água é máxima? (b) Qual é o valor dessa massa? Qual é taxa de variação da massa, em quilogramas por minuto, (c) em $t = 2{,}00$ s e (d) em $t = 5{,}00$ s?

•••31 Um recipiente vertical cuja base mede 14,0 cm por 17,0 cm está sendo enchido com barras de chocolate que possuem um volume de 50 mm^3 e uma massa de 0,0200 g. Suponha que o espaço vazio entre as barras de chocolate é tão pequeno que pode ser desprezado. Se a altura das barras de chocolate no recipiente aumenta à razão de 0,250 cm/s, qual é a taxa de aumento da massa das barras de chocolate no recipiente em quilogramas por minuto?

Problemas Adicionais

32 A Tabela 1-7 mostra algumas unidades antigas de volume de líquidos. Para completar a tabela, que números (com três algarismos significativos) devem ser introduzidos (a) na coluna de weys; (b) na coluna de chaldrons; (c) na coluna de bags; (d) na coluna de pottles; (e) na coluna da gills? (f) O volume de 1 bag equivale a 0,1091 m^3. Em uma história antiga, uma feiticeira prepara uma poção mágica em um caldeirão com um volume de 1,5 chaldron. Qual é o volume do caldeirão em metros cúbicos?

TABELA 1-7
Problema 32

	weys	chaldrons	bags	pottles	gills
1 wey =	1	10/9	40/3	640	120 240
1 chaldron =					
1 bag =					
1 pottle =					
1 gill =					

33 Uma antiga poesia infantil inglesa diz o seguinte: "Little Miss Muffet sat on a tuffet, eating her curds and whey, when along came a spider who sat down beside her." ("A pequena

Miss Muffet estava sentada em um banquinho, comendo queijo cottage, quando chegou uma aranha e sentou-se ao seu lado.") A aranha não se aproximou por causa do queijo, e sim porque Miss Muffet tinha 11 tuffets de moscas secas. O volume de um tuffet é dado por 1 tuffet = 2 pecks = 0,50 Imperial bushel, em que 1 Imperial bushel = 36,3687 litros (L). Qual era o volume das moscas de Miss Muffet em (a) pecks; (b) Imperial bushels; (c) litros?

34 Um antigo manuscrito revela que um proprietário de terras no tempo do rei Artur possuía 3,00 acres de terra cultivada e uma área para criação de gado de 25,0 perchas por 4,00 perchas. Qual era a área total (a) na antiga unidade de roods e (b) na unidade mais moderna de metros quadrados? 1 acre é uma área de 40 perchas por 4 perchas, 1 rood é uma área de 40 perchas por 1 percha, e 1 percha equivale a 16,5 pés.

35 Um turista americano compra um carro na Inglaterra e o despacha para os Estados Unidos. Um adesivo no carro informa que o consumo de combustível do carro é de 40 milhas por galão na estrada. O turista não sabe que o galão inglês é diferente do galão americano:

1 galão inglês = 4,545 963 1 litros
1 galão americano = 3,785 306 0 litros.

Para fazer uma viagem de 750 milhas nos Estados Unidos, de quantos galões de combustível (a) o turista pensa que precisa e (b) o turista realmente precisa?

36 Dois tipos de *barril* foram usados como unidades de volume na década de 1920 nos Estados Unidos. O barril de maçã tinha um volume oficial de 7056 polegadas cúbicas; o barril de cranberry, 5826 polegadas cúbicas. Se um comerciante vende 20 barris de cranberry a um freguês que pensa estar recebendo barris de maçã, qual é a diferença de volume em litros?

37 Uma certa marca de tinta de parede promete uma cobertura de 460 pés quadrados por galão. (a) Expresse este valor em metros quadrados por litro. (b) Expresse este valor em uma unidade do SI (veja os Apêndices A e D). (c) Qual é o inverso da grandeza original e (d) qual é o seu significado físico?

38 Nos Estados Unidos, uma casa de boneca tem uma escala de 1:12 em relação a uma casa de verdade (ou seja, cada comprimento na casa de boneca é 1/12 do comprimento correspondente na casa de verdade), e uma casa em miniatura (uma casa de boneca feita para caber em uma casa de boneca) tem uma escala de 1:144 em relação a uma casa de verdade. Suponha que uma casa de verdade (Fig. 1-7) tem 20 m de comprimento, 12 m de largura, 6,0 m de altura e um telhado inclinado padrão (com o perfil de um triângulo isósceles) de 3,0 m de altura. Qual é o volume, em metros cúbicos, (a) da casa de bonecas e (b) da casa em miniatura correspondente?

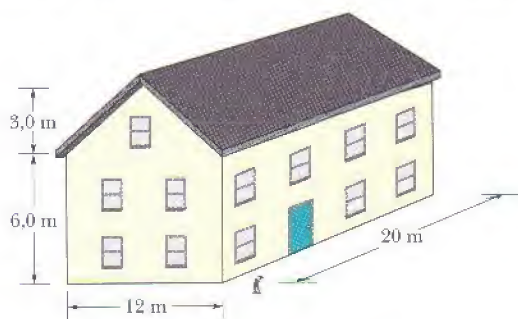


FIG. 1-7 Problema 38.

39 O *cord* é um volume de madeira cortada correspondente a uma pilha de 8 pés de comprimento, 4 pés de largura e 4 pés de altura. Quantos cords existem em 1,0 m^3 de madeira?

40 Uma molécula de água (H_2O) contém dois átomos de hidrogênio e um átomo de oxigênio. Um átomo de hidrogênio tem uma massa de 1,0 u, e um átomo de oxigênio tem uma massa de 16 u, aproximadamente. (a) Qual é a massa de uma molécula de água em quilogramas? (b) Quantas moléculas de água existem nos oceanos da Terra, cuja massa estimada é $1{,}4 \times 10^{21}$ kg?

41 A tonelada é uma medida de volume freqüentemente usada no transporte de mercadorias, mas seu uso requer uma certa cautela, pois existem pelo menos três tipos de tonelada: uma *tonelada de deslocamento* é igual a 7 barrels bulk, uma *tonelada de frete* é igual a 8 barrels bulk e uma *tonelada de registro* é igual a 20 barrels bulk. O *barrel bulk* é outra medida de volume: 1 barrel bulk = 0,1415 m^3. Suponha que você esteja analisando um pedido de "73 toneladas" de chocolate M&M e tenha certeza de que o cliente que fez a encomenda usou "tonelada" como unidade de volume (e não como de peso ou de massa, como será discutido no Capítulo 5). Se o cliente estava pensando em toneladas de deslocamento, quantos alqueires americanos em excesso você vai despachar se interpretar equivocadamente o pedido como (a) 73 toneladas de frete e (b) 73 toneladas de registro? (1 m^3 = 28,378 alqueires americanos.)

42 O vinho de uma grande festa de casamento será servido em um deslumbrante vaso de vidro lapidado com dimensões internas de 40 cm × 40 cm × 30 cm (altura). O vaso deve ser enchido até a borda. O vinho pode ser adquirido em garrafas, cujos tamanhos aparecem na tabela a seguir. É mais barato comprar uma garrafa de vinho maior do que o mesmo volume em garrafas menores. (a) Para minimizar o custo, que tamanhos de garrafa devem ser escolhidos e quantas garrafas de cada tamanho devem ser adquiridas? Depois que o vaso é cheio, quanto vinho sobra (b) em número de garrafas normais e (c) em litros?

1 garrafa normal
1 magnum = 2 garrafas normais
1 jeroboão = 4 garrafas normais
1 roboão = 6 garrafas normais
1 matusalém = 8 garrafas padrões
1 salmanasar = 12 garrafas normais
1 baltasar = 16 garrafas normais = 11.356 L
1 nabucodonosor = 20 garrafas normais

43 Um cubo de açúcar típico tem 1 cm de aresta. Qual é o valor da aresta de uma caixa cúbica com capacidade suficiente para conter um mol de cubos de açúcar? (Um mol = $6{,}02 \times 10^{23}$ unidades.)

44 Usando os dados fornecidos neste capítulo, determine o número de átomos de hidrogênio necessários para obter 1,0 kg de hidrogênio. Um átomo de hidrogênio tem uma massa de 1,0 u.

45 Uma unidade astronômica (UA) é a distância média entre a Terra e o Sol, aproximadamente $1{,}50 \times 10^8$ km. A velocidade da luz é de aproximadamente $3{,}0 \times 10^8$ m/s. Expresse a velocidade da luz em unidades astronômicas por minuto.

46 Que massa de água caiu sobre a cidade no Problema 9? A massa específica da água é $1{,}0 \times 10^3$ kg/m^3.

47 Uma pessoa que esteja de dieta pode perder 2,3 kg por semana. Expresse a taxa de perda de massa em miligramas por segundo, como se a pessoa pudesse sentir a perda segundo a segundo.

48 A *razão milho-porco* é um termo financeiro usado no mercado de porcos, provavelmente relacionado ao custo de alimentar um porco até que ele seja suficientemente grande para ser vendido. É definida como a razão entre o preço de mercado de um porco com

uma massa de 3,108 slugs e o preço de mercado de um alqueire americano de milho. (A palavra "slug" é derivada de uma antiga palavra alemã que significa "golpear"; este é um dos possíveis significados de "slug" no inglês moderno.) Um alqueire americano equivale a 35,238 L. Se a razão milho-porco está cotada a 5,7 na bolsa de mercadorias, determine o seu valor em unidades métricas de

$$\frac{\text{preço de 1 quilograma de porco}}{\text{preço de 1 litro de milho}}$$

(*Sugestão:* Consulte a tabela de conversão de unidades de massa do Apêndice D.)

49 Você foi encarregado de preparar um jantar para 400 pessoas em um encontro de apreciadores de comida mexicana. A receita recomenda usar duas pimentas jalapeño em cada porção (uma porção por pessoa). Entretanto, você dispõe apenas de pimentas habanero. O grau de ardência das pimentas é medido em termos da *unidade de calor de scoville* (UCS). Em média, uma pimenta jalapeño tem uma ardência de 4000 UCS e uma pimenta habanero tem uma ardência de 300 000 UCS. Quantas pimentas habanero você deve usar no lugar das pimentas jalapeño da receita para obter o grau de ardência desejado nos 400 pratos do jantar?

50 Uma unidade de área freqüentemente usada na medição de áreas de terrenos é o *hectare*, definido como 10^4 m². Uma mina de carvão a céu aberto consome anualmente 75 hectares de terra até uma profundidade de 26 m. Qual é o volume de terra removido por ano em quilômetros cúbicos?

51 (a) O *shake* é uma unidade de tempo usada informalmente pelos físicos nucleares. Um shake é igual a 10^{-8} s. Existem mais shakes em um segundo do que segundos em um ano? (b) O homem existe há aproximadamente 10^6 anos, enquanto a idade do universo é cerca de 10^{10} anos. Se a idade do universo é definida como 1 "dia do universo", dividido em "segundos do universo", como um dia comum é dividido em segundos comuns, há quantos segundos do universo o homem existe?

52 Para ter uma idéia da diferença entre o antigo e o moderno e entre o grande e o pequeno, considere o seguinte: na antiga Inglaterra rural, 1 hide (entre 100 e 120 acres) era a área de terra necessária para sustentar uma família com um arado durante um ano. (Uma área de 1 acre equivale a 4047 m².) Além disso, 1 wapentake era a área de terra necessária para 100 famílias na mesmas condições. Na física quântica, a área da seção de choque de um núcleo (definida através da probabilidade de que uma partícula incidente seja absorvida pelo núcleo) é medida em barns; 1 barn = 1×10^{-28} m². (No jargão da física nuclear, se um núcleo é "grande", acertá-lo com uma partícula é tão fácil quanto acertar um tiro em um celeiro.) Qual é a razão entre 25 wapentakes e 11 barns?

53 Uma unidade de comprimento tradicional no Japão é o ken (1 ken = 1,97 m). Determine a razão (a) entre kens quadrados e metros quadrados e (b) entre kens cúbicos e metros cúbicos. Qual é o volume de um tanque de água cilíndrico com 5,50 kens de altura e 3,00 kens de raio (c) em kens cúbicos e (d) em metros cúbicos?

54 Você foi encarregado de navegar 24,5 milhas para leste, de modo a posicionar seu barco de salvamento exatamente sobre a posição de um navio pirata afundado. Quando os mergulhadores não encontram nenhum sinal do navio, você se comunica com a base e descobre que deveria ter percorrido 24,5 *milhas náuticas*, e não milhas comuns. Use a tabela de conversão de unidades de comprimento do Apêndice D para calcular a distância em quilômetros entre sua posição atual e o local onde o navio pirata afundou.

55 Os degraus de uma escada têm 19 cm de altura e 23 cm de largura. As pesquisas mostram que a escada será mais segura na descida se a largura dos degraus for aumentada para 28 cm. Sabendo que a altura da escada é de 4,57 m, qual será o aumento da distância horizontal coberta pela escada se a modificação da largura dos degraus for executada?

56 A toupeira comum tem uma massa de aproximadamente 75 g, que corresponde a cerca de 7,5 mols de átomos. (Um mol de átomos corresponde a $6{,}02 \times 10^{23}$ átomos.) Qual é a massa total dos átomos de uma toupeira em unidades de massa atômica (u)?

57 A *unidade astronômica* (UA) é a distância média entre a Terra e o Sol, cerca de $92{,}9 \times 10^6$ milhas. O *parsec* (pc) é a distância para a qual uma distância de 1 UA subtende um ângulo de exatamente 1 segundo de arco (Fig. 1-8). O *ano-luz* é a distância que a luz, viajando no vácuo com uma velocidade de 186 000 milhas por segundo, percorre em 1,0 ano. Expresse a distância entre a Terra e o Sol (a) em parsecs e (b) em anos-luz.

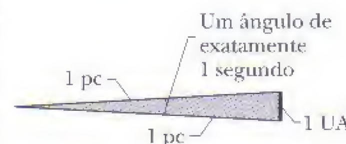


FIG. 1-8 Problema 57.

58 Ao comprar comida para uma reunião de políticos você encomendou erroneamente ostras do Pacífico sem casca de tamanho médio (um pint americano contém 8 a 12 dessas ostras), em vez de ostras do Atlântico sem casca de tamanho médio (um pint americano contém 26 a 38 dessas ostras). As ostras chegaram em uma caixa de isopor cujas dimensões internas são 1,0 m × 12 cm × 20 cm, e um pint americano equivale a 0,4732 litro. Quantas ostras a menos você pediu?

59 O cúbito é uma antiga unidade de comprimento baseada na distância entre o cotovelo e a ponta do dedo médio. Suponha que essa distância estivesse entre 43 e 53 cm e que gravuras antigas mostrem que uma coluna cilíndrica tinha 9 cúbitos de altura e 2 cúbitos de diâmetro. Determine os valores mínimo e máximo, respectivamente, (a) da altura da coluna em metros; (b) da altura da coluna em milímetros; (c) do volume da coluna em metros cúbicos.

60 Um antigo livro de culinária inglesa contém a seguinte receita de sopa de creme de urtiga: "Ferva um caldo com a seguinte quantidade de água: 1 xícara inglesa mais 1 xícara de chá mais 6 colheres de sopa mais uma colher de sobremesa. Usando luvas, separe as folhas de urtiga até que você tenha 0,5 quarto; adicione as folhas ao caldo em ebulição. Adicione uma colher de sopa de arroz cozido e uma colher de sal de sal. Deixe ferver durante 15 minutos". A tabela a seguir fornece fatores de conversão entre antigas medidas inglesas e medidas americanas. (Essas medidas clamam pela adoção do sistema métrico.) Para medidas de líquidos, 1 colher de chá inglesa = 1 colher de chá americana. Para medidas de sólidos, 1 colher de chá inglesa = 2 colheres de chá americanas, e 1 quart inglês = 1 quart americano. Qual o volume (a) de caldo, (b) de folhas de urtiga, (c) de arroz e (d) de sal usado na receita, em unidades americanas?

Medidas Inglesas Antigas	Medidas Americanas
colher de chá = 2 colheres de sal	colher de sopa = 3 colheres de chá
colher de sobremesa = 2 colheres de chá	meia xícara = 8 colheres de sopa
colher de sopa = 2 colheres de sobremesa	xícara = 2 meias xícaras
xícara de chá = 8 colheres de sopa	
xícara inglesa = 2 xícaras de chá	

2 Movimento Retilíneo

Um pica-pau bate repetidamente com o bico no tronco de uma árvore para procurar insetos para comer, para criar um depósito ou para anunciar que está à procura de uma parceira. O movimento em direção ao tronco pode ser muito rápido, mas a desaceleração quando o bico se choca com a madeira é quase instantânea, e seria fatal para um ser humano. Na verdade, um pica-pau deveria cair da árvore, morto ou inconsciente, toda vez que batesse com o bico no tronco. Entretanto, ele não só sobrevive como repete o movimento, produzindo um som de metralhadora.

Como um pica-pau pode sobreviver aos violentos impactos de seu bico em uma árvore?

A resposta está neste capítulo.



Fonte: Jeremy Woodhouse/Masterfile

2-1 O QUE É FÍSICA?

Um dos propósitos da física é estudar o movimento dos objetos: a rapidez com que se movem, por exemplo, ou a distância percorrida em um dado intervalo de tempo. Os engenheiros da NASCAR são fanáticos por esses aspectos da física quando determinam o desempenho dos seus carros antes e durante uma corrida. Os geólogos usam essa física para estudar o movimento de placas tectônicas na tentativa de prever terremotos. Os médicos necessitam dessa física para mapear o fluxo de sangue em um paciente quando examinam uma artéria parcialmente obstruída, e motoristas a usam para tentar reduzir a velocidade e escapar de uma multa quando percebem que existe um radar à frente. Existem inúmeros outros exemplos. Neste capítulo, estudamos a física básica do movimento nos casos em que o objeto (carro de corrida, placa tectônica, célula sangüínea ou qualquer outro) está se movendo em linha reta. Este tipo de movimento é chamado de *movimento unidimensional.*

2-2 | Movimento

O mundo, e tudo que nele existe, está sempre em movimento. Mesmo objetos aparentemente estacionários, como uma estrada, estão em movimento por causa da rotação da Terra, da órbita da Terra em torno do Sol, da órbita do Sol em torno do centro da Via Láctea e do movimento da Via Láctea em relação às outras galáxias. A classificação e a comparação dos movimentos (chamada de **cinemática**) podem ser um desafio. O que exatamente deve ser medido? Com que deve ser comparado?

Antes de tentarmos responder a essas perguntas, vamos examinar algumas propriedades gerais do movimento unidimensional, restringindo nossa análise de três formas.

1. Vamos supor que o movimento se dá ao longo de uma linha reta. A trajetória pode ser vertical, horizontal ou inclinada, mas deve ser retilínea.
2. Vamos discutir apenas o movimento em si e suas mudanças, sem nos preocuparmos com as suas causas. As forças (empurrões e puxões) modificam o movimento, mas não serão discutidas até o Capítulo 5.
3. Vamos supor que o objeto em movimento é uma **partícula** (ou seja, um objeto pontual, como um elétron) ou um objeto que se move como uma partícula (isto é, todas as partes do objeto se movem na mesma direção e com a mesma rapidez). Assim, por exemplo, podemos imaginar que o movimento de um porco rígido deslizando em um escorrega é semelhante ao de uma partícula; não podemos dizer o mesmo, porém, de uma bola rolando em uma mesa de sinuca.

2-3 | Posição e Deslocamento

Localizar um objeto significa determinar sua posição em relação a um ponto de referência, freqüentemente a **origem** (ou ponto zero) de um eixo como o eixo x da Fig. 2-1. O **sentido positivo** do eixo é o sentido dos números (coordenadas) crescentes, que na Fig. 2-1 é para a direita. O sentido oposto é o **sentido negativo**.

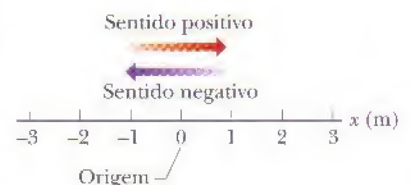


FIG. 2-1 A posição é determinada em um eixo marcado em unidades de comprimento (metros, por exemplo), que se estende indefinidamente nos dois sentidos. O nome do eixo, x, por exemplo, aparece sempre no lado positivo do eixo em relação à origem.

Assim, por exemplo, uma partícula pode estar localizada em $x = 5$ m, o que significa que está a 5 m da origem no sentido positivo. Se estivesse localizada em $x = -5$ m, estaria também a 5 m da origem, mas no sentido oposto. Sobre o eixo, uma coordenada de -5 m é menor que uma coordenada de -1 m, e ambas são menores que uma coordenada de +5 m. O sinal positivo de uma coordenada não precisa ser mostrado explicitamente, mas o sinal negativo deve sempre ser mostrado.

A uma mudança de uma posição x_1 para uma posição x_2 é associado um **deslocamento** Δx, dado por

$$\Delta x = x_2 - x_1. \tag{2-1}$$

(O símbolo Δ, a letra grega delta maiúsculo, é usado para representar a variação de uma grandeza e corresponde à diferença entre o valor final e o valor inicial.) Quando atribuímos números às posições x_1 e x_2 da Eq. 2-1, um deslocamento no sentido positivo (para a direita na Fig. 2-1) sempre resulta em um deslocamento positivo, e um deslocamento no sentido oposto (para a esquerda na figura) sempre resulta em um deslocamento negativo. Assim, por exemplo, se uma partícula se move de $x_1 = 5$ m para $x_2 = 12$ m, $\Delta x = (12 \text{ m}) - (5 \text{ m}) = +7$ m. O resultado positivo indica que o movimento é no sentido positivo. Se, em vez disso, a partícula se move de $x_1 = 5$ m para $x_2 = 1$ m, $\Delta x = (1 \text{ m}) - (5 \text{ m}) = -4$ m. O resultado negativo indica que o movimento é no sentido negativo.

O número real de metros percorridos é irrelevante; o deslocamento envolve apenas as posições inicial e final. Assim, por exemplo, se a partícula se move de $x = 5$ m para $x = 200$ m e em seguida volta para $x = 5$ m, o deslocamento é $\Delta x = (5 \text{ m}) - (5 \text{ m}) = 0$.

O sinal positivo do deslocamento não precisa ser mostrado, mas o sinal negativo deve sempre ser mostrado. Quando ignoramos o sinal (e, portanto, o sentido) do deslocamento, ficamos com o **módulo** do deslocamento. Assim, por exemplo, a um deslocamento $\Delta x = -4$ m corresponde um módulo de 4 m.

O deslocamento é um exemplo de **grandeza vetorial**, uma grandeza que possui módulo, direção e sentido. Os vetores serão discutidos com mais detalhes no Capítulo 3 (na verdade, talvez alguns de vocês já tenham lido esse capítulo), mas tudo de que necessitamos no momento é a idéia de que o deslocamento tem duas características: (1) seu *módulo* é a distância (como, por exemplo, o número de metros) entre as posições inicial e final; (2) sua *direção*, de uma posição inicial para uma posição final, pode ser representada por um sinal positivo ou um sinal negativo se o movimento é retilíneo.

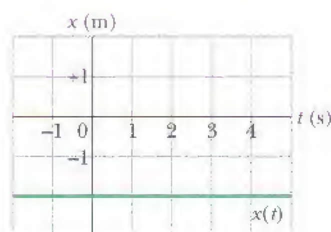


FIG. 2-2 Gráfico de $x(t)$ para um tatu que está em repouso em $x = -2$ m. O valor de x é -2 m para qualquer instante t.

O que se segue é o primeiro dos muitos testes que o leitor encontrará neste livro. Estes testes contêm uma ou mais questões cujas respostas requerem um raciocínio ou cálculo mental e permitem verificar sua compreensão do ponto discutido. As respostas aparecem no final do livro.



TESTE 1 Considere três pares de posições iniciais e finais, respectivamente, ao longo do eixo x. A quais dos pares correspondem deslocamentos negativos: (a) -3 m, $+5$ m; (b) -3 m, -7 m; (c) 7 m, -3 m?

2-4 | Velocidade Média e Velocidade Escalar Média

Uma forma compacta de descrever a posição de um objeto é desenhar um gráfico da posição x em função do tempo t, ou seja, um gráfico de $x(t)$. [A notação $x(t)$ representa uma função x de t, e não o produto de x por t.] Como um exemplo simples, a Fig. 2-2 mostra a função posição $x(t)$ para um tatu em repouso (tratado como uma partícula) durante um intervalo de tempo de 7 s. A posição do animal tem sempre o mesmo valor, $x = -2$ m.

A Fig. 2-3a é mais interessante, já que envolve movimento. O tatu é aparentemente avistado em $t = 0$, quando está na posição $x = -5$ m. Ele se move no sentido de $x = 0$, passa por esse ponto em $t = 3$ s e continua a se deslocar para maiores valores positivos de x. A Fig. 2-3b mostra o movimento real do tatu em linha reta, que é a trajetória que você veria. O gráfico da Fig. 2-3a é mais abstrato e bem diferente daquilo que você realmente veria, mas é muito mais rico em informações. Ele também revela com que rapidez o tatu se move.

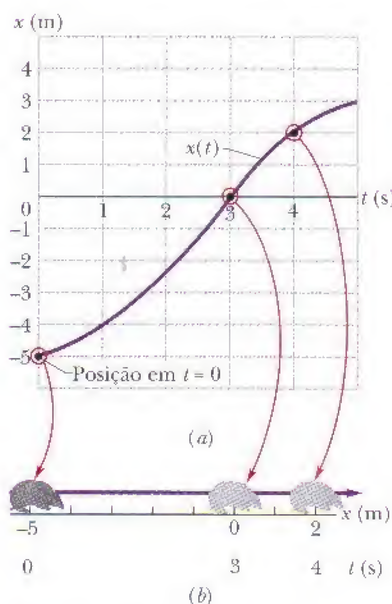


FIG. 2-3 (a) Gráfico de $x(t)$ para um tatu em movimento. (b) A trajetória associada ao gráfico. A escala abaixo do eixo x mostra os instantes nos quais o tatu atinge alguns valores de x.

Na verdade, várias grandezas estão associadas à expressão "com que rapidez". Uma é a **velocidade média** $v_{méd}$, que é a razão entre o deslocamento Δx e o intervalo de tempo Δt durante o qual esse deslocamento ocorre:

$$v_{méd} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \tag{2-2}$$

A notação significa que a posição é x_1 no instante t_1 e x_2 no instante t_2. A unidade de $v_{méd}$ no Sistema Internacional de Unidades (SI) é o metro por segundo (m/s). Outras unidades são usadas em alguns problemas, mas todas estão na forma de comprimento/tempo.

Em um gráfico de x em função de t, $v_{méd}$ é a **inclinação** da reta que liga dois pontos particulares da curva $x(t)$: um dos pontos corresponde a x_2 e t_2 e o outro a x_1 e t_1. Da mesma forma que o deslocamento, $v_{méd}$ também possui um módulo e uma direção (também é uma grandeza vetorial). O módulo é valor absoluto da inclinação da reta. Um valor positivo de $v_{méd}$ (e da inclinação) significa que a reta está inclinada para cima da esquerda para a direita; um valor negativo de $v_{méd}$ (e da inclinação) significa que a reta está inclinada para baixo da esquerda para a direita. A velocidade média $v_{méd}$ tem sempre o mesmo sinal do deslocamento Δx porque Δt na Eq. 2-2 é sempre positivo.

A Fig. 2-4 mostra como determinar $v_{méd}$ na Fig. 2-3 para o intervalo de tempo de $t = 1$ s a $t = 4$ s. Traçamos a linha reta que une os pontos correspondentes ao início e ao final do intervalo de tempo considerado. Em seguida, calculamos a inclinação $\Delta x/\Delta t$ da linha reta. Para o intervalo de tempo dado, a velocidade média é

$$v_{méd} = \frac{6 \text{ m}}{3 \text{ s}} = 2 \text{ m/s}.$$

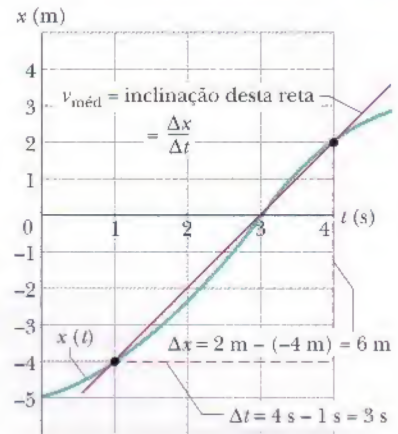


FIG. 2-4 Cálculo da velocidade média entre $t = 1$ s e $t = 4$ s como a inclinação da reta que une os pontos sobre a curva $x(t)$ que correspondem a esses tempos.

A **velocidade escalar média** $s_{méd}$ é uma forma diferente de descrever "com que rapidez" uma partícula está se movendo. Enquanto a velocidade média envolve o deslocamento da partícula Δx, a velocidade escalar média é definida em termos da distância total percorrida (o número de metros percorridos, por exemplo), independentemente da direção. Assim,

$$s_{méd} = \frac{\text{distância total}}{\Delta t}. \qquad (2\text{-}3)$$

Como a definição de velocidade escalar média *não inclui* a direção do movimento, ela não possui um sinal algébrico. Em alguns casos, $s_{méd}$ é igual (a não ser pela ausência de sinal) a $v_{méd}$. Entretanto, como é demonstrado no Exemplo 2-1, as duas velocidades podem ser bastante diferentes.

Exemplo 2-1

Depois de dirigir uma van em uma estrada retilínea por 8,4 km a 70 km/h, você pára por falta de gasolina. Nos 30 min seguintes você caminha por mais 2,0 km ao longo da estrada até chegar ao posto de gasolina mais próximo.

(a) Qual é o deslocamento total, desde o início da viagem até chegar ao posto de gasolina?

IDÉIA-CHAVE Suponha, por conveniência, que você se move no sentido positivo do eixo x, da posição inicial x_1 até a posição final x_2, no posto de gasolina. Essa segunda posição deve ser $x_2 = 8{,}4 \text{ km} + 2{,}0 \text{ km} = 10{,}4$ km. O deslocamento Δx ao longo do eixo x é a diferença entre a segunda posição e a primeira.

Cálculo: De acordo com a Eq. 2-1, temos:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 10{,}4 \text{ km} - 0 = 10{,}4 \text{ km}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, o deslocamento total é de 10,4 km no sentido positivo do eixo x.

(b) Qual é o intervalo de tempo Δt entre o início da viagem e o instante em que você chega ao posto?

IDÉIA-CHAVE Já sabemos quanto tempo você passou caminhando, Δt_{cam} (0,50 h), mas não sabemos quanto tempo você passou dirigindo, Δt_{dir}. Sabemos, porém, que você viajou 8,4 km de carro a uma velocidade média $v_{méd,\,dir}$ = 70 km/h. Esta velocidade média é igual à razão entre o deslocamento do carro e o intervalo de tempo correspondente a esse deslocamento.

Cálculos: Em primeiro lugar, sabemos que

$$v_{méd,\,dir} = \frac{\Delta x_{dir}}{\Delta t_{dir}}.$$

Explicitando Δt_{dir} e substituindo os valores conhecidos, obtemos:

$$\Delta t_{dir} = \frac{\Delta x_{dir}}{v_{méd,\,dir}} = \frac{8{,}4\text{ km}}{70\text{ km/h}} = 0{,}12\text{ h}.$$

e, portanto, $\Delta t = \Delta t_{dir} + \Delta t_{cam}$

$$= 0{,}12\text{ h} + 0{,}50\text{ h} = 0{,}62\text{ h}. \quad \text{(Resposta)}$$

(c) Qual é a velocidade média $v_{méd}$ do início da viagem até a chegada ao posto de gasolina? Determine a solução numericamente e graficamente.

IDÉIA-CHAVE De acordo com a Eq. 2-2, $v_{méd}$ *para todo o percurso* é a razão entre o deslocamento de 10,4 km *para todo o percurso* e o intervalo de tempo de 0,62 h *para todo o percurso*.

Cálculo: Neste caso,

$$v_{méd} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10{,}4\text{ km}}{0{,}62\text{ h}}$$
$$= 16{,}8\text{ km/h} \approx 17\text{ km/h}. \quad \text{(Resposta)}$$

Para determinar $v_{méd}$ graficamente traçamos o gráfico da função $x(t)$, como mostra a Fig. 2-5, onde os pontos de partida e chegada no gráfico são a origem e o ponto assinalado como "Posto". A velocidade média é a inclinação da reta que une esses pontos, ou seja, $v_{méd}$ é a razão entre a *elevação* (Δx = 10,4 km) e o *curso* (Δt = 0,62 h), o que nos dá $v_{méd}$ = 16,8 km/h.

(d) Suponha que para encher um bujão de gasolina, pagar e caminhar de volta para a van você leve 45 min. Qual é sua velocidade escalar média do início da viagem até o momento em que chega de volta ao lugar onde deixou a van?

IDÉIA-CHAVE A velocidade escalar média é a razão entre a distância total percorrida e o tempo gasto para percorrer essa distância.

Cálculo: A distância total é 8,4 km + 2,0 km + 2,0 km = 12,4 km. O intervalo de tempo total é 0,12 h + 0,50 h + 0,75 h = 1,37 h. Assim, de acordo com a Eq. 2-3,

$$s_{méd} = \frac{12{,}4\text{ km}}{1{,}37\text{ h}} = 9{,}1\text{ km/h}. \quad \text{(Resposta)}$$

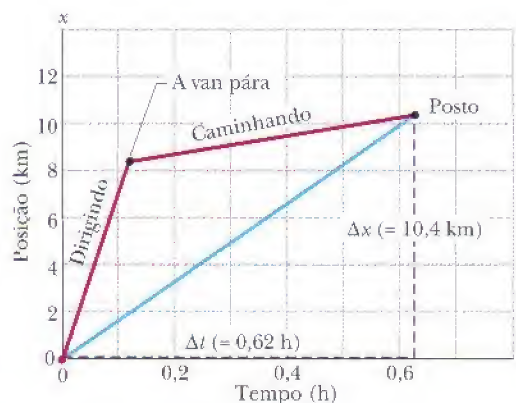


FIG. 2-5 As retas "Dirigindo" e "Caminhando" são os gráficos da posição em função do tempo para os deslocamentos de carro e a pé. (O gráfico para o deslocamento a pé supõe uma caminhada com velocidade constante.) A inclinação da reta que liga a origem ao ponto "Posto" é a velocidade média para o percurso até o posto.

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 1: *Você Compreende o Problema?* A dificuldade mais comum é simplesmente não compreender qual é o problema. A melhor forma de verificar se você compreendeu o problema é a seguinte: você seria capaz de explicá-lo a outra pessoa?

Escreva os dados fornecidos, com suas unidades, usando os símbolos do capítulo. [No Exemplo 2-1, os dados fornecidos permitem calcular o deslocamento Δx na parte (a) e o intervalo de tempo correspondente Δt na parte (b).] Identifique a incógnita e seu símbolo. (No exemplo, a incógnita da parte (c) é a velocidade média $v_{méd}$.) Determine a relação entre a incógnita e os dados. (A relação é fornecida pela Eq. 2-2, a definição de velocidade média.)

Tática 2: *As Unidades Estão Corretas?* Antes de substituir valores numéricos nas equações, certifique-se de que as unidades usadas são compatíveis. No Exemplo 2-1 é natural, diante dos dados fornecidos, usar quilômetros para distâncias, horas para intervalos de tempo e quilômetros por hora para velocidades. Muitas vezes é preciso converter algumas unidades para torná-las compatíveis com outras.

Tática 3: *A Resposta Obtida É Razoável?* A resposta fez sentido ou parece muito grande ou muito pequena? O sinal está correto? As unidades são apropriadas? Na parte (*c*) do Exemplo 2-1, por exemplo, a resposta correta é 17 km/h. Se você encontrasse 0,00017 km/h, −17 km/h, 17 km/s ou 17000 km/h deveria perceber imediatamente que cometeu um erro. O erro pode estar no método usado, nos cálculos ou no modo como os dados foram digitados em uma calculadora.

Tática 4: *Interpretação de Gráficos* As Figs. 2-2, 2-3*a*, 2-4 e 2-5 são gráficos que você deve ser capaz de interpretar com facilidade. Em cada um desses gráficos, a variável associada ao eixo horizontal é o tempo t, com o tempo aumentando para a direita. A variável associada ao eixo vertical é a posição x da partícula em movimento em relação à origem, com o valor que define a posição aumentando para cima. Preste sempre atenção nas unidades (segundos ou minutos; metros ou quilômetros) nas quais as variáveis estão expressas.

2-5 | Velocidade Instantânea e Velocidade Escalar Instantânea

Vimos até agora duas formas de descrever a rapidez com a qual um objeto se move: a velocidade média e a velocidade escalar média, ambas medidas para um intervalo de tempo Δt. Entretanto, quando falamos em "rapidez" em geral estamos pensando na rapidez com a qual um objeto está se movendo em um certo instante, ou seja, em sua **velocidade instantânea** (ou, simplesmente, **velocidade**) v.

A velocidade em um dado instante é obtida a partir da velocidade média reduzindo o intervalo de tempo Δt até torná-lo próximo de zero. À medida que Δt diminui, a velocidade média se aproxima de um valor-limite, que é a velocidade instantânea:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \tag{2-4}$$

Observe que v é a taxa com a qual a posição x está variando com o tempo em um dado instante, ou seja, v é a derivada de x em relação a t. Observe também que v, em qualquer instante, é a inclinação da curva que representa a posição em função do tempo no instante considerado. A velocidade instantânea também é uma grandeza vetorial e, portanto, possui uma direção e um sentido.

Velocidade escalar instantânea, ou, simplesmente, **velocidade escalar**, é o módulo da velocidade, ou seja, a velocidade desprovida de qualquer indicação de direção. (*Atenção:* a velocidade escalar e a velocidade escalar média podem ser muito diferentes.) A velocidade escalar de um objeto que está se movendo a uma velocidade de +5 m/s é a mesma (5 m/s) que a de um objeto que está se movendo a uma velocidade de −5 m/s. O velocímetro de um carro indica a velocidade escalar e não a velocidade, já que não mostra a direção em que o carro está se movendo.

✓ TESTE 2 As equações a seguir fornecem a posição $x(t)$ de uma partícula em quatro casos (em todas as equações, x está em metros, t em segundos e $t > 0$): (1) $x = 3t - 2$; (2) $x = -4t^2 - 2$; (3) $x = 2/t^2$; (4) $x = -2$. (a) Em que caso(s) a velocidade v da partícula é constante? (b) Em que caso(s) a velocidade v é no sentido negativo do eixo x?

Exemplo 2-2

A Fig. 2-6*a* mostra o gráfico $x(t)$ de um elevador que, depois de passar algum tempo parado, começa a se mover para cima (que tomamos como sendo o sentido positivo de x) e depois pára novamente. Plote $v(t)$.

IDÉIA-CHAVE Podemos determinar a velocidade em qualquer instante calculando a inclinação da curva de $x(t)$ nesse instante.

Cálculos: A inclinação de $x(t)$, e também a velocidade, é zero nos intervalos de 0 a 1 s e de 9 s em diante, já que o elevador está parado nesses intervalos. Durante o intervalo *bc*, a inclinação é constante e diferente de zero, o que significa que o elevador se move com velocidade constante. A inclinação de $x(t)$ é dada por

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v = \frac{24 \text{ m} - 4{,}0 \text{ m}}{8{,}0 \text{ s} - 3{,}0 \text{ s}} = +4{,}0 \text{ m/s}.$$

O sinal positivo indica que o elevador está se movendo no sentido positivo de x. Estes intervalos (nos quais $v = 0$ e $v = 4$ m/s) estão plotados na Fig. 2-6*b*. Além disso, como o elevador começa a se mover a partir do repouso e depois reduz a velocidade até parar, v varia da forma indicada nos intervalos de 1 s a 3 s e de 8 s a 9 s. Assim, a Fig. 2-6*b* é o gráfico pedido. (A Fig. 2-6*c* será discutida na Seção 2-6.)

Dado um gráfico de $v(t)$ como a Fig. 2-6*b*, poderíamos "retroagir" para determinar a forma do gráfico de $x(t)$ correspondente (Fig. 2-6*a*). Entretanto, não conheceríamos os verdadeiros valores de x nos vários instantes de tempo, porque o gráfico de $v(t)$ contém informações ape-

nas sobre as *variações* em x. Para determinar a variação de x em um intervalo dado devemos, na linguagem do cálculo, calcular a área "sob a curva" no gráfico de $v(t)$ para esse intervalo. Assim, por exemplo, durante o intervalo de 3 s a 8 s, no qual o elevador tem uma velocidade de 4,0 m/s, a variação de x é

$$\Delta x = (4{,}0 \text{ m/s})(8{,}0 \text{ s} - 3{,}0 \text{ s}) = +20 \text{ m}.$$

(Esta área é positiva porque a curva $v(t)$ está acima do eixo t.) A Fig. 2-6*a* mostra que x realmente aumenta de 20 m nesse intervalo. Entretanto, a Fig. 2-6*b* nada nos diz sobre os valores de x no início e no final do intervalo. Para isso, necessitamos de informações adicionais, como o valor de x em algum instante.

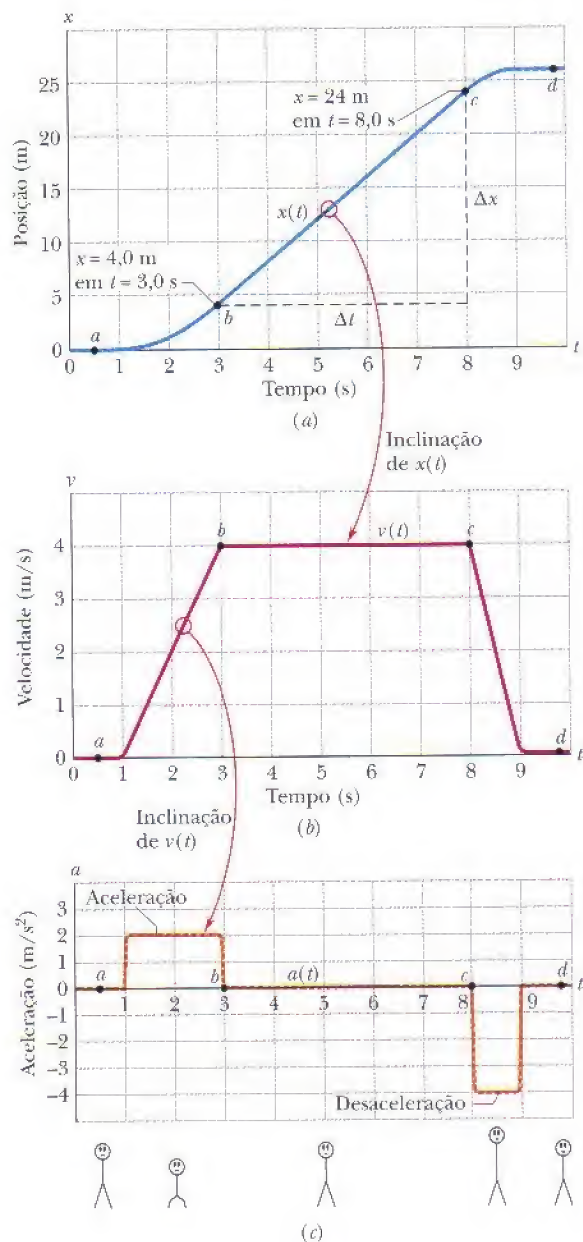


FIG. 2-6 (*a*) A curva $x(t)$ de um elevador que se move para cima ao longo do eixo x. (*b*) A curva $v(t)$ do elevador. Observe que é a derivada da curva $x(t)$ ($v = dx/dt$). (*c*) A curva $a(t)$ do elevador, que é a derivada da curva $v(t)$ ($a = dv/dt$). As figuras na parte de baixo dão uma idéia de como um passageiro se sentiria durante as acelerações.

Exemplo 2-3

A posição de uma partícula que se move em um eixo x é dada por

$$x = 7{,}8 + 9{,}2t - 2{,}1t^3, \qquad (2\text{-}5)$$

com x em metros e t em segundos. Qual é a velocidade da partícula em $t = 3{,}5$ s? A velocidade é constante ou está variando continuamente?

IDÉIA-CHAVE A velocidade é a derivada primeira (em relação ao tempo) da função posição $x(t)$.

Cálculos: Para simplificar, as unidades foram omitidas na Eq. 2-5, mas você pode inseri-las, se quiser, mudando os coeficientes para 7,8 m, 9,2 m/s e –2,1 m/s³. Derivando a Eq. 2-5, obtemos

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(7{,}8 + 9{,}2t - 2{,}1t^3).$$

e, portanto,

$$v = 0 + 9{,}2 - (3)(2{,}1)t^2 + 9{,}2 - 6{,}3t^2. \qquad (2\text{-}6)$$

Em $t = 3{,}5$ s,

$$v = 9{,}2 - (6{,}3)(3{,}5)^2 = -68 \text{ m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Em $t = 3{,}5$ s, a partícula está se movendo no sentido negativo de x (note o sinal negativo) com uma velocidade escalar de 68 m/s. Como a variável t aparece na Eq. 2-6, a velocidade v depende de t e, portanto, está variando continuamente.

2-6 | Aceleração

Quando a velocidade de uma partícula varia, diz-se que a partícula sofreu uma **aceleração** (ou foi acelerada). Para movimentos ao longo de um eixo, a **aceleração média** $a_{méd}$ em um intervalo de tempo Δt é

$$a_{méd} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \tag{2-7}$$

onde a partícula tem velocidade v_1 no instante t_1 e velocidade v_2 no instante t_2. A **aceleração instantânea** (ou, simplesmente, **aceleração**) é dada por

$$a = \frac{dv}{dt}. \tag{2-8}$$

Em palavras, a aceleração de uma partícula em qualquer instante é a taxa com a qual a velocidade está variando nesse instante. Graficamente, a aceleração em qualquer ponto é a inclinação da curva de $v(t)$ nesse ponto. Podemos combinar a Eq. 2-8 com a Eq. 2-4 e escrever

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{2-9}$$

Em palavras, a aceleração de uma partícula em qualquer instante é a derivada segunda da posição $x(t)$ em relação ao tempo.

A unidade de aceleração no SI é o metro por segundo ao quadrado, m/s^2. Outras unidades são usadas em alguns problemas, mas todas estão na forma de comprimento/tempo^2. Da mesma forma que o deslocamento e a velocidade, a aceleração possui um módulo e uma direção (também é uma grandeza vetorial). O sinal algébrico representa seu sentido em relação a um eixo, ou seja, uma aceleração com um valor positivo tem o sentido positivo de um eixo, enquanto uma aceleração com valor negativo tem o sentido negativo.

A Fig. 2-6*c* é um gráfico da aceleração do elevador do Exemplo 2-2. Compare esta curva de $a(t)$ com a curva de $v(t)$; cada ponto na curva de $a(t)$ corresponde à derivada (inclinação) da curva de $v(t)$ no mesmo instante de tempo. Quando v é constante (com o valor de 0 ou 4 m/s), a derivada é nula e, portanto, a aceleração é nula. Quando o elevador começa a se mover, a curva de $v(t)$ tem derivada positiva (a inclinação é positiva), o que significa que $a(t)$ é positiva. Quando o elevador reduz a velocidade até parar, a derivada e a inclinação da curva de $v(t)$ são negativas, ou seja, $a(t)$ é negativa.

Compare as inclinações da curva de $v(t)$ nos dois períodos de aceleração. A inclinação associada à redução de velocidade do elevador (ou seja, à "desaceleração") é maior porque o elevador pára na metade do tempo que levou para atingir uma velocidade constante. Uma inclinação maior significa que o módulo da desaceleração é maior que o da aceleração, como mostra a Fig. 2-6*c*.

As sensações que você teria se estivesse no elevador da Fig. 2-6 estão indicadas pelos bonequinhos que aparecem na parte inferior da figura. Quando o elevador acelera, você se sente como se estivesse sendo empurrado para baixo; mais tarde, quando o elevador freia até parar, tem a impressão de que está sendo puxado para cima. Entre esses dois intervalos não sente nada de especial. Em outras palavras, nosso corpo reage a acelerações (é um acelerômetro), mas não a velocidades (não é um velocímetro). Quando estamos viajando de carro a 90 km/h ou viajando de avião a 900 km/h não temos nenhuma sensação de movimento. Entretanto, se o carro ou o avião muda bruscamente de velocidade percebemos imediatamente a mudança e podemos até ficar assustados. Boa parte da emoção que sentimos quando andamos de montanha-russa se deve às mudanças súbitas de velocidade às quais somos submetidos (pagamos pela aceleração, não pela velocidade). Um exemplo mais extremo aparece nas fotografias da Fig. 2-7, tiradas enquanto um trenó a jato era rapidamente acelerado sobre trilhos e depois freado bruscamente até parar.





FIG. 2-7 O coronel J. P. Stapp em um trenó a jato, cuja velocidade aumenta bruscamente (aceleração para fora do papel) e, em seguida, diminui bruscamente (aceleração para dentro do papel). (*Cortesia da Força Aérea americana.*)

Grandes acelerações são às vezes expressas em unidades de g, onde

$$1g = 9{,}8 \text{ m/s}^2 \qquad \text{(unidade de } g\text{).} \qquad (2\text{-}10)$$

(Como vamos discutir na Seção 2-9, g é o módulo da aceleração de um objeto em queda livre nas proximidades da superfície da Terra.) Uma montanha-russa submete os passageiros a uma aceleração de até $3g$, o equivalente a $(3)(9{,}8 \text{ m/s}^2)$, ou cerca de 29 m/s^2, um valor mais do que suficiente para justificar o preço do passeio.

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 5: *Sinal da Aceleração* Na linguagem comum, o sinal de uma aceleração tem um significado não-científico: aceleração positiva significa que a velocidade do objeto está aumentando, e aceleração negativa significa que a velocidade está diminuindo (o objeto está desacelerando). Neste livro, porém, o sinal de uma aceleração indica um sentido, e não se a velocidade do objeto está aumentando ou diminuindo.

Assim, por exemplo, se um carro com uma velocidade inicial $v = -25$ m/s é freado até parar em 5,0 s, $a_{\text{méd}} = +5{,}0 \text{ m/s}^2$. A aceleração é *positiva*, mas a velocidade escalar do carro diminuiu. A razão está na diferença de sinais: o sentido da aceleração é contrário ao da velocidade.

A forma apropriada de interpretar os sinais é a seguinte:

Se os sinais da velocidade e da aceleração de uma partícula são iguais, a velocidade escalar da partícula aumenta. Se os sinais são opostos, a velocidade escalar diminui.

TESTE 3 Um marsupial se move ao longo do eixo x. Qual é o sinal de sua aceleração se ele está se movendo (a) no sentido positivo com velocidade escalar crescente; (b) no sentido positivo com velocidade escalar decrescente; (c) no sentido negativo com velocidade escalar crescente; (d) no sentido negativo com velocidade escalar decrescente?

Exemplo 2-4 Aumente sua capacidade

A posição de uma partícula no eixo x da Fig. 2-1 é dada por

$$x = 4 - 27t + t^3,$$

com x em metros e t em segundos.

(a) Como a posição x depende do tempo t, a partícula deve estar em movimento. Determine a função velocidade $v(t)$ e a função aceleração $a(t)$ da partícula.

IDÉIAS-CHAVE (1) Para obter a função velocidade $v(t)$, derivamos a função posição $x(t)$ em relação ao tempo. (2) Para obter a função aceleração $a(t)$, derivamos a função velocidade $v(t)$ em relação ao tempo.

Cálculos: Derivando a função posição, obtemos

$$v = -27 + 3t^2, \qquad \text{(Resposta)}$$

com v em metros por segundo. Derivando a função velocidade, obtemos

$$a = +6t \qquad \text{(Resposta)}$$

com a em metros por segundo ao quadrado.

(b) Existe algum instante para o qual $v = 0$?

Cálculo: Fazendo $v(t) = 0$, obtemos

$$0 = -27 + 3t^2,$$

E, portanto,

$$t = \pm 3 \text{ s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, a velocidade é nula tanto 3 s antes como 3 s após o instante $t = 0$.

(c) Descreva o movimento da partícula para $t \geq 0$.

Raciocínio: Precisamos examinar as expressões de $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$.

Em $t = 0$, a partícula está em $x(0) = +4$ m e está se movendo com velocidade $v(0) = -27$ m/s, ou seja, no sentido negativo do eixo x. A aceleração é $a(0) = 0$ porque nesse instante a velocidade da partícula não está variando.

Para $0 < t < 3$ s, a partícula ainda possui velocidade negativa e, portanto, continua a se mover no sentido ne-



FIG. 2-7 *Continuação.*

gativo. Entretanto, a aceleração não mais é igual a zero, e sim crescente e positiva. Como os sinais da velocidade e da aceleração são opostos, o módulo da velocidade da partícula deve estar diminuindo.

De fato, já sabemos que a partícula pára momentaneamente em $t = 3$ s. Nesse instante, a partícula se encontra na maior distância à esquerda da origem da Fig. 2-1. Fazendo $t = 3$ s na expressão de $x(t)$, descobrimos que a posição da partícula nesse instante é $x = -50$ m. A aceleração é ainda positiva.

Para $t > 3$ s, a partícula se move para a direita sobre o eixo. A aceleração permanece positiva e aumenta progressivamente em módulo. A velocidade é agora positiva e seu módulo também aumenta progressivamente.

2-7 | Aceleração Constante: Um Caso Especial

Em muitos tipos de movimento, a aceleração é constante ou aproximadamente constante. Assim, por exemplo, você pode acelerar um carro a uma taxa aproximadamente constante quando a luz de um sinal de trânsito muda de vermelho para verde. Nesse caso, os gráficos de sua posição, velocidade e aceleração se assemelhariam aos da Fig. 2-8. [Note que $a(t)$ na Fig. 2-8*c* é constante, o que requer que $v(t)$ na Fig. 2-8*b* tenha uma inclinação constante.] Mais tarde, quando você freia o carro até parar, a aceleração (ou desaceleração, na linguagem comum) pode também ser aproximadamente constante.

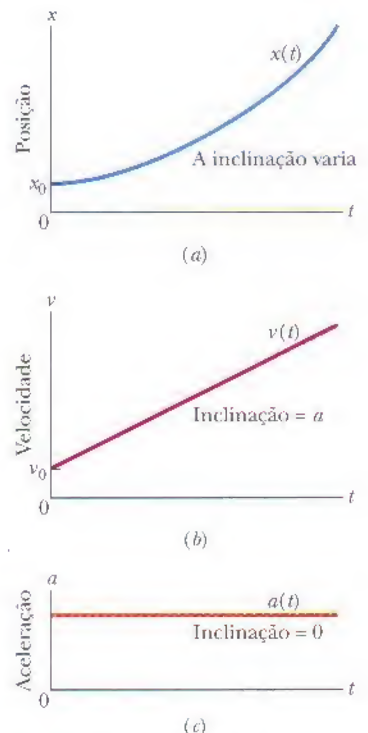


FIG. 2-8 (*a*) A posição $x(t)$ de uma partícula que se move com aceleração constante. (*b*) A velocidade da partícula, $v(t)$, dada em cada ponto pela inclinação da curva de $x(t)$. (*c*) A aceleração (constante) da partícula, igual à inclinação (constante) da curva de $v(t)$.

Esses casos são tão freqüentes que foi formulado um conjunto especial de equações para lidar com eles. Uma forma de obter essas equações é apresentada nesta seção. Uma segunda forma será apresentada na próxima seção. Nestas duas seções e mais tarde, quando você trabalhar na solução dos problemas, lembre-se de que *essas soluções são válidas apenas quando a aceleração é constante (ou em situações nas quais a aceleração pode ser considerada aproximadamente constante).*

Quando a aceleração é constante, a aceleração média e a aceleração instantânea são iguais, e podemos escrever a Eq. 2-7, com algumas mudanças de notação, na forma

$$a = a_{\text{méd}} = \frac{v - v_0}{t - 0},$$

onde v_0 é a velocidade no instante $t = 0$ e v é a velocidade em um instante de tempo posterior t. Explicitando v, temos:

$$v = v_0 + at. \tag{2-11}$$

Como verificação, note que esta equação se reduz a $v = v_0$ para $t = 0$, como era se de esperar. Como verificação adicional, vamos calcular a derivada da Eq. 2-11. O resultado é $dv/dt = a$, o que corresponde à definição de a. A Fig. 2-8*b* mostra o gráfico da Eq. 2-11, a função $v(t)$; a função é linear e, portanto, seu gráfico é uma linha reta.

De maneira análoga, podemos escrever a Eq. 2-2 (com algumas mudanças na notação) na forma

$$v_{méd} = \frac{x - x_0}{t - 0}$$

o que nos dá

$$x = x_0 + v_{méd}t, \quad (2\text{-}12)$$

onde x_0 é a posição da partícula em $t = 0$ e $v_{méd}$ é a velocidade média entre $t = 0$ e um instante de tempo posterior t.

Para a função velocidade linear da Eq. 2-11, a velocidade *média* em qualquer intervalo de tempo (de $t = 0$ a um instante posterior t, digamos) é a média aritmética da velocidade no início do intervalo (v_0) com a velocidade no final do intervalo (v). Para o intervalo de $t = 0$ até um instante posterior t, portanto, a velocidade média é

$$v_{méd} = \tfrac{1}{2}(v_0 + v). \quad (2\text{-}13)$$

Substituindo v pelo seu valor, dado pela Eq. 2-11, obtemos, agrupando os termos,

$$v_{méd} = v_0 + \tfrac{1}{2}at. \quad (2\text{-}14)$$

Finalmente, substituindo a Eq. 2-14 na Eq. 2-12, obtemos:

$$x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2. \quad (2\text{-}15)$$

Como verificação, note que esta equação se reduz a $x = x_0$ para $t = 0$, como era de se esperar. Como verificação adicional, vamos calcular a derivada da Eq. 2-15. O resultado é a Eq. 2-11, como era de se esperar. A Fig. 2-8*a* mostra o gráfico da Eq. 2-15; como a função é do segundo grau, o gráfico não é uma linha reta.

As Eqs. 2-11 e 2-15 são as *equações básicas do movimento com aceleração constante*; podem ser usadas para resolver qualquer problema deste livro que envolva uma aceleração constante. Entretanto, é possível deduzir outras equações que podem ser úteis em situações específicas. Observe que um problema com aceleração constante pode envolver até cinco grandezas: $x - x_0$, v, t, a e v_0. Normalmente, uma dessas grandezas *não está* envolvida no problema, *nem como dado, nem como incógnita*. São fornecidas três das grandezas restantes e o problema consiste em determinar a quarta.

As Eqs. 2-11 e 2-15 contêm, cada uma, quatro dessas grandezas, mas não as mesmas quatro. Na Eq. 2-11, a grandeza ausente é o deslocamento $x - x_0$; na Eq. 2-15, é a velocidade v. As duas equações também podem ser combinadas de três maneiras diferentes para produzir três novas equações, cada uma das quais envolve quatro grandezas diferentes. Em primeiro lugar, podemos eliminar t para obter

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \quad (2\text{-}16)$$

Esta equação é útil se não conhecemos t e não precisamos determinar o seu valor. Em segundo lugar, podemos eliminar a aceleração a, combinando as Eqs. 2-11 e 2-15 para obter uma equação em que a não aparece:

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t. \quad (2\text{-}17)$$

Finalmente, podemos eliminar v_0, obtendo

$$x - x_0 = vt - \tfrac{1}{2}at^2. \quad (2\text{-}18)$$

Note a diferença sutil entre esta equação e a Eq. 2-15. Uma envolve a velocidade inicial v_0; a outra envolve a velocidade v no instante t.

A Tabela 2-1 mostra as equações básicas do movimento com aceleração constante (Eqs. 2-11 e 2-15), assim como as equações especiais que deduzimos. Para resolver um problema simples envolvendo aceleração constante, em geral é possível

usar uma equação desta lista (*se* você puder consultar a lista). Escolha uma equação para a qual a única variável desconhecida é a variável pedida no problema. Um plano mais simples é memorizar apenas as Eqs. 2-11 e 2-15 e montar com elas um sistema de equações, caso isso seja necessário.

TESTE 4 As equações a seguir fornecem a posição $x(t)$ de uma partícula em quatro casos: (1) $x = 3t - 4$; (2) $x = -5t^3 + 4t^2 + 6$; (3) $x = 2/t^2 - 4/t$; (4) $x = 5t^2 - 3$. Em que caso(s) as equações da Tabela 2-1 podem ser aplicadas?

TABELA 4-1

Equações do Movimento com Aceleração Constante[a]

Número da Equação	Equação	Grandeza que Falta
2-11	$v = v_0 + at$	$x - x_0$
2-15	$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v
2-16	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t
2-17	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a
2-18	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0

[a]Certifique-se de que a aceleração é constante antes de usar as equações desta tabela.

Exemplo 2-5

A cabeça de um pica-pau está se movendo para a frente com uma velocidade de 7,49 m/s quando o bico faz contato com um tronco de árvore. O pico pára depois de penetrar 1,87 mm no tronco. Determine o módulo da aceleração, em unidades de g, supondo que ela é constante.

IDÉIA-CHAVE Podemos usar as equações de velocidade constante; em particular, podemos usar a Eq. 2-16 $[v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)]$, que relaciona a velocidade ao deslocamento.

Cálculos: Como a cabeça do pica-pau pára, a velocidade final é $v = 0$. A velocidade inicial é $v_0 = 7{,}49$ m/s, e o deslocamento durante a aceleração constante é $x - x_0 = 1{,}87 \times 10^{-3}$ m. Substituindo esses valores na Eq. 2-16, obtemos

$$0^2 = (7{,}49 \text{ m/s})^2 + 2a(1{,}87 \times 10^{-3} \text{ m}),$$

$$a = 1{,}500 \times 10^4 \text{ m/s}^2.$$

Dividindo por $g = 9{,}8$ m/s^2 e tomando o valor absoluto, descobrimos que o módulo da aceleração da cabeça é

$$a = (1{,}53 \times 10^3)g. \qquad \text{(Resposta)}$$

Comentário: Esta aceleração típica da cabeça de um pica-pau é aproximadamente 70 vezes maior que a aceleração do coronel Stapp na Fig. 2-7, e certamente seria mortal para um ser humano. A capacidade de um pica-pau de suportar acelerações tão elevadas ainda não foi bem explicada, mas existem duas teorias principais. (1) O movimento da cabeça do pica-pau é quase retilíneo. Alguns pesquisadores acreditam que uma concussão pode acontecer nos seres humanos e nos animais quando a cabeça gira muito depressa em torno do pescoço (e do tronco cerebral), mas é menos provável em um movimento retilíneo. (2) O cérebro do pica-pau está tão firmemente preso ao crânio que as duas estruturas se movem em uníssono, o que minimiza os efeitos da aceleração.

Exemplo 2-6 Aumente sua capacidade

A Fig. 2-9 mostra a velocidade v de uma partícula em função da posição enquanto ela se move ao longo do eixo x com aceleração constante. Qual é a velocidade da partícula no ponto $x = 0$?

IDÉIA-CHAVE Podemos usar as equações de aceleração constante; em particular, podemos usar a Eq. 2-16 $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$, que relaciona a velocidade à posição.

Primeira tentativa: Normalmente estamos interessados em usar uma equação que contenha a variável pedida. Na Eq. 2-16 podemos dizer que $x_0 = 0$ e que v_0 é a variável pedida. Para determinar o valor de v_0, precisamos conhecer os valores de v e x no mesmo ponto. O gráfico nos permite determinar dois pares de valores para v e x: (1) $v = 8$ m/s e $x = 20$ m; (2) $v = 0$ e $x = 70$ m. Usando o primeiro par, podemos escrever:

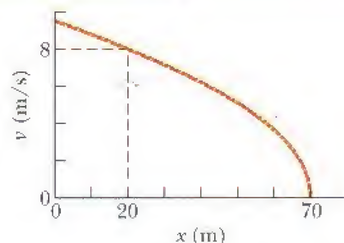


FIG. 2-9 Velocidade de uma partícula em função da posição.

$$(8 \text{ m/s})^2 = v_0^2 + 2a(20 \text{ m} - 0), \qquad (2\text{-}19)$$

Entretanto, não podemos usar a Eq. (2-19) para calcular o valor de v_0, já que não conhecemos o valor de a.

Segunda tentativa: em vez de tentarmos determinar diretamente a variável pedida, vamos aplicar a Eq. 2-16 aos dois pontos conhecidos chamando de $v_0 = 8$ m/s, $x_0 = 20$ m o primeiro par de valores e de $v = 0$ m/s, $x = 70$ m o segundo par. Nesse caso, podemos escrever:

$$(0 \text{ m/s})^2 = (8 \text{ m/s})^2 + 2a(70 \text{ m} - 20 \text{ m}),$$

o que nos dá $a = -0{,}64$ m/s^2. Substituindo este valor na Eq. 2-19 e explicitando v_0 (a velocidade associada à posição $x = 0$), obtemos

$$v_0 = 9{,}5 \text{ m/s.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Comentário: Alguns problemas envolvem uma equação que inclui a variável pedida. Os problemas mais difíceis são aqueles que exigem o uso de uma equação que não inclui a variável pedida, mas fornece um valor necessário para determiná-la. Às vezes, este tipo de abordagem exige *coragem*, já que se trata de uma solução indireta. A solução de qualquer tipo de problema, seja físico ou social, requer uma certa dose de prática.

2-8 | Mais sobre Aceleração Constante*

As duas primeiras equações da Tabela 2-1 são as equações básicas a partir das quais as outras podem ser deduzidas. Essas duas equações podem ser obtidas por integração da aceleração com a condição de que a seja uma constante. Para obter a Eq. 2-11, escrevemos a definição de aceleração (Eq. 2-8) na forma

$$dv = a\,dt.$$

Em seguida, escrevemos a *integral indefinida* (ou *antiderivada*) em ambos os lados da equação:

$$\int dv = \int a\,dt.$$

Como a aceleração a é constante, pode ser colocada do lado de fora do sinal de integração. Nesse caso, temos:

$$\int dv = a \int dt$$

ou

$$v = at + C. \qquad (2\text{-}20)$$

Para determinar a constante de integração C, fazemos $t = 0$, instante no qual $v = v_0$. Substituindo esses valores na Eq. 2-20 (que é válida para qualquer valor de t, incluindo $t = 0$), obtemos

$$v_0 = (a)(0) + C = C.$$

Substituindo este valor na Eq. 2-20, obtemos a Eq. 2-11.

Para demonstrar a Eq. 2-15, escrevemos a definição de velocidade (Eq. 2-4) na forma

$$dx = v\,dt$$

e integramos ambos os membros desta equação para obter

$$\int dx = \int v\,dt.$$

Substituindo v pelo seu valor, dado pela Eq. 2-11, temos:

$$\int dx = \int (v_0 + at)\,dt.$$

Como v_0 e a são constantes, podemos escrever

$$\int dx = v_0 \int dt + a \int t\,dt.$$

Integrando, obtemos

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 + C', \qquad (2\text{-}21)$$

*Esta seção se destina a alunos que conhecem cálculo integral.

onde C' é outra constante de integração. No instante $t = 0$, temos $x = x_0$. Substituindo esses valores na Eq. 2-21, obtemos $x_0 = C'$. Substituindo C' por x_0 na Eq. 2-21, obtemos a Eq. 2-15.

2-9 | Aceleração em Queda Livre

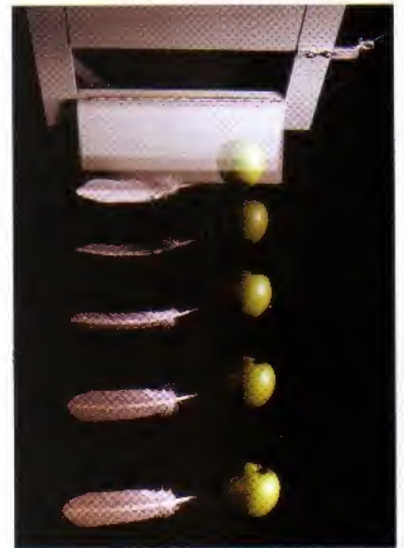


FIG. 2-10 Uma pena e uma maçã em queda livre no vácuo sofrem a mesma aceleração g, que aumenta a distância entre imagens sucessivas. (*Jim Sugar/Corbis Images.*)

Se você arremessasse um objeto para cima ou para baixo e pudesse de alguma forma eliminar o efeito do ar sobre o movimento, observaria que o objeto sofre uma aceleração constante para baixo, conhecida como **aceleração em queda livre**, cujo módulo é representado pela letra g. O valor desta aceleração não depende das características do objeto, como massa, densidade e forma; ela é a mesma para todos os objetos.

A Fig. 2-10 mostra dois exemplos de aceleração em queda livre através de uma série de fotos estroboscópicas de uma pena e de uma maçã. Enquanto esses objetos caem, sofrem uma aceleração para baixo, que nos dois casos é igual a g. Assim, suas velocidades aumentam com a mesma taxa, e eles caem juntos.

O valor de g varia ligeiramente com a latitude e com a altitude. No nível do mar e em latitudes médias o valor é 9,8 m/s^2, que é o valor que você deve usar como número exato nos problemas deste livro, a menos que seja especificado em contrário.

As equações de movimento da Tabela 2-1 para aceleração constante também se aplicam à queda livre nas proximidades da superfície da Terra, ou seja, se aplicam a um objeto que esteja descrevendo uma trajetória vertical, para cima ou para baixo, contanto que os efeitos do ar possam ser desprezados. Observe, porém, que no caso da queda livre (1) a direção do movimento é ao longo de um eixo y vertical e não ao longo de um eixo x horizontal, com o sentido positivo de y apontando para cima (isto será importante em capítulos subseqüentes, em que examinaremos movimentos simultâneos nas direções horizontal e vertical); (2) a aceleração em queda livre é negativa, ou seja, para baixo, em direção ao centro da Terra, e, portanto, tem o valor $-g$ nas equações.

A aceleração em queda livre nas proximidades da superfície da Terra é $a = -g = -9{,}8$ m/s^2 e o *módulo* da aceleração é $g = 9{,}8$ m/s^2. Não substitua g por $-9{,}8$ m/s^2 (e sim por 9,8 m/s^2).

Suponha que você arremesse um tomate verticalmente para cima com uma velocidade inicial (positiva) v_0 e o apanhe quando volta ao nível inicial. Durante a *trajetória em queda livre* (do instante imediatamente após o lançamento ao instante imediatamente antes de ser apanhado) as equações da Tabela 2-1 se aplicam ao movimento do tomate. A aceleração é sempre $a = -g = -9{,}8$ m/s^2, negativa e, portanto, dirigida para baixo. A velocidade, entretanto, varia, como mostram as Eqs. 2-11 e 2-16: na subida, a velocidade é positiva e o módulo diminui até se tornar momentaneamente igual a zero. Nesse instante, o tomate atinge a altura máxima. Na descida, o módulo da velocidade (agora negativa) cresce.

TESTE 5 (a) Se você arremessa uma bola verticalmente para cima, qual é o sinal do deslocamento da bola durante a subida, desde o ponto inicial até o ponto mais alto da trajetória? (b) Qual é o sinal do deslocamento durante a descida, desde o ponto mais alto da trajetória até o ponto inicial? (c) Qual é a aceleração da bola no ponto mais alto da trajetória?

Exemplo 2-7

Em 26 de setembro de 1993, Dave Munday foi até o lado canadense das cataratas do Niágara com uma bola de aço, equipada com um furo para entrada de ar, e caiu 48 m até a água (e as pedras). Suponha que a velocidade inicial era nula e despreze o efeito do ar sobre a bola durante a queda.

(a) Quanto tempo durou a queda de Munday?

IDÉIA-CHAVE Como a queda de Munday foi uma queda livre, as equações de aceleração constante da Tabela 2-1 podem ser usadas.

Cálculos: Vamos supor que a queda se deu ao longo do eixo y, com $y = 0$ no ponto de partida e o sentido positivo para cima (Fig. 2-11). Nesse caso, a aceleração é $a = -g$ ao longo do eixo y e o nível da água está em $y = -48$ m (negativo porque está abaixo de $y = 0$). Suponha que a queda começa no instante $t = 0$, com uma velocidade inicial $v_0 = 0$.

Consultando a Tabela 2-1, escolhemos a Eq. 2-15 (substituindo x por y) porque ela contém o tempo pedido t e os valores das outras variáveis são conhecidos. Temos:

$$y - y_0 = v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$-48\text{ m} - 0 = 0t - \tfrac{1}{2}(9{,}8\text{ m/s}^2)t^2,$$
$$t^2 = 48/4{,}9,$$
$$t = 3{,}1\text{ s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Note que o deslocamento de Munday, $y - y_0$, é negativo, pois sua trajetória foi no *sentido negativo* do eixo y (ele não caiu para cima!). Observe também que 48/4,9 possui duas raízes quadradas: 3,1 e –3,1. Escolhemos a raiz positiva porque Munday obviamente atingiu a superfície da água *depois* de ter começado a cair em $t = 0$.

t (s)	y (m)	v (m/s)	a (m/s²)
0	0	0	–9,8
1	–4,9	–9,8	–9,8
2	–19,6	–19,6	–9,8
3	–44,1	–29,4	–9,8
	–48,0		–9,8

FIG. 2-11 Posição, velocidade e aceleração de um objeto em queda livre, no caso a bola de aço usada por Dave Munday nas Cataratas do Niágara.

(b) Munday podia contar os três segundos de queda livre, mas não podia ver o quanto tinha caído a cada segundo. Determine sua posição no final de cada segundo de queda.

Cálculos: Usamos novamente a Eq. 2-15, mas agora substituímos, sucessivamente, os valores $t = 1{,}0$ s, 2,0 s e 3,0 s e calculamos a posição y de Munday para esses instantes de tempo. Os resultados aparecem na Fig. 2-11.

(c) Qual era a velocidade de Munday ao atingir a superfície da água?

Cálculo: Para obter a velocidade a partir dos dados originais sem usar o tempo de queda calculado no item (a), escrevemos a Eq. 2-16 com y no lugar de x e substituímos os valores conhecidos:

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0) = 0 - (2)(9{,}8\text{ m/s}^2)(-48\text{ m}),$$

e, portanto, $v = -30{,}67\text{ m/s} \approx -31\text{ m/s} = -110\text{ km/h}$. (Resposta)

Escolhemos a raiz negativa aqui porque a velocidade era no sentido negativo.

(d) Qual era a velocidade de Munday no final de cada segundo? Ele sentiu o aumento de velocidade?

Cálculos: Para obter a velocidade a partir dos dados originais sem usar as posições calculadas no item (b), fazemos $a = -g$ na Eq. 2-11 e substituímos, sucessivamente, os valores $t = 1{,}0$ s, 2,0 s e 3,0 s. Por exemplo:

$$v = v_0 - gt$$
$$= 0 - (9{,}8\text{ m/s}^2)(1{,}0\text{ s}) = -9{,}8\text{ m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Os outros resultados aparecem na Fig. 2-11.

Enquanto estava em queda livre, Munday não podia sentir o aumento da velocidade porque a aceleração durante a queda tinha o valor constante de $-9{,}8$ m/s², como mostra a última coluna da Fig. 2-11. Naturalmente, ele teve perfeita noção do momento em que a esfera atingiu a água, já que nesse ponto a aceleração mudou bruscamente. (Munday sobreviveu à queda, mas teve que pagar uma pesada multa por sua ação temerária.)

Exemplo 2-8

Na Fig. 2-12, um lançador arremessa uma bola de beisebol para cima, ao longo do eixo y, com uma velocidade inicial de 12 m/s.

(a) Quanto tempo a bola leva para atingir a altura máxima?

IDÉIA-CHAVE (1) Entre o instante em que a bola é lançada e o instante em que volta ao ponto de partida sua aceleração é a aceleração em queda livre, $a = -g$. Como a aceleração é constante, podemos usar as equações da Tabela 2-1. (2) A velocidade v no instante em que a bola atinge a altura máxima é 0.

Cálculo: Como conhecemos v, a e a velocidade inicial $v_0 =$ 12 m/s e estamos interessados em determinar o valor de t, escolhemos a Eq. 2-12, que contém essas quatro variáveis. Explicitando t, obtemos:

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 12\text{ m/s}}{-9{,}8\text{ m/s}^2} = 1{,}2\text{ s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

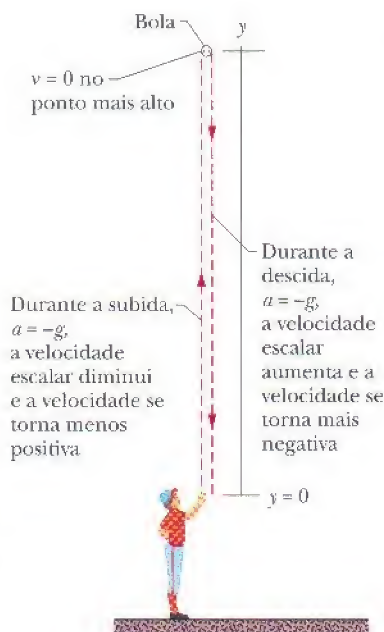


FIG. 2-12 Um lançador arremessa uma bola de beisebol para cima. As equações de queda livre se aplicam tanto a objetos que estão subindo como a objetos que estão caindo, desde que a influência do ar possa ser desprezada.

(b) Qual é a altura máxima alcançada pela bola em relação ao ponto de lançamento?

Cálculo: Podemos tomar o ponto de lançamento da bola como sendo $y_0 = 0$. Nesse caso, podemos escrever a Eq. 2-16 com y no lugar de x, fazer $y - y_0 = y$ e $v = 0$ (na altura máxima) e explicitar y. O resultado é

$$y = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0-(12 \text{ m/s})^2}{2(-9{,}8 \text{ m/s}^2)} = 7{,}3 \text{ m}. \quad \text{(Resposta)}$$

(c) Quanto tempo a bola leva para atingir um ponto 5,0 m acima do ponto inicial?

Cálculos: Como conhecemos v_0, $a = -g$ e o deslocamento $y - y_0 = 5{,}0$ m e queremos determinar t, escolhemos a Eq. 2-15. Substituindo x por y e fazendo $y_0 = 0$, obtemos

$$y = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2,$$

ou $$5{,}0 \text{ m} = (12 \text{ m/s})t - (\tfrac{1}{2})(9{,}8 \text{ m/s}^2)t^2.$$

Omitindo temporariamente as unidades (depois de observar que são coerentes), podemos escrever esta equação na forma

$$4{,}9t^2 - 12t + 5{,}0 = 0.$$

Resolvendo esta equação do segundo grau, obtemos

$$t = 0{,}53 \text{ s e } t = 1{,}9 \text{ s}. \quad \text{(Resposta)}$$

Existem dois tempos possíveis! Isso na verdade não chega a ser uma surpresa, pois a bola passa duas vezes pelo ponto $y = 5{,}0$ m, uma vez na subida e outra na descida.

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 6:* *Significado do Sinal Negativo Nos Exemplos 2-7 e 2-8 definimos um eixo vertical (o eixo y) e escolhemos (arbitrariamente) o sentido para cima como positivo. Em seguida, escolhemos a origem do eixo y (ou seja, a posição $y = 0$) mais apropriada para o problema. No Exemplo 2-7 a origem foi o alto das cataratas, enquanto no Exemplo 2-8 foi a mão do lançador. Um valor negativo de y significa que o corpo está abaixo do ponto escolhido como origem. Uma velocidade negativa significa que o corpo está se deslocando no sentido negativo do eixo y, ou seja, para baixo. Isto é verdade qualquer que seja a posição do corpo.

Consideramos a aceleração como negativa ($-9{,}8$ m/s^2) em todos os problemas que envolvem a queda de corpos. Uma aceleração negativa significa que, com o passar do tempo, a velocidade do corpo se torna menos positiva ou mais negativa. Isto é verdade qualquer que seja a posição do corpo e qualquer que seja o valor ou o sentido de sua velocidade. No Exemplo 2-8, a aceleração da bola é negativa (para baixo) durante todo o trajeto, independentemente do fato de a bola estar subindo ou descendo.

Tática 7:* *Respostas Inesperadas A matemática freqüentemente produz respostas que talvez não estivéssemos esperando, como no item (c) do Exemplo 2-8. Se você obtiver um número maior de respostas do que o previsto, não despreze cegamente as que parecem não ser apropriadas. Examine-as atentamente para verificar se possuem algum significado físico. Se a variável é o tempo, mesmo um valor negativo pode ter um significado físico; afinal, um tempo negativo significa simplesmente um tempo anterior a $t = 0$, o instante (arbitrário) no qual você decidiu ligar o seu cronômetro.

2-10 | Integração de Gráficos em Análise de Movimento

Quando temos o gráfico da aceleração de um objeto em função do tempo podemos integrar o gráfico para obter a velocidade do objeto em qualquer instante dado. Como a aceleração a é definida em termos da velocidade como $a = dv/dt$, o Teorema Fundamental do Cálculo nos diz que

$$v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a \, dt. \quad \text{(2-22)}$$

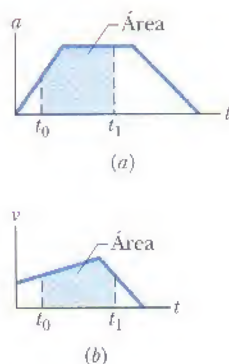


FIG. 2-13 Área entre uma curva e o eixo dos tempos, do instante t_0 ao instante t_1, indicada (*a*) em um gráfico da aceleração *a* em função do tempo *t* e (*b*) em um gráfico da velocidade *v* em função do tempo *t*.

O lado direito desta equação é uma integral definida (fornece um resultado numérico em vez de uma função), v_0 é a velocidade no instante t_0 e v_1 é a velocidade em um instante posterior t_1. A integral definida pode ser calculada a partir do gráfico de $a(t)$, como na Fig. 2-13*a*. Em particular,

$$\int_{t_0}^{t_1} a\,dt = \begin{pmatrix}\text{área entre a curva de aceleração}\\ \text{e o eixo dos tempos, de } t_0 \text{ a } t_1\end{pmatrix} \tag{2-23}$$

Se uma unidade de aceleração é 1 m/s² e uma unidade de tempo é 1 s, a unidade de área no gráfico é

$$(1\ \text{m/s}^2)(1\ \text{s}) = 1\ \text{m/s},$$

que é (como devia ser) uma unidade de velocidade. Quando a curva da aceleração está acima do eixo do tempo, a área é positiva; quando a curva está abaixo do eixo do tempo, a área é negativa.

Da mesma forma, como a velocidade v é definida em termos da posição x como $v = dx/dt$,

$$x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} v\,dt, \tag{2-24}$$

onde x_0 é a posição no instante t_0 e x_1 é a posição no instante t_1. A integral definida no lado direito da Eq. 2-24 pode ser calculada a partir do gráfico de $v(t)$, como mostra a Fig. 2-13*b*. Em particular,

$$\int_{t_0}^{t_1} v\,dt = \begin{pmatrix}\text{área entre a curva de velocidade}\\ \text{e o eixo dos tempos, de } t_0 \text{ a } t_1\end{pmatrix}. \tag{2-25}$$

Se a unidade de velocidade é 1 m/s e a unidade de tempo é 1 s, a unidade de área no gráfico é

$$(1\ \text{m/s})(1\ \text{s}) = 1\ \text{m},$$

que é (como devia ser) uma unidade de posição e deslocamento. A questão de essa área ser positiva ou negativa é determinada da mesma forma que para a curva $a(t)$ da Fig. 2-13*a*.

Exemplo 2-9

Lesões do pescoço causadas pelo "efeito chicote" são freqüentes em colisões traseiras, em que um automóvel é atingido por trás por outro automóvel. Na década de 1970 os pesquisadores concluíram que a lesão ocorria porque a cabeça do ocupante era jogada para trás por cima do banco quando o carro era empurrado para a frente. Como resultado desta descoberta, foram instalados encostos de cabeça nos carros, mas as lesões de pescoço nas colisões traseiras continuaram a acontecer.

Em um teste recente para estudar as lesões do pescoço em colisões traseiras, um voluntário foi preso por cintos a um assento, que foi movimentado bruscamente para simular uma colisão na qual o carro de trás estava se movendo a 10,5 km/h. A Fig. 2-14*a* mostra a aceleração do tronco e da cabeça do voluntário durante a colisão, que começa no instante $t = 0$. O início da aceleração do tronco sofreu um retardo de 40 ms, tempo que o encosto do assento levou para ser comprimido contra o voluntário. A aceleração da cabeça sofreu um retardo de mais 70 ms. Qual era a velocidade do tronco quando a cabeça começou a acelerar?

IDÉIA-CHAVE Podemos determinar a velocidade escalar do tronco em qualquer instante calculando a área sob a curva da aceleração do tronco, $a(t)$.

Cálculos: Sabemos que a velocidade inicial do tronco é $v_0 = 0$ no instante $t_0 = 0$, ou seja, no início da "colisão". Queremos obter a velocidade do tronco v_1 no instante $t_1 = 110$ ms, ou seja, quando a cabeça começa a acelerar.

Combinando as Eqs. 2-22 e 2-23, podemos escrever:

$$v_1 - v_0 = \begin{pmatrix}\text{área entre a curva de aceleração}\\ \text{e o eixo dos tempos, de } t_0 \text{ a } t_1\end{pmatrix}. \tag{2-26}$$

Por conveniência, vamos separar a área em três regiões (Fig. 2-14*b*). De 0 a 40 ms, a região *A* tem área nula:

$$\text{área}_A = 0.$$

De 40 ms a 100 ms, a região *B* tem a forma de um triângulo cuja área é

$$\text{área}_B = \tfrac{1}{2}(0{,}060\ \text{s})(50\ \text{m/s}^2) = 1{,}5\ \text{m/s}.$$

De 100 ms a 110 ms, a região C tem a forma de um retângulo cuja área é

$$\text{área}_C = (0{,}010\ \text{s})(50\ \text{m/s}^2) = 0{,}50\ \text{m/s}.$$

Substituindo esses valores e fazendo $v_0 = 0$ na Eq. 2-26, obtemos:

$$v_1 - 0 = 0 + 1{,}5\ \text{m/s} + 0{,}50\ \text{m/s},$$

ou $$v_1 = 2{,}0\ \text{m/s} = 7{,}2\ \text{km/h}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Comentários: Quando a cabeça está começando a se mover para a frente, o tronco já tem uma velocidade de 7,2 km/h. Os pesquisadores afirmam que é esta diferença de velocidade durante uma colisão traseira que causa lesões do pescoço. O movimento brusco da cabeça para trás acontece depois e pode agravar a lesão, especialmente se não existir um encosto para a cabeça.

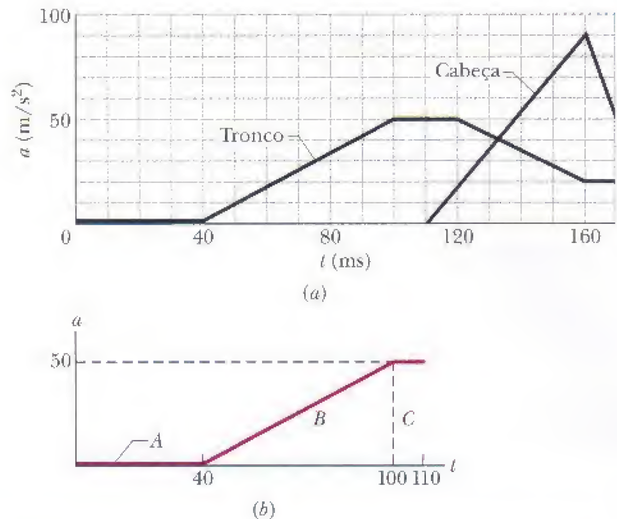


FIG. 2-14 (a) Curva de $a(t)$ para o tronco e a cabeça de um voluntário em uma simulação de uma colisão traseira. (b) Separação da região entre a curva e o eixo dos tempos para calcular a área.

REVISÃO E RESUMO

Posição A *posição* x de uma partícula em um eixo x localiza a partícula em relação à **origem**, ou ponto zero, do eixo. A posição é positiva ou negativa, dependendo do lado da origem em que se encontra a partícula, ou zero, se a partícula se encontra na origem. O **sentido positivo** de um eixo é o sentido em que os números positivos aumentam; o sentido oposto é o **sentido negativo**.

Deslocamento O *deslocamento* Δx de uma partícula é a variação de sua posição:

$$\Delta x = x_2 - x_1. \qquad (2\text{-}1)$$

O deslocamento é uma grandeza vetorial. É positivo se a partícula se move no sentido positivo do eixo x, e negativo se a partícula se move no sentido oposto.

Velocidade Média Quando uma partícula se desloca de uma posição x_1 para uma posição x_2 durante um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, sua velocidade média durante esse intervalo é dada por

$$v_{\text{méd}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \qquad (2\text{-}2)$$

O sinal algébrico de $v_{\text{méd}}$ indica o sentido do movimento ($v_{\text{méd}}$ é uma grandeza vetorial). A velocidade média não depende da distância que uma partícula percorre, mas apenas das posições inicial e final.

Em um gráfico de x em função de t, a velocidade média em um intervalo de tempo Δt é igual à inclinação da linha reta que une os pontos da curva que representam as duas extremidades do intervalo.

Velocidade Escalar Média A *velocidade escalar média* $s_{\text{méd}}$ de uma partícula durante um intervalo de tempo Δt depende da distância total percorrida pela partícula nesse intervalo:

$$s_{\text{méd}} = \frac{\text{distância total}}{\Delta t}. \qquad (2\text{-}3)$$

Velocidade Instantânea A *velocidade instantânea* (ou simplesmente **velocidade**) v de uma partícula é dada por

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \qquad (2\text{-}4)$$

onde Δx e Δt são definidos pela Eq. 2-2. A velocidade instantânea (em um certo instante de tempo) é igual à inclinação (nesse mesmo instante) do gráfico de x em função de t. A **velocidade escalar** é o módulo da velocidade instantânea.

Aceleração Média A *aceleração média* é a razão entre a variação em velocidade Δv e o intervalo de tempo Δt no qual essa variação ocorre:

$$a_{\text{méd}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \qquad (2\text{-}7)$$

O sinal algébrico indica o sentido de $a_{\text{méd}}$.

Aceleração Instantânea A *aceleração instantânea* (ou simplesmente **aceleração**) a é igual à derivada primeira em relação ao tempo da velocidade $v(t)$ ou à derivada segunda da posição $x(t)$ em relação ao tempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \qquad (2\text{-}8, 2\text{-}9)$$

Em um gráfico de v em função de t, a aceleração a em qualquer instante t é igual à inclinação da curva no ponto que representa t.

Aceleração Constante As cinco equações da Tabela 2-1 descrevem o movimento de uma partícula com aceleração constante:

$$v = v_0 + at, \tag{2-11}$$

$$x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2, \tag{2-15}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0), \tag{2-16}$$

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2}(v_0 t + v)t, \tag{2-17}$$

$$x - x_0 = vt - \tfrac{1}{2}at^2. \tag{2-18}$$

Estas equações *não são válidas* quando a aceleração não é constante.

Aceleração em Queda Livre Um exemplo importante de movimento retilíneo com aceleração constante é o de um objeto subindo ou caindo livremente nas proximidades da superfície da Terra. As equações para aceleração constante podem ser usadas para descrever este movimento, mas devemos fazer duas mudanças na notação: (1) o movimento é descrito em relação a um eixo vertical y, com $+y$ orientado verticalmente *para cima*; (2) a aceleração a é substituída por $-g$, onde g é o módulo da aceleração em queda livre. Perto da superfície da Terra, $g = 9,8$ m/s^2.

PERGUNTAS

1 A Fig. 2-15 mostra as trajetórias de quatro objetos de um ponto inicial a um ponto final, todas no mesmo intervalo de tempo. As trajetórias passam por três linhas retas igualmente espaçadas. Coloque as trajetórias na ordem (a) da velocidade média dos objetos e (b) da velocidade escalar média dos objetos, começando pela maior.

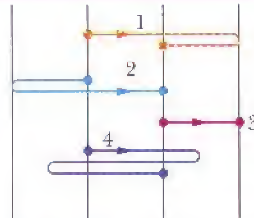


FIG. 2-15 Pergunta 1.

2 A Fig. 2-16 é um gráfico da posição de uma partícula em um eixo x em função do tempo. (a) Qual é o sinal da posição da partícula no instante $t = 0$? A velocidade da partícula é positiva, negativa ou nula (b) em $t = 1$ s, (c) em $t = 2$ s e (d) em $t = 3$ s? (e) Quantas vezes a partícula passa pelo ponto $x = 0$?

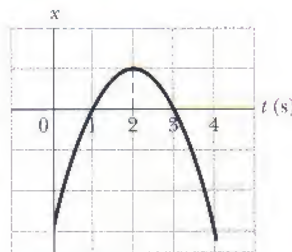


FIG. 2-16 Pergunta 2.

3 A Fig. 2-17 mostra a velocidade de uma partícula que se move em um eixo x. Determine (a) o sentido inicial e (b) o sentido final do movimento. (c) A velocidade da partícula se anula em algum instante? (d) A aceleração é positiva ou negativa? (e) A aceleração é constante ou variável?

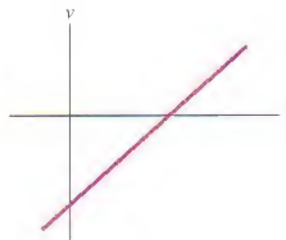


FIG. 2-17 Pergunta 3.

4 A Fig. 2-18 mostra a aceleração $a(t)$ de um chihuahua que persegue um pastor alemão sobre um eixo. Em qual dos períodos de tempo indicados o chihuahua se move com velocidade constante?

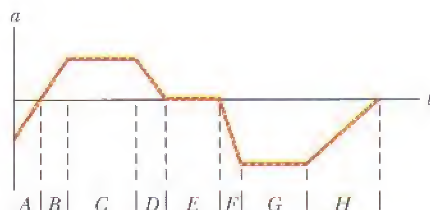


FIG. 2-18 Pergunta 4.

5 A Fig. 2-19 mostra a velocidade de uma partícula que se move em um eixo. O ponto 1 é o ponto mais alto da curva; o ponto 4 é o ponto mais baixo; os pontos 2 e 6 estão na mesma altura. Qual é o sentido do movimento (a) no instante $t = 0$ e (b) no ponto 4? (c) Em qual dos seis pontos numerados a partícula inverte o sentido de movimento? (d) Coloque os seis pontos na ordem do módulo da aceleração, começando pelo maior.

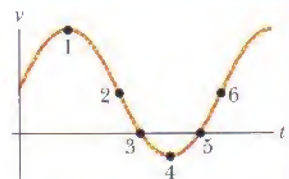


FIG. 2-19 Pergunta 5.

6 As seguintes equações fornecem a velocidade $v(t)$ de uma partícula em quatro situações: (a) $v = 3$; (b) $v = 4t^2 + 2t - 6$; (c) $v = 3t - 4$; (d) $v = 5t^2 - 3$. Em quais destas situações as equações da Tabela 2-1 podem ser aplicadas?

7 Na Fig. 2-20, uma tangerina é lançada verticalmente para cima e passa por três janelas igualmente espaçadas e de alturas iguais. Coloque as janelas na ordem decrescente (a) da velocidade escalar média da tangerina ao passar por elas, (b) do tempo que a tangerina leva para passar por elas, (c) do módulo da aceleração da tangerina ao passar por elas e (d) da variação Δv da velocidade escalar da tangerina ao passar por elas.

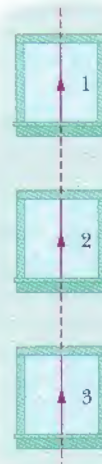


FIG. 2-20 Pergunta 7.

8 Em $t = 0$, uma partícula que se move em um eixo x está na posição $x_0 = -20$ m. Os sinais da velocidade inicial v_0 (no instante t_0) e da aceleração constante a da partícula são, respectivamente, para quatro situações: (1) +, +; (2) +, −; (3) −, +; (4) −, −. Em quais das situações a partícula (a) pára momentaneamente, (b) passa pela origem e (c) não passa pela origem?

9 Debruçado no parapeito de uma ponte, você deixa cair um ovo (com velocidade inicial nula) e atira um segundo ovo para baixo. Qual das curvas da Fig. 2-21 corresponde à velocidade $v(t)$ (a) do ovo que caiu, (b) do ovo que foi atirado? (As curvas A e B são paralelas, assim como as curvas C, D e E e as curvas F e G.)

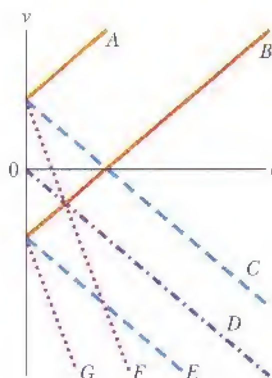


FIG. 2-21 Pergunta 9.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 2-4 Velocidade Média e Velocidade Escalar Média

•1 Um automóvel viaja em uma estrada retilínea por 40 km a 30 km/h. Em seguida, continuando no mesmo sentido, percorre outros 40 km a 60 km/h. (a) Qual é a velocidade média do carro durante este percurso de 80 km? (Suponha que o carro se move no sentido positivo de x.) (b) Qual é a velocidade escalar média? (c) Trace o gráfico de x em função de t e mostre como calcular a velocidade média a partir do gráfico.

•2 Um carro sobe uma ladeira com uma velocidade constante de 40 km/h e desce a ladeira com uma velocidade constante de 60 km/h. Calcule a velocidade escalar média da viagem de ida e volta.

•3 Durante um espirro, os olhos podem se fechar por até 0,50 s. Se você está dirigindo um carro a 90 km/h e espirra, de quanto o carro pode se deslocar até você abrir novamente os olhos?

•4 Em 1992, um recorde mundial de velocidade em uma bicicleta foi estabelecido por Chris Huber. Seu tempo para percorrer um trecho de 200 m foi de apenas 6,509 s, ao final do qual ele comentou: "Cogito ergo zoom!" (Penso, logo corro!). Em 2001, Sam Whittingham quebrou o recorde de Huber em 19 km/h. Qual foi o tempo gasto por Whittingham para percorrer os 200 m?

•5 A posição de um objeto que se move ao longo de um eixo x é dada por $x = 3t - 4t^2 + t^3$, onde x está em metros e t em segundos. Determine a posição do objeto para os seguintes valores de t: (a) 1 s, (b) 2 s, (c) 3 s, (d) 4 s. (e) Qual é o deslocamento do objeto entre $t = 0$ e $t = 4$ s? (f) Qual é a velocidade média para o intervalo de tempo de $t = 2$ s a $t = 4$ s? (g) Faça o gráfico de x em função de t para $0 \leq t \leq 4$ s e indique como a resposta do item (f) pode ser determinada a partir do gráfico.

•6 Calcule a velocidade média nos dois casos seguintes: (a) você caminha 73,2 m a uma velocidade de 1,22 m/s e depois corre 73,2 m a 3,05 m/s em uma pista reta. (b) Você caminha 1,00 min com uma velocidade de 1,22 m/s e depois corre por 1,00 min a 3,05 m/s em uma pista reta. (c) Faça o gráfico de x em função de t nos dois casos e indique como a velocidade média pode ser determinada a partir do gráfico.

••7 Em uma corrida de 1 km, o corredor 1 da raia 1 (com o tempo de 2 min 27,95 s) parece ser mais rápido que o corredor 2 da raia 2 (2 min 28,15 s). Entretanto, o comprimento L_2 da raia 2 pode ser ligeiramente maior que o comprimento L_1 da raia 1. Qual é o maior valor da diferença $L_2 - L_1$ para a qual a conclusão de que o corredor 1 é mais rápido é verdadeira?

••8 Para estabelecer um recorde de velocidade em uma distância d (em linha reta), um carro deve percorrer a distância primeiro em um sentido (em um tempo t_1) e depois no sentido oposto (em um tempo t_2). (a) Para eliminar o efeito do vento e obter a velocidade do carro v_c na ausência de vento, devemos calcular a média aritmética de d/t_1 e d/t_2 (método 1) ou devemos dividir d pela média aritmética de t_1 e t_2? (b) Qual é a diferença percentual dos dois métodos se existe um vento constante na pista e a razão entre a velocidade v_v do vento e a velocidade v_c do carro é 0,0240?

••9 Você tem que dirigir em uma via expressa para se candidatar a um emprego em outra cidade, a uma distância de 300 km. A entrevista foi marcada para as 11:15 h da manhã. Você planeja dirigir a 100 km/h e parte às 8:00 h da manhã para ter algum tempo de sobra. Você dirige na velocidade planejada durante os primeiros 100 km, depois um trecho da estrada em obras o obriga a reduzir a velocidade para 40 km/h por 40 km. Qual a menor velocidade que você deve manter no resto da viagem para chegar a tempo para a entrevista?

••10 *Situação de pânico.* A Fig. 2-22 mostra uma situação na qual muitas pessoas tentam escapar por uma porta de emergência que está trancada. As pessoas se aproximam da porta com uma velocidade $v_s = 3,50$ m/s, têm $d = 0,25$ m de espessura e estão separadas por uma distância $L = 1,75$ m. A Fig. 2-22 mostra a posição das pessoas no instante $t = 0$. (a) Qual é a taxa média de aumento da camada de pessoas que se comprimem contra a porta? (b) Em que instante a espessura da camada chega a 5,0 m? (As respostas mostram com que rapidez uma situação desse tipo pode colocar em risco a vida das pessoas.)

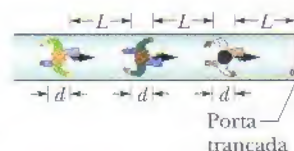


FIG. 2-22 Problema 10.

••11 Dois trens, cada um com velocidade de 30 km/h, trafegam em sentidos opostos na mesma linha férrea retilínea. Um pássaro

capaz de voar a 60 km/h parte da frente de um dos trens, quando eles estão separados por 60 km, e se dirige em linha reta para o outro trem. Ao chegar ao outro trem, o pássaro faz meia-volta e se dirige para o primeiro trem, e assim por diante. (Não temos a menor idéia da *razão* pela qual o pássaro se comporta desta forma.) Qual é a distância total que o pássaro percorre até os trens colidirem?

•••12 *Onda de choque no trânsito.* Quando o trânsito é intenso, uma redução brusca de velocidade pode se propagar como um pulso, denominado *onda de choque*, ao longo de uma fila de carros, no sentido do movimento dos carros, no sentido oposto ou permanecer estacionária. A Fig. 2-23 mostra uma fila de carros regularmente espaçados que estão se movendo a uma velocidade v = 25,00 m/s em direção a uma fila de carros mais lentos, uniformemente espaçados, que estão se movendo a uma velocidade v_l = 5,00 m/s. Suponha que cada carro mais rápido acrescenta um comprimento L = 12,0 m (comprimento do carro mais a distância mínima de segurança) à fila de carros mais lentos ao se juntar à fila, e suponha que reduz bruscamente a velocidade no último momento. (a) Para que distância d entre os carros mais rápidos a onda de choque permanece estacionária? Se a distância é duas vezes maior que este valor, quais são (b) a velocidade e (c) o sentido (o sentido do movimento dos carros ou o sentido contrário) da onda de choque?

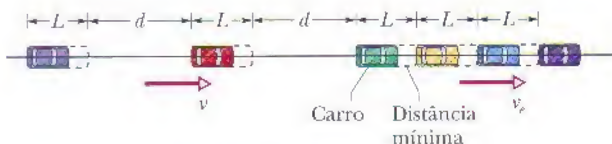


FIG. 2-23 Problema 12.

•••13 Você dirige do Rio a São Paulo metade do *tempo* a 55 km/h e a outra metade a 90 km/h. Na volta, você viaja metade da *distância* a 55 km/h e a outra metade a 90 km/h. Qual é a velocidade escalar média (a) do Rio a São Paulo, (b) de São Paulo ao Rio e (c) na viagem inteira? (d) Qual é a velocidade média na viagem inteira? (e) Plote o gráfico de x em função de t para o item (a), supondo que o movimento ocorre no sentido positivo de x. Mostre como a velocidade média pode ser determinada a partir do gráfico.

seção 2-5 Velocidade Instantânea e Velocidade Escalar Instantânea

•14 A função posição $x(t)$ de uma partícula que está se movendo ao longo do eixo x é $x = 4{,}0 - 6{,}0t^2$, com x em metros e t em segundos. (a) Em que instante e (b) em que posição a partícula pára (momentaneamente)? Em que (c) instante negativo e (d) instante positivo a partícula passa pela origem? (e) Plote o gráfico de x em função de t para o intervalo de –5 s a +5 s. (f) Para deslocar a curva para a direita no gráfico, devemos acrescentar o termo $+20t$ ou o termo $-20t$ a $x(t)$? (g) Essa modificação aumenta ou diminui o valor de x para o qual a partícula pára momentaneamente?

•15 (a) Se a posição de uma partícula é dada por $x = 4 - 12t + 3t^2$ (onde t está em segundos e x em metros), qual é a velocidade da partícula em t = 1 s? (b) O movimento nesse instante é no sentido positivo ou negativo de x? (c) Qual é a velocidade escalar da partícula nesse instante? (d) A velocidade escalar está aumentando ou diminuindo nesse instante? (Tente responder às duas próximas perguntas sem fazer outros cálculos.) (e) Existe algum instante no qual a velocidade se anula? Caso a resposta seja afirmativa, para que valor de t isso acontece? (f) Existe algum instante após t = 3 s no qual a partícula está se movendo no sentido negativo de x? Caso a resposta seja afirmativa, para que valor de t isso acontece?

•16 A posição de um elétron que se move ao longo do eixo x é dada por $x = 16te^{-t}$ m, onde t está em segundos. A que distância está o elétron da origem quando pára momentaneamente?

••17 A posição de uma partícula que se move ao longo do eixo x é dada em centímetros por $x = 9{,}75 + 1{,}50t^3$, onde t está em segundos. Calcule (a) a velocidade média durante o intervalo de tempo de t = 2,00 s a t = 3,00 s; (b) a velocidade instantânea em t = 2,00 s; (c) a velocidade instantânea em t = 3,00 s; (d) a velocidade instantânea em t = 2,50 s; (e) a velocidade instantânea quando a partícula está na metade da distância entre suas posições em t = 2,00 s e t = 3,00 s. (f) Plote o gráfico de x em função de t e indique suas respostas graficamente.

seção 2-6 Aceleração

•18 (a) Se a posição de uma partícula é dada por $x = 20t - 5t^3$, onde x está em metros e t em segundos, em que instante(s) a velocidade da partícula é zero? (b) Em que instante(s) a aceleração a é zero? (c) Para que intervalo de tempo (positivo ou negativo) a aceleração a é negativa? (d) Para que intervalo de tempo (positivo ou negativo) a aceleração a é positiva? (e) Trace os gráficos de $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$.

•19 Em um certo instante de tempo, uma partícula tinha uma velocidade de 18 m/s no sentido positivo de x; 2,4 s depois, a velocidade era 30 m/s no sentido oposto. Qual foi a aceleração média da partícula durante este intervalo de 2,4 s?

•20 A posição de uma partícula que se move ao longo do eixo x é dada por $x = 12t^2 - 2t^3$, onde x está em metros e t em segundos. Determine (a) a posição, (b) a velocidade e (c) a aceleração da partícula em t = 3,0 s. (d) Qual é a coordenada positiva máxima alcançada pela partícula e (e) em que instante de tempo ela é alcançada? (f) Qual é a velocidade positiva máxima alcançada pela partícula e (g) em que instante de tempo ela é alcançada? (h) Qual é a aceleração da partícula no instante em que a partícula não está se movendo (além do instante t = 0)? (i) Determine a velocidade média da partícula entre t = 0 e t = 3,0 s.

••21 A posição de uma partícula que se desloca ao longo do eixo x varia com o tempo de acordo com a equação $x = ct^2 - bt^3$, onde x está em metros e t em segundos. Quais são as unidades (a) da constante c e (b) da constante b? Suponha que os valores numéricos de c e b sejam 3,0 e 2,0, respectivamente. (c) Em que instante a partícula passa pelo maior valor positivo de x? De t = 0,0 s a t = 4,0 s, (d) qual é a distância percorrida pela partícula e (e) qual é o seu deslocamento? Determine a velocidade da partícula nos instantes (f) t = 1,0 s, (g) t = 2,0 s, (h) t = 3,0 s e (i) t = 4,0 s. Determine a aceleração da partícula nos instantes (j) t = 1,0 s, (k) t = 2,0 s, (l) t = 3,0 s e (m) t = 4,0 s.

••22 De t = 0 a t = 5,00 min um homem fica em pé sem se mover; de t = 5,00 min a t = 10,0 min ele caminha em linha reta com uma velocidade de 2,2 m/s. Quais são (a) sua velocidade média $v_{méd}$ e (b) sua aceleração média $a_{méd}$ no intervalo de tempo de 2,00 min a 8,00 min? Quais são (c) $v_{méd}$ e (d) $a_{méd}$ no intervalo de tempo de 3,00 min a 9,00 min? (e) Plote x em função de t e v em função de t, e indique como as respostas de (a) a (d) podem ser obtidas a partir dos gráficos.

seção 2-7 Aceleração Constante: Um Caso Especial

•23 Um elétron possui uma aceleração constante de +3,2 m/s². Em um certo instante, sua velocidade é +9,6 m/s. Qual é sua velocidade (a) 2,5 s antes e (b) 2,5 s depois do instante considerado?

•**24** Um múon (uma partícula elementar) penetra em uma região com uma velocidade de $5{,}00 \times 10^6$ m/s e passa a ser desacelerado a uma taxa de $1{,}25 \times 10^{14}$ m/s². (a) Qual é a distância percorrida pelo múon até parar? (b) Trace os gráficos de x em função de t e de v em função de t para o múon.

•**25** Suponha que uma nave espacial se move com uma aceleração constante de 9,8 m/s², que dá aos tripulantes a ilusão de uma gravidade normal durante o vôo. (a) Se a nave parte do repouso, quanto tempo leva para atingir um décimo da velocidade da luz, que é $3{,}0 \times 10^8$ m/s? (b) Que distância a nave percorre nesse tempo?

•**26** Em uma estrada seca, um carro com pneus novos é capaz de frear com uma desaceleração constante de 4,92 m/s². (a) Quanto tempo esse carro, inicialmente se movendo a 24,6 m/s, leva para parar? (b) Que distância o carro percorre nesse tempo? (c) Trace os gráficos de x em função de t e de v em função de t durante a desaceleração.

•**27** Um elétron com velocidade inicial $v_0 = 1{,}50 \times 10^5$ m/s penetra em uma região de comprimento L = 1,00 cm, onde é eletricamente acelerado (Fig. 2-24), e sai dessa região com $v = 5{,}70 \times 10^6$ m/s. Qual é a aceleração do elétron, supondo que seja constante?

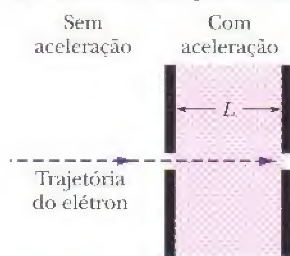


FIG. 2-24 Problema 27.

•**28** *Cogumelos lançadores.* Alguns cogumelos lançam esporos usando um mecanismo de catapulta. Quando o vapor d'água do ar se condensa em um esporo preso a um cogumelo, uma gota se forma de um lado do esporo e uma película de água se forma do outro lado. O peso da gota faz o esporo se encurvar, mas, quando a película atinge a gota, a gota d'água se espalha bruscamente pelo filme, e o esporo volta tão depressa à posição original que é lançado no ar. Tipicamente, o esporo atinge uma velocidade de 1,6 m/s em um lançamento de 5,0 μm; em seguida, a velocidade é reduzida a zero em 1,00 mm pelo atrito com o ar. Usando esses dados e supondo que a aceleração é constante, determine a aceleração em unidades de g (a) durante o lançamento; (b) durante a redução de velocidade.

•**29** Um veículo elétrico parte do repouso e acelera em linha reta a uma taxa de 2,0 m/s² até atingir a velocidade de 20 m/s. Em seguida, o veículo desacelera a uma taxa constante de 1,0 m/s² até parar. (a) Quanto tempo transcorre entre a partida e a parada? (b) Qual é a distância percorrida pelo veículo desde a partida até a parada?

•**30** O recorde mundial de velocidade em terra foi estabelecido pelo coronel John P. Stapp em março de 1954, a bordo de um trenó-foguete que se deslocou sobre trilhos a 1020 km/h. Ele e o trenó foram freados até parar em 1,4 s. (Veja a Fig. 2-7.) Qual foi a aceleração experimentada por Stapp durante a frenagem, em unidades de g?

•**31** Uma certa cabina de elevador percorre uma distância máxima de 190 m e atinge uma velocidade máxima de 305 m/min. A cabina pode acelerar a partir do repouso e desacelerar de volta ao repouso a uma taxa de 1,22 m/s². (a) Qual a distância percorrida pela cabina enquanto acelera a partir do repouso até a velocidade máxima? (b) Quanto tempo a cabina leva para percorrer a distância de 190 m, sem paradas, partindo do repouso e chegando com velocidade zero?

•**32** Os freios do seu carro podem produzir uma desaceleração de 5,2 m/s². (a) Se você dirige a 137 km/h e avista um policial rodoviário, qual é o tempo mínimo necessário para que o carro atinja a velocidade máxima permitida de 90 km/h? (A resposta revela a inutilidade de frear para tentar impedir que sua alta velocidade seja detectada por um radar ou por uma pistola de laser.) (b) Trace os gráficos de x em função de t e de v *versus* t durante a desaceleração.

•**33** Um carro que se move a 56,0 km/h está a 24,0 m de uma barreira quando o motorista aciona os freios. O carro bate na barreira 2,00 s depois. (a) Qual é o módulo da aceleração constante do carro antes do choque? (b) Qual é a velocidade do carro no momento do choque?

••**34** Um carro se move ao longo do eixo x por uma distância de 900 m, partindo do repouso (em $x = 0$) e terminando em repouso (em x = 900 m). No primeiro quarto do percurso a aceleração é de +2,25 m/s². Nos outros três quartos a aceleração passa a ser –0,750 m/s². Quais são (a) o tempo necessário para percorrer os 900 m e (b) a velocidade máxima? (c) Trace os gráficos da posição x, da velocidade v e da aceleração a em função do tempo t.

••**35** A Fig. 2-25 mostra o movimento de uma partícula que se move ao longo do eixo x com aceleração constante. A escala vertical do gráfico é definida por x_s = 6,0 m. Quais são (a) o módulo e (b) o sentido da aceleração da partícula?

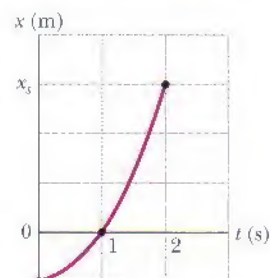


FIG. 2-25 Problema 35.

••**36** (a) Se a aceleração máxima que pode ser tolerada pelos passageiros de um metrô é 1,34 m/s² e duas estações de metrô estão separadas por uma distância de 806 m, qual é a velocidade máxima que o metrô pode alcançar entre as estações? (b) Qual é o tempo de percurso? (c) Se o metrô pára por 20 s em cada estação, qual é a máxima velocidade escalar média do metrô de uma partida à próxima?

••**37** Os carros A e B se movem no mesmo sentido em pistas vizinhas. A posição x do carro A é dada na Fig. 2-26, do instante $t = 0$ ao instante t = 7,0 s. A escala vertical do gráfico é definida por x_s = 32,0 m. Em $t = 0$, o carro B está em $x = 0$, com uma velocidade de 12 m/s e uma aceleração negativa a_B. (a) Qual deve ser o valor de a_B para que os carros estejam lado a lado (ou seja, tenham o mesmo valor de x) em t = 4,0 s? (b) Para esse valor de a_B, quantas vezes os carros ficam lado a lado? (c) Plote a posição x do carro B em função do tempo t na Fig. 2-21. Quantas vezes os carros ficariam lado a lado se o módulo da aceleração a_B fosse (d) maior do que e (e) menor do que o da resposta da parte (a)?

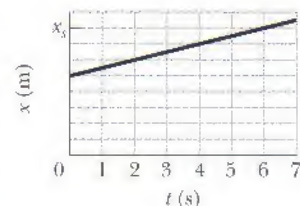


FIG. 2-26 Problema 37.

••**38** Você está se aproximando de um sinal de trânsito quando ele fica amarelo. Você está dirigindo na maior velocidade permitida no local, v_0 = 55 km/h; o módulo da maior taxa de desaceleração de que o seu carro é capaz é a = 5,18 m/s², e o seu tempo de reação para começar a frear é T = 0,75 s. Para evitar que a frente do carro invada o cruzamento depois de o sinal mudar para vermelho, você deve frear até parar ou prosseguir a 55 km/h se a distância até o cruzamento e a duração da luz amarela são, respecti-

vamente, (a) 40 m e 2,8 s, e (b) 32 m e 1,8 s? As respostas podem ser frear, prosseguir, ambas (se as duas estratégias funcionam) ou nenhuma (se nenhuma das estratégias funciona).

••39 Dois trens se movem no mesmo trilho quando os condutores subitamente notam que eles estão indo um de encontro ao outro. A Fig. 2-27 mostra as velocidades v dos trens em função do tempo t enquanto estão sendo freados. A escala vertical do gráfico é definida por $v_s = 40{,}0$ m. O processo de desaceleração começa quando a distância entre os trens é 200 m. Qual é a distância entre os trens depois que eles param?

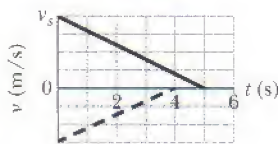


FIG. 2-27 Problema 39.

••40 Na Fig. 2-28, um carro vermelho e um carro verde, iguais exceto pela cor, movem-se um em direção ao outro em pistas vizinhas e paralelas a um eixo x. Em $t = 0$, o carro vermelho está em $x_{vermelho} = 0$ e o carro verde está em $x_{verde} = 220$ m. Se o carro vermelho tem uma velocidade constante de 20 km/h, os carros se cruzam em $x = 44{,}5$ m; se tem uma velocidade constante de 40 km/h, eles se cruzam em $x = 76{,}6$ m. Quais são (a) a velocidade inicial e (b) a aceleração do carro verde?

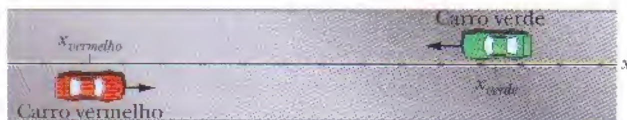


FIG. 2-28 Problemas 40 e 41.

••41 A Fig. 2-28 mostra um carro vermelho e um carro verde que se movem um em direção ao outro. A Fig. 2-29 é um gráfico do movimento dos dois carros que mostra suas posições $x_{0verde} = 270$ m e $x_{0vermelho} = 35{,}0$ m no instante $t = 0$. O carro verde tem uma velocidade constante de 20,0 m/s e o carro vermelho parte do repouso. Qual é o módulo da aceleração do carro vermelho?

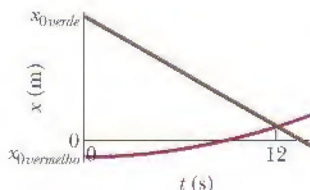


FIG. 2-29 Problema 41.

•••42 Quando um trem de passageiros de alta velocidade que se move a 161 km/h faz uma curva, o maquinista leva um susto ao ver que uma locomotiva entrou indevidamente nos trilhos através de um desvio e se encontra a uma distância $D = 676$ m à frente (Fig. 2-30). A locomotiva está se movendo a 29,0 km/h. O maquinista do trem de alta velocidade imediatamente aciona os freios. (a) Qual é o valor mínimo do módulo da desaceleração (suposta constante) para que a colisão não ocorra? (b) Suponha que o maquinista está em $x = 0$ quando, em $t = 0$, avista a locomotiva. Desenhe as curvas de $x(t)$ para a locomotiva e para o trem de alta velocidade para os casos em que a colisão é evitada por pouco e a colisão ocorre por pouco.

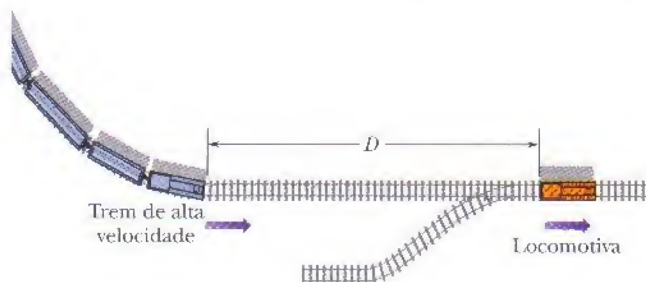


FIG. 2-30 Problema 42.

•••43 Você está discutindo no telefone celular enquanto segue um carro de polícia não identificado, a 25 m de distância; os dois carros estão a 110 km/h. A discussão distrai sua atenção do carro de polícia por 2,0 s (tempo suficiente para você olhar para o telefone e exclamar: "Eu me recuso a fazer isso!"). No início destes 2,0 s o policial começa a frear subitamente a 5,0 m/s^2. (a) Qual é a distância entre os dois carros quando você volta a prestar atenção no trânsito? Suponha que você leva outros 0,40 s para perceber o perigo e começar a frear. (b) Se você também freia a 5,0 m/s^2, qual é sua velocidade quando você bate no carro de polícia?

seção 2-9 Aceleração em Queda Livre

•44 Gotas de chuva caem 1700 m de uma nuvem até o chão. (a) Se elas não estivessem sujeitas à resistência do ar, qual seria sua velocidade ao atingir o solo? (b) Seria seguro caminhar na chuva?

•45 Em um prédio em construção, uma chave de grifo chega ao solo com uma velocidade de 24 m/s. (a) De que altura um operário a deixou cair? (b) Quanto tempo durou a queda? (c) Esboce os gráficos de y, v e a em função de t para a chave de grifo.

•46 Um desordeiro joga uma pedra verticalmente para baixo com uma velocidade inicial de 12,0 m/s, a partir do telhado de um edifício, 30,0 m acima do solo. (a) Quanto tempo leva a pedra para atingir o solo? (b) Qual é a velocidade da pedra no momento do choque?

•47 (a) Com que velocidade deve ser lançada uma bola verticalmente a partir do solo para que atinja uma altura máxima de 50 m? (b) Por quanto tempo permanece no ar? (c) Esboce os gráficos de y, v e a em função de t para a bola. Nos dois primeiros gráficos, indique o instante no qual ela atinge a altura de 50 m.

•48 Um tatu assustado pula verticalmente para cima, subindo 0,544 m nos primeiros 0,200 s. (a) Qual é a velocidade do animal ao deixar o solo? (b) Qual é a velocidade na altura de 0,544 m? (c) Qual é a altura do salto?

•49 Um balão de ar quente está subindo a uma taxa de 12 m/s e está a 80 m acima do solo quando um tripulante deixa cair um pacote. (a) Quanto tempo o pacote leva para atingir o solo? (b) Com que velocidade atinge o solo?

••50 Um parafuso se desprende de uma ponte em construção e cai 90 m até chegar ao solo. (a) Em quanto tempo o parafuso percorre os últimos 20% da queda? Qual é a velocidade (b) quando começa os últimos 20% da queda e (c) quando atinge o solo?

••51 Uma chave cai verticalmente de uma ponte que está 45 m acima da água. A chave atinge um barco de brinquedo que está se movendo com velocidade constante e se encontrava a 12 m do ponto de impacto quando a chave foi solta. Qual é a velocidade do barco?

••52 No instante $t = 0$, uma pessoa deixa cair a maçã 1 de uma ponte; pouco depois, a pessoa joga a maçã 2 verticalmente para baixo do mesmo local. A Fig. 2-31 mostra a posição vertical y das duas maçãs em função do tempo durante a queda até a estrada que passa por baixo da ponte. Qual a velocidade aproximada com a qual a maçã 2 foi jogada para baixo?

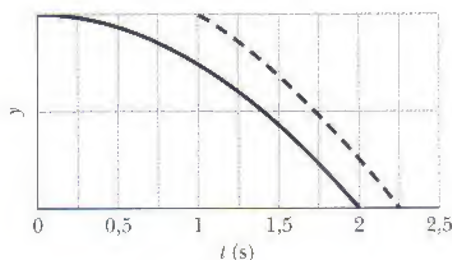


FIG. 2-31 Problema 52.

••53 Quando um balão científico desgarrado está subindo a 19,6 m/s, um dos instrumentos se desprende e cai em queda livre. A Fig. 2-32 mostra a velocidade vertical do instrumento em função do tempo, desde alguns instantes antes de se desprender até o momento em que atinge o solo. (a) Qual é a altura máxima que o instrumento atinge em relação ao ponto em que se desprendeu? (b) A que altura acima do solo o instrumento se desprendeu?

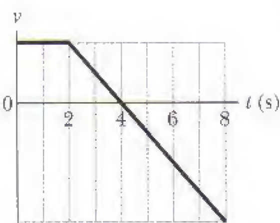


FIG. 2-32 Problema 53.

••54 A Fig. 2-33 mostra a velocidade v em função da altura y para uma bola lançada verticalmente para cima ao longo de um eixo y. A distância d é de 0,40 m. A velocidade na altura y_A é v_A. A velocidade na altura y_B é $v_A/3$. Determine a velocidade v_A.

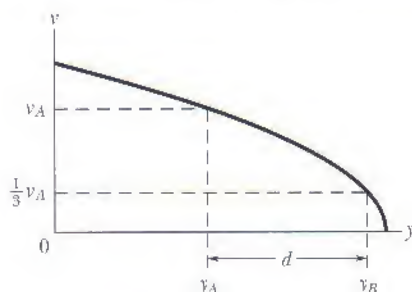


FIG. 2-33 Problema 54.

••55 Uma bola de argila úmida cai 15,0 m até o chão e permanece em contato com o solo por 20,0 ms antes de parar completamente. (a) Qual é o módulo da aceleração média da bola durante o tempo de contato com o solo? (Trate a bola como uma partícula.) (b) A aceleração média é para cima ou para baixo?

••56 Deixa-se cair uma pedra em um rio, a partir de uma ponte situada 43,9 m acima da água. Outra pedra é atirada verticalmente para baixo 1,0 s após a primeira ter sido deixada cair. As pedras atingem a água ao mesmo tempo. (a) Qual foi a velocidade inicial da segunda pedra? (b) Plote a velocidade em função do tempo para as duas pedras, supondo que $t = 0$ é o instante em que se deixou cair a primeira pedra.

••57 Para testar a qualidade de uma bola de tênis, você a deixa cair no chão a partir de uma altura de 4,00 m. Depois de quicar, ela atinge uma altura de 2,00 m. Se a bola permanece em contato com o piso por 12,0 ms, (a) qual é o módulo da aceleração média durante esse contato e (b) a aceleração média é para cima ou para baixo?

••58 Uma pedra é lançada verticalmente para cima, a partir do solo, no instante $t = 0$. Em $t = 1,5$ s ela ultrapassa o alto de uma torre; 1,0 s depois, atinge a altura máxima. Qual é a altura da torre?

••59 A água pinga de um chuveiro em um piso situado 200 cm abaixo. As gotas caem a intervalos de tempo regulares (iguais), com a primeira gota atingindo o piso quando a quarta gota começa a cair. Quando a primeira gota atinge o piso, a que distância do chuveiro se encontram (a) a segunda e (b) a terceira gotas?

••60 Um objeto cai de uma altura h a partir do repouso. Se ele percorre uma distância de $0,50h$ no último 1,00 s, determine (a) o tempo e (b) a altura da queda. (c) Explique a solução fisicamente inaceitável da equação do segundo grau em t usada para resolver o problema.

••61 Um gato sonolento observa um vaso de flores que passa por uma janela aberta, primeiro subindo e depois descendo. O vaso permanece à vista por um tempo total de 0,50 s, e a altura da janela é 2,00 m. Que distância acima do topo da janela o vaso atinge?

•••62 Uma bola é lançada verticalmente para cima a partir da superfície de outro planeta. O gráfico de y em função de t para a bola é mostrado na Fig. 2-34, onde y é a altura da bola acima do ponto de lançamento e $t = 0$ no instante em que a bola é lançada. A escala vertical do gráfico é definida por $y_s = 30,0$ m. Quais são os módulos (a) da aceleração em queda livre no planeta e (b) da velocidade inicial da bola?

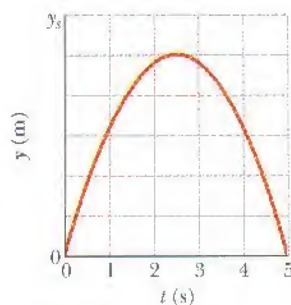


FIG. 2-34 Problema 62.

•••63 Uma bola de aço cai do telhado de um edifício e passa por uma janela, levando 0,125 s para passar do alto à base da janela, uma distância correspondente a 1,20 m. A bola quica em uma calçada e torna a passar pela janela, de baixo para cima, em 0,125 s. Suponha que o movimento para cima corresponde exatamente ao inverso da queda. O tempo que a bola gasta abaixo da base da janela é de 2,00 s. Qual é a altura do edifício?

•••64 Ao pegar um rebote, um jogador de basquete pula 76,0 cm verticalmente. Qual o tempo total (de subida e descida) que o jogador passa (a) nos 15 cm mais altos e (b) nos 15 cm mais baixos do salto? Esses resultados explicam por que os jogadores de basquete parecem flutuar no ar quando saltam?

seção 2-10 Integração de Gráficos em Análise de Movimento

•65 No Exemplo 2-9, qual é a velocidade (a) da cabeça e (b) do tronco, quando a cabeça possui a aceleração máxima?

•66 Uma salamandra do gênero *Hydromantes* captura a presa lançando a língua como um projétil: a parte traseira da língua se projeta bruscamente para a frente, desenrolando o resto da língua até que a parte dianteira atinge a presa, capturando-a. A Fig. 2-35 mostra o módulo a da aceleração em função do tempo t durante a fase de aceleração do lançamento em uma situação típica. As acelerações indicadas são $a_1 = 400$ m/s² e $a_2 = 100$ m/s². Qual é a velocidade da língua no final da fase de aceleração?

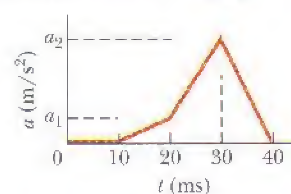


FIG. 2-35 Problema 66.

••67 Que distância percorre em 16 s um corredor cujo gráfico velocidade-tempo é mostrado na Fig. 2-30? A escala vertical do gráfico é definida por v_s = 8,0 m.

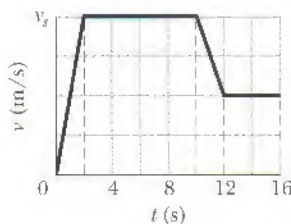


FIG. 2-36 Problema 67.

••68 Em um soco direto, no caratê, o punho começa em repouso na cintura e é movido rapidamente para a frente até o braço ficar completamente estendido. A velocidade $v(t)$ do punho está representada na Fig. 2-37 para o caso de um lutador experiente. Qual é a distância percorrida pelo punho desde o início do golpe até (a) o instante t = 50 ms e (b) o instante em que a velocidade do punho é máxima?

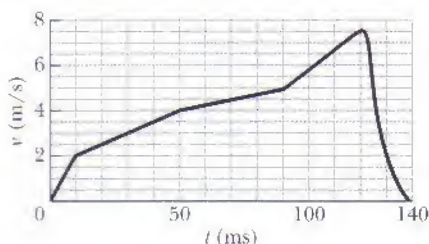


FIG. 2-37 Problema 68.

••69 Quando uma bola de futebol é chutada na direção de um jogador e o jogador a desvia de cabeça, a aceleração da cabeça durante a colisão pode ser relativamente grande. A Fig. 2-38 mostra a aceleração $a(t)$ da cabeça de um jogador de futebol sem e com capacete, a partir do repouso. No instante t = 7,0 ms, qual é a diferença entre as velocidades da cabeça sem e com capacete?

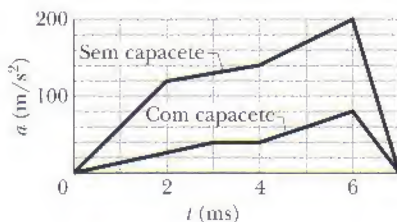


FIG. 2-38 Problema 69.

•••70 Duas partículas se movem ao longo do eixo x. A posição da partícula 1 é dada por $x = 6{,}00t^2 + 3{,}00t + 2{,}00$, onde x está em metros e t em segundos; a aceleração da partícula 2 é dada por $a = -8{,}00t$, onde a está em metros por segundo ao quadrado e t em segundos. No instante t = 0 a velocidade é de 20 m/s. Em que instante as duas partículas têm a mesma velocidade?

Problemas Adicionais

71 No instante em que um sinal de trânsito fica verde um automóvel começa a se mover com uma aceleração constante a de 2,2 m/s². No mesmo instante um caminhão, que se move com uma velocidade constante de 9,5 m/s, ultrapassa o automóvel. (a) A que distância do sinal o automóvel alcança o caminhão? (b) Qual é a velocidade do automóvel nesse instante?

72 A Fig. 2-39 mostra parte de uma rua na qual se pretende controlar o tráfego para permitir que um *grupo* de veículos atravesse vários cruzamentos sem parar. Suponha que os primeiros carros do grupo tenham acabado de chegar ao cruzamento 2, onde o sinal abriu quando estavam a uma distância d do cruzamento 2. Eles continuam a se mover a uma certa velocidade v_p (a velocidade máxima permitida) até chegarem ao cruzamento 3. As distâncias entre os cruzamentos são D_{23} e D_{12}. (a) Quanto tempo depois que o sinal do cruzamento 2 foi aberto o sinal do cruzamento 3 deve abrir para que o sinal do cruzamento 3 abra quando os primeiros carros do grupo estão a uma distância d do cruzamento 3?

Suponha que o grupo tenha encontrado o sinal fechado no cruzamento 1. Quando o sinal do cruzamento 1 abre, os carros da frente precisam de um certo tempo, t, para arrancar e um tempo adicional para atingir a velocidade de cruzeiro v_p com uma certa aceleração a. (b) Quanto tempo depois que foi aberto o sinal do cruzamento 1 o sinal do cruzamento 2 deve abrir para que o sinal do cruzamento 2 abra quando os primeiros carros do grupo estão a uma distância d do cruzamento 2?

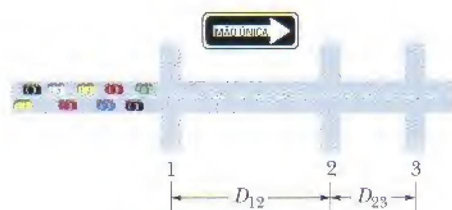


FIG. 2-39 Problema 72.

73 Em um videogame, um ponto é programado para se deslocar na tela de acordo com a função $x = 9{,}00t - 0{,}750t^3$, onde x é a distância em centímetros em relação à extremidade esquerda da tela e t é o tempo em segundos. Quando o ponto chega a uma das extremidades da tela, x = 0 ou x = 15,0 cm, o valor de t é zerado e o ponto começa novamente a se mover de acordo com a função $x(t)$. (a) Em que instante após o início do movimento o ponto se encontra momentaneamente em repouso? (b) Para que valor de x isso acontece? (c) Qual é a aceleração do ponto (incluindo o sinal) no instante em que isso acontece? (d) O ponto está se movendo para a direita ou para a esquerda pouco antes de atingir o repouso? (e) O ponto está se movendo para a direita ou para a esquerda pouco depois de atingir o repouso? (f) Em que instante $t > 0$ o ponto atinge a extremidade da tela pela primeira vez?

74 Deixa-se cair uma bola de chumbo em um lago de um trampolim situado 5,20 m acima da superfície da água. A bola atinge a água com uma certa velocidade e conserva esta velocidade até chegar ao fundo do lago, o que ocorre 4,80 s após começar a cair. (a) Qual é a profundidade do lago? Quais são o (b) módulo e (c) o sentido (para cima ou para baixo) da velocidade média da bola durante a queda? Suponha que toda a água do lago seja drenada. A bola é agora lançada do trampolim com uma certa velocidade inicial e novamente chega ao fundo em 4,80 s. Quais são (d) o módulo e (e) o sentido da velocidade inicial da bola?

75 O cabo que sustenta um elevador de obra vazio arrebenta quando o elevador está em repouso no alto de um edifício de 120 m de altura. (a) Com que velocidade o elevador chega ao solo? (b) De quanto é o tempo de queda? (c) Qual é a velocidade do elevador ao passar pelo ponto médio da queda? (d) Por quanto tempo o elevador estava caindo ao passar pelo ponto médio?

76 Deixa-se cair dois diamantes da mesma altura, com 1,0 s de intervalo. Quanto tempo após o primeiro diamante começar a cair a distância entre eles é 10 m?

77 Se um arremessador de beisebol lança uma bola rápida com uma velocidade horizontal de 160 km/h, quanto tempo a bola leva para atingir a base principal, situada a 18,4 m de distância?

78 Um próton está se movendo ao longo do eixo x de acordo com a equação $x = 50t + 10t^2$, onde x está em metros e t em segundos. Calcule (a) a velocidade média do próton durante os primeiros 3,0 s do movimento, (b) a velocidade instantânea do próton em $t = 3,0$ s e (c) a aceleração instantânea do próton em $t = 3,0$ s. (d) Trace o gráfico de x em função de t e mostre como a resposta do item (a) pode ser obtida a partir do gráfico. (e) Obtenha a resposta do item (b) a partir do gráfico. (f) Trace o gráfico de v em função de t e mostre no gráfico a resposta do item (c).

79 Uma motocicleta está se movendo a 30 m/s quando o motociclista aciona os freios, imprimindo à motocicleta uma desaceleração constante. Durante o intervalo de 3,0 s imediatamente após o início da frenagem a velocidade diminui para 15 m/s. Que distância percorre a motocicleta desde o início da frenagem até parar?

80 Um piloto voa horizontalmente a 1300 km/h a uma altura $h = 35$ m acima do solo inicialmente plano. No instante $t = 0$, o piloto começa a sobrevoar um terreno inclinado para cima de um ângulo $\theta = 4,3°$ (Fig. 2-40). Se o piloto não mudar a trajetória do avião, em que instante t o avião se chocará com o solo?

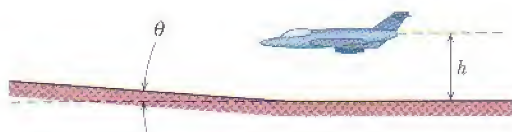


FIG. 2-40 Problema 80.

81 Um jogador de shuffleboard usa um taco para imprimir a um disco uma aceleração constante, a partir do repouso, que faz o disco atingir uma velocidade de 6,0 m/s após percorrer uma distância de 1,8 m. Em seguida, o disco perde contato com o taco e perde velocidade com uma desaceleração constante de 2,5 m/s^2 até parar. (a) Quando tempo o disco passa em movimento? (b) Qual é a distância percorrida pelo disco?

82 A aceleração da cabeça de uma cobra cascavel ao dar um bote pode chegar a 50 m/s^2. Se um carro tivesse a mesma aceleração, quanto tempo levaria para atingir a velocidade de 100 km/h a partir do repouso?

83 Um jato comercial deve atingir uma velocidade de 360 km/h para decolar. Qual é a menor aceleração constante necessária para que o avião decole de uma pista com 1,80 km de extensão?

84 Um motorista aumenta a velocidade do carro de 25 km/h para 55 km/h em 0,50 min, mantendo uma aceleração constante. Um ciclista aumenta a velocidade da bicicleta de 0 para 30 km/h em 0,50 min, mantendo uma aceleração constante. Quais são os módulos da (a) aceleração do carro e da (b) aceleração da bicicleta?

85 O tempo necessário para frear um carro pode ser dividido em duas partes: o tempo de reação para o motorista começar a frear e o tempo necessário para que a velocidade chegue a zero depois que o freio é acionado. A distância total percorrida por um carro é de 56,7 m, quando a velocidade inicial é de 80,5 km/h, e de 24,4 m quando a velocidade inicial é de 48,3 km/m. Supondo que a aceleração permanece constante depois que o freio é acionado, determine (a) o tempo de reação do motorista e (b) o módulo da aceleração.

86 Um trem vermelho a 72 km/h e um trem verde a 144 km/h estão na mesma linha, retilínea e plana, movendo-se um em direção ao outro. Quando a distância entre eles é de 950 m os dois maquinistas percebem o perigo e acionam os freios, fazendo com que os dois trens sofram uma desaceleração de 1,0 m/s^2. Os trens conseguem frear a tempo de evitar uma colisão? Caso a resposta seja negativa, determine as velocidades dos trens no momento da colisão; caso seja positiva, determine a distância final entre os trens.

87 No instante $t = 0$, um alpinista deixa cair um grampo, sem velocidade inicial, do alto de um paredão. Após um curto intervalo de tempo seu companheiro de escalada, que está 10 m acima, lança um outro grampo para baixo. A Fig. 2-41 mostra as posições y dos grampos durante a queda em função do tempo t. Com que velocidade o segundo grampo foi lançado?

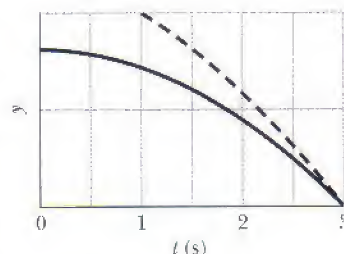


FIG. 2-41 Problema 87.

88 Uma pedra é lançada verticalmente para cima a partir da borda do terraço de um edifício. A pedra atinge a altura máxima 1,60 s após ter sido lançada. Em seguida, após quase se chocar com o edifício, a pedra chega ao solo 6,00 s após ter sido lançada. Em unidades do SI: (a) com que velocidade a pedra foi lançada? (b) Qual a altura máxima atingida pela pedra em relação ao terraço? (c) Qual a altura do edifício?

89 A aceleração de uma partícula ao longo de um eixo x é $a = 5,0t$, com t em segundos e a em metros por segundo ao quadrado. Em $t = 2,0$ s a velocidade da partícula é +17 m/s. Qual é a velocidade da partícula em $t = 4,0$ s?

90 Um trem partiu do repouso com aceleração constante. Em um certo instante estava se movendo a 30 m/s; 160 m adiante, estava se movendo a 50 m/s. Calcule (a) a aceleração, (b) o tempo necessário para percorrer os 160 m mencionados, (c) o tempo necessário para atingir a velocidade de 30 m/s e (d) a distância percorrida desde o repouso até o instante em que o trem atingiu a velocidade de 30 m/s. (e) Trace os gráficos de x em função de t e de v em função de t, de $t = 0$ até o instante em que o trem atingiu a velocidade de 50 m/s.

91 Um carro de corrida é capaz de acelerar de 0 a 60 km/h em 5,4 s. (a) Qual é a aceleração média, em m/s^2, durante este intervalo? (b) Qual é a distância percorrida pelo carro em 5,4 s, supondo que a aceleração seja constante? (c) Quando tempo o carro leva para percorrer uma distância de 0,25 km, a partir de repouso, mantendo uma aceleração constante igual ao valor do item (a)?

92 Trenós a jato, montados em trilhos retilíneos e planos, são usados para investigar os efeitos de grandes acelerações sobre seres humanos. Um desses trenós pode atingir uma velocidade de 1600 km/h em 1,8 s a partir do repouso. Determine (a) a aceleração (suposta constante) em unidades de g e (b) a distância percorrida.

93 A Fig. 2-42 mostra um dispositivo simples que pode ser usado para medir o seu tempo de reação: uma tira de papelão marcada com uma escala e dois pontos. Um amigo segura a tira na *vertical*, com o polegar e o indicador no ponto da direita da Fig. 2-42. Você posiciona o polegar e o indicador no outro ponto (o ponto da esquerda da Fig. 2-42), sem encostar na tira. Seu

amigo solta a tira e você tenta segurá-la assim que percebe que ela começou a cair. A marca na posição em que você segura a tira corresponde ao seu tempo de reação. (a) A que distância do ponto inferior você deve colocar a marca de 50,0 ms? Por que valor você deve multiplicar essa distância para determinar a marca de (b) 100 ms, (c) 150 ms, (d) 200 ms e (e) 250 ms? (Por exemplo: a marca de 100 ms deve estar no dobro da distância correspondente à marca de 50 ms? Nesse caso, a resposta seria 2. Você é capaz de identificar algum padrão nas respostas?)



FIG. 2-42 Problema 93.

94 A Fig. 2-43 mostra a aceleração a em função do tempo t para uma partícula que se move ao longo de um eixo x. A escala vertical do gráfico é definida por a_s = 12,0 m/s². No instante t = –2,0 s a velocidade da partícula é 7,0 m/s. Qual é a velocidade da partícula no instante t = 6,0 s?

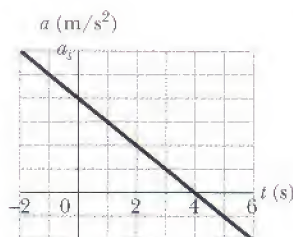


FIG. 2-43 Problema 94.

95 Um vagonete de minério é puxado para o alto de uma encosta a 20 km/h e então puxado ladeira abaixo a 35 km/h até a altura inicial. (O tempo gasto para inverter o movimento no alto da encosta é tão pequeno que pode ser desprezado.) Qual é a velocidade média do carrinho no percurso de ida e volta, ou seja, desde a altura inicial até voltar à mesma altura?

96 A duração de um piscar de olhos é da ordem de 100 ms. Que distância um avião de combate MiG-25 "Foxbat" percorre durante um piscar de olhos do piloto se a velocidade média do avião é 3400 km/h?

97 Quando a velocidade máxima permitida na New York Thruway foi aumentada de 55 milhas por hora para 65 milhas por hora, quanto tempo foi economizado por um motorista que dirigiu 700 km entre a entrada de Buffalo e a saída da cidade de Nova York na velocidade máxima permitida?

98 Um motociclista que está se movendo ao longo de um eixo x na direção leste tem uma aceleração dada por $a = (6{,}1 - 1{,}2t)$ m/s² para $0 \le t \le 6{,}0$ s. Em t = 0, a velocidade e a posição do ciclista são 2,7 m/s e 7,3 m. (a) Qual é a velocidade máxima atingida pelo ciclista? (b) Qual é a distância percorrida pelo ciclista entre t = 0 e t = 6,0 s?

99 Um certo malabarista normalmente arremessa bolas verticalmente até uma altura H. A que altura as bolas devem ser arremessadas para passarem o dobro do tempo no ar?

100 Um carro que se move com aceleração constante percorreu em 6,00 s a distância de 60,0 m que separa dois pontos. Sua velocidade ao passar pelo segundo ponto era de 15,0 m/s. (a) Qual era a velocidade no primeiro ponto? (b) Qual era o módulo da aceleração? (c) A distância do primeiro ponto o carro se encontrava em repouso? (d) Trace os gráficos de x em função de t e v em função de t para o carro, desde o repouso (t = 0) até o segundo ponto.

101 Deixa-se cair uma pedra de um penhasco com 100 m de altura. Quanto tempo a pedra leva para cair (a) os primeiros 50 m e (b) os 50 m seguintes?

102 A distância entre duas estações de metrô é de 1100 m. Se um trem acelera a +1,2 m/s² a partir do repouso durante a primeira metade da distância e depois desacelera a –1,2 m/s² na segunda metade, quais são (a) o tempo de percurso entre as estações e (b) a velocidade máxima do trem? (c) Trace os gráficos de x, v, e a em função de t para o percurso entre as duas estações.

103 Um certo velocista é capaz de atingir uma velocidade máxima de 11,0 m/s. Se o atleta parte do repouso com aceleração constante, atinge a velocidade máxima após percorrer uma distância de 12,0 m. Em seguida, mantém esta velocidade máxima durante o resto de uma corrida de 100 m. (a) Qual é o tempo do atleta em uma prova de 100 m rasos? (b) Para melhorar o tempo, o corredor tenta diminuir a distância necessária para atingir a velocidade máxima. Qual deve ser essa distância para que ele consiga reduzir o tempo para 10,0 s?

104 Uma partícula parte da origem em t = 0 e se move no sentido positivo do eixo x. O gráfico da velocidade da partícula em função do tempo é mostrado na Fig. 2-44; a escala vertical do gráfico é definida por v_s = 4,0 m/s. (a) Qual é a coordenada da partícula em t = 5,0 s? (b) Qual é a velocidade da partícula em t = 5,0 s? (c) Qual é a aceleração da partícula em t = 5,0 s? (d) Qual é a velocidade média da partícula entre t = 1,0 s e t = 5,0 s? (e) Qual é a aceleração média da partícula entre t = 1,0 s e t = 5,0 s?

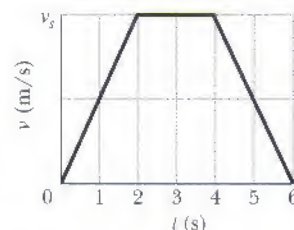


FIG. 2-44 Problema 104.

105 Uma pedra é lançada verticalmente para cima. Durante a subida ela passa por um ponto A com velocidade v e por um ponto B, 3,00 m acima de A, com velocidade $v/2$. Calcule (a) a velocidade v e (b) a altura máxima alcançada pela pedra acima do ponto B.

106 Deixa-se cair uma pedra, sem velocidade inicial, do alto de um edifício de 60 m. A que distância do solo está a pedra 1,2 s antes de chegar ao solo?

107 Um trenó a vela está se movendo para leste com velocidade constante quando uma rajada de vento produz uma aceleração constante para leste durante 3,0 s. O gráfico de x em função de t aparece na Fig. 2-45, onde t = 0 é tomado como sendo o instante em que o vento começou a soprar, e o sentido positivo do eixo x aponta para leste. (a) Qual é a aceleração do trenó durante o intervalo de 3,0 s? (b) Qual é a velocidade do trenó no final do

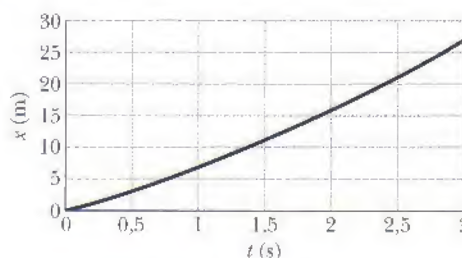


FIG. 2-45 Problema 107.

intervalo de 3,0 s? (c) Se a aceleração permanece constante por mais 3,0 s, qual é a distância percorrida pelo trenó neste segundo intervalo de 3,0 s?

108 Uma bola é lançada verticalmente para baixo do alto de um edifício com 36,6 m de altura. A bola passa pela extremidade superior de uma janela que está 12,2 m acima do solo 2,00 s após o lançamento. Qual é a velocidade da bola ao passar pela extremidade superior da janela?

109 A velocidade de uma bala de fuzil é de 640 m/s quando a bala sai do cano da arma, que tem 1,20 m de comprimento. Supondo que a aceleração da bala é constante, determine o tempo que a bala permanece no cano da arma após ser disparada.

110 Um pára-quedista salta de um avião e percorre 50 m em queda livre. Em seguida, abre o pára-quedas e sofre uma desaceleração constante de 2,0 m/s^2, chegando ao solo com uma velocidade de 3,0 m/s. (a) Quanto tempo o pára-quedista passa no ar? (b) Qual era a altitude do avião no momento do salto?

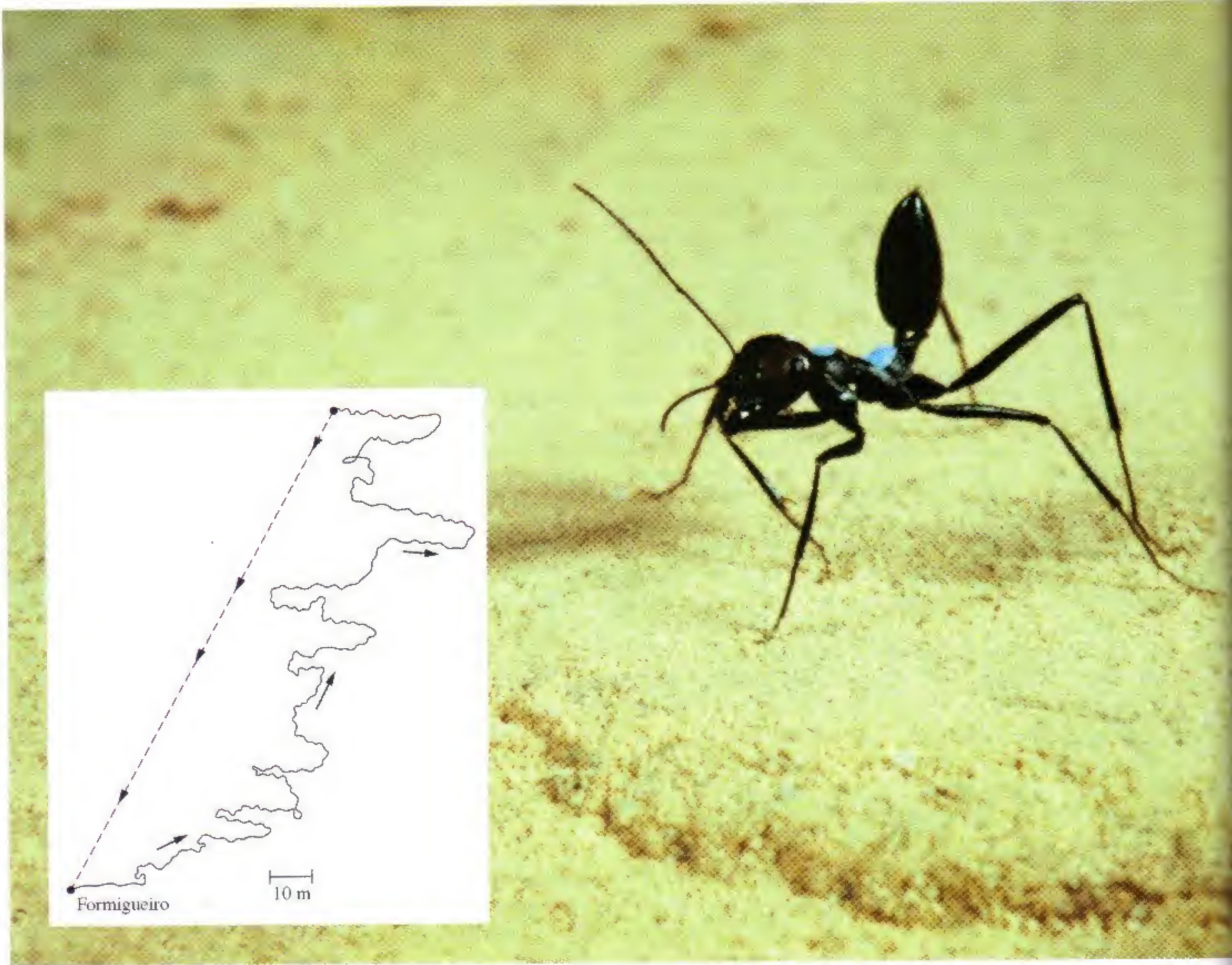
111 O Laboratório de Pesquisa de Gravidade Nula, no Centro de Pesquisas Glenn, da NASA, dispõe de uma torre de queda livre com 145 m de altura. Trata-se de uma torre vertical evacuada na qual, entre outras possibilidades, pode-se deixar cair uma esfera com 1 m de diâmetro contendo um conjunto de instrumentos. (a) Durante quanto tempo a esfera passa em queda livre? (b) Qual é a velocidade da esfera imediatamente antes de atingir um dispositivo de captura na base da torre? (c) Ao ser capturada, a esfera sofre uma desaceleração média de $25g$ quando sua velocidade é reduzida a zero. Qual é a distância percorrida pela esfera durante a desaceleração?

112 Uma bola é lançada verticalmente *para baixo* de uma altura h com uma velocidade inicial v_0. (a) Qual é a velocidade da bola no momento em que atinge o solo? (b) Quanto tempo a bola leva para chegar ao solo? Quais seriam as respostas (c) do item a e (d) do item b se a bola fosse lançada *para cima* da mesma altura e com a mesma velocidade inicial? Antes de calcular a resposta, verifique se as respostas dos itens (c) e (d) devem ser maiores, menores ou iguais às dos itens (a) e (b).

113 Um carro que é freado quando está se movendo a 200 km/h em uma auto-estrada percorre 170 m antes de parar. Supondo que a aceleração seja constante, determine o módulo da aceleração (a) em unidades do SI e (b) em unidades de g. (c) Qual é o tempo T_p que o carro leva para parar depois que os freios são acionados? O *tempo de reação* T_r é o tempo que o motorista leva para perceber uma emergência e começar a frear. Se $T_r = 400$ ms, (d) quanto vale T_p em unidades de T_r? (e) Do tempo que o carro leva para parar, a maior parte se deve à reação do motorista ou ao processo de frenagem? Óculos escuros atrasam os sinais visuais enviados dos olhos para o córtex visual no cérebro, aumentando o valor de T_r. (f) No caso extremo em que T_r aumenta de 100 ms, que distância adicional percorre o carro durante o tempo de reação?

114 O esporte em que uma bola se move mais depressa é o jai alai, no qual as velocidades medidas chegam a 303 km/h. Se um jogador profissional de jai alai se defronta com uma bola a essa velocidade e pisca involuntariamente, deixa de ver a cena por cerca de 100 ms. Que distância a bola percorre durante esse piscar de olhos?

3 Vetores



Cortesia de Rudiger Wehner, Zoologisches Institut der Universitat Zurich

A formiga do deserto Cataglyphis fortis *vive nas planícies do deserto do Saara. Quando uma dessas formigas sai à procura de alimento percorre um caminho aleatório, como mostra a figura. A formiga pode viajar mais de 500 m em uma superfície arenosa, sem qualquer ponto de referência. Mesmo assim, na hora de voltar ao formigueiro ela ruma diretamente para casa.*

Como uma formiga consegue encontrar o caminho de casa se não há pontos de referência no deserto?

A resposta está neste capítulo.

3-1 O QUE É FÍSICA?

A física lida com um grande número de grandezas que possuem amplitude e orientação, e para isso precisa de uma linguagem matemática especial, a linguagem dos vetores, para descrever essas grandezas. Essa linguagem também é usada na engenharia, em outras ciências e até mesmo nas conversas do dia-a-dia. Se você já explicou a alguém como chegar a um endereço usando expressões como "Siga por esta rua por cinco quarteirões e depois dobre à esquerda", usou a linguagem dos vetores. Na verdade, qualquer tipo de navegação se baseia em vetores, mas a física e a engenharia também usam vetores para descrever fenômenos que envolvem rotações e forças magnéticas, como veremos em capítulos posteriores. Neste capítulo, vamos discutir a linguagem básica dos vetores.

3-2 | Vetores e Escalares

Uma partícula que se move em linha reta pode se deslocar em apenas uma direção. Podemos considerar o deslocamento como positivo em uma dessas direções e negativo na outra. No caso de uma partícula que se move em três dimensões, porém, um número positivo ou negativo não é suficiente para indicar a orientação; precisamos usar um *vetor*.

Um **vetor** possui um módulo e uma orientação; os vetores seguem certas regras de combinação, que serão discutidas neste capítulo. Uma **grandeza vetorial** é uma grandeza que possui um módulo e uma orientação e pode, portanto, ser representada por um vetor. O deslocamento, a velocidade e a aceleração são exemplos de grandezas físicas vetoriais. Como neste livro serão apresentadas muitas outras grandezas vetoriais, o conhecimento das regras de combinação de vetores será de grande utilidade para o leitor.

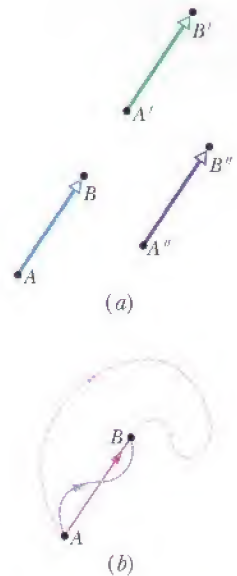


FIG. 3-1 (*a*) As três setas têm o mesmo módulo e orientação e, portanto, representam o mesmo deslocamento. (*b*) As três trajetórias que unem os dois pontos correspondem ao mesmo vetor deslocamento.

Nem toda grandeza física envolve uma orientação. A temperatura, a pressão, a energia, a massa e o tempo, por exemplo, não "apontam" em nenhuma direção. Chamamos essas grandezas de **escalares**, e lidamos com elas pelas regras da álgebra comum. Um único valor, com um sinal (como no caso de uma temperatura de $-2°C$), pode ser usado para especificar um escalar.

A grandeza vetorial mais simples é o deslocamento, ou mudança de posição. Um vetor que representa um deslocamento é chamado, como seria de se esperar, de **vetor deslocamento**. (Outros exemplos de vetores são os vetores velocidade e o vetor aceleração.) Se uma partícula muda de posição movendo-se de A para B na Fig. 3-1*a*, dizemos que sofre um deslocamento de A para B, que representamos por uma seta apontando de A para B. A seta especifica o vetor graficamente. Para distinguir símbolos vetoriais de outros tipos de setas neste livro usamos um triângulo vazado na ponta das setas que representam vetores.

Na Fig. 3-1*a*, as setas de A para B, de A' para B' e de A'' para B'' têm o mesmo módulo e a mesma orientação; assim, especificam vetores deslocamento iguais e representam a mesma *variação de posição* da partícula. Um vetor pode ser deslocado sem que o seu valor mude *se* o comprimento, a direção e o sentido permanecerem os mesmos.

O vetor deslocamento nada nos diz sobre a trajetória percorrida por uma partícula. Na Fig. 3-1*b*, por exemplo, as três trajetórias que unem os pontos A e B correspondem ao mesmo vetor deslocamento, o da Fig. 3-1*a*. Um vetor deslocamento representa apenas o resultado final do movimento, não o movimento propriamente dito.

3-3 | Soma Geométrica de Vetores

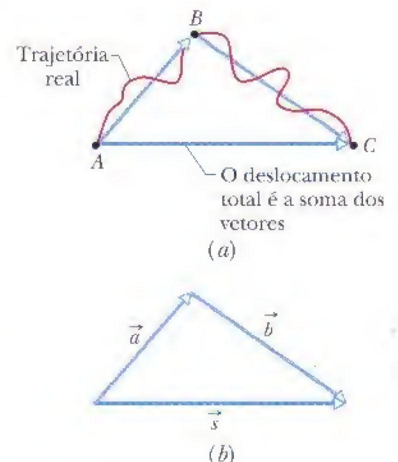


FIG. 3-2 (*a*) AC é o vetor soma dos vetores AB e BC. (*b*) Os mesmos vetores com outros nomes.

Suponha que, como no diagrama vetorial da Fig. 3-2*a*, uma partícula se desloque de A a B e depois de B a C. Podemos representar o deslocamento total (independentemente da trajetória seguida) através de dois vetores deslocamento sucessivos, AB e

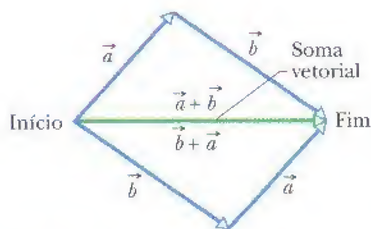


FIG. 3-3 A ordem em que os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são somados não afeta o resultado; veja a Eq. 3-2.

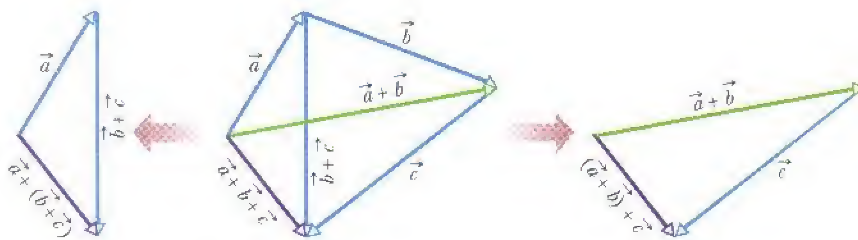


FIG. 3-4 Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ podem ser agrupados em qualquer ordem para serem somados; veja a Eq. 3-3.

BC. O deslocamento *total* é um único deslocamento de *A* para *C*. Chamamos *AC* de **vetor soma** (ou **vetor resultante**) dos vetores *AB* e *BC*. Esta soma não é uma soma algébrica comum.

Na Fig. 3-2*b* redesenhamos os vetores da Fig. 3-2*a* e os rotulamos da forma que será usada daqui em diante, com uma seta sobre um símbolo em itálico, como $\vec{a}$. Para indicar apenas o módulo do vetor (uma grandeza positiva e sem direção) usamos o símbolo do vetor em itálico sem a seta, como *a*, *b* e *s*. (Você pode usar simplesmente um símbolo manuscrito.) Uma seta sobre um símbolo indica que a grandeza representada pelo símbolo possui as propriedades de um vetor: módulo e orientação.

Podemos representar a relação entre os três vetores da Fig. 3-2*b* através da *equação vetorial*

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}, \qquad (3\text{-}1)$$

segundo a qual o vetor $\vec{s}$ é o vetor soma dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O símbolo + na Eq. 3-1 e a palavra "soma" têm um significado diferente no caso dos vetores porque, ao contrário do que acontece na álgebra comum, eles envolvem tanto o módulo como a direção e o sentido da grandeza.

A Fig. 3-2 sugere um método para somar geometricamente dois vetores bidimensionais $\vec{a}$ e $\vec{b}$. (1) Desenhe o vetor $\vec{a}$ em uma escala conveniente e no ângulo apropriado. (2) Desenhe o vetor $\vec{b}$ na mesma escala, com a origem na extremidade do vetor $\vec{a}$, também no ângulo apropriado. (3) O vetor soma $\vec{s}$ é o vetor que vai da origem de $\vec{a}$ à extremidade de $\vec{b}$.

A soma de vetores, definida dessa forma, tem duas propriedades importantes. Em primeiro lugar, a ordem em que os vetores são somados é irrelevante. Somar $\vec{a}$ a $\vec{b}$ é o mesmo que somar $\vec{b}$ a $\vec{a}$ (Fig. 3-3), ou seja,

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \qquad \text{(lei comutativa).} \qquad (3\text{-}2)$$

Em segundo lugar, quando existem mais de dois vetores podemos agrupá-los em qualquer ordem para somá-los. Assim, se queremos somar os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, podemos primeiro somar $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e depois somar o resultado a $\vec{c}$. Podemos também somar primeiro $\vec{b}$ e $\vec{c}$ e depois somar o resultado a $\vec{a}$; o resultado é o mesmo, como mostra a Fig. 3-4. Assim,

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \qquad \text{(lei associativa).} \qquad (3\text{-}3)$$

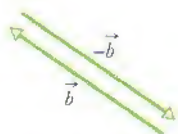


FIG. 3-5 Os vetores $\vec{b}$ e $-\vec{b}$ têm o mesmo módulo e sentidos opostos.

O vetor $-\vec{b}$ é um vetor com o mesmo módulo e direção de $\vec{b}$ e o sentido oposto (veja a Fig. 3-5). A soma dos dois vetores na Fig. 3-5 é

$$\vec{b} + (-\vec{b}) = 0$$

Assim, somar $-\vec{b}$ é o mesmo que subtrair $\vec{b}$. Usamos esta propriedade para definir a diferença entre dois vetores. Se $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, temos:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \qquad \text{(subtração de vetores);} \qquad (3\text{-}4)$$

ou seja, calculamos o vetor diferença $\vec{d}$ somando o vetor $-\vec{b}$ ao vetor $\vec{a}$. A Fig. 3-6 mostra como isso é feito geometricamente.

Como na álgebra comum, podemos passar um termo que inclui um símbolo de vetor de um lado de uma equação vetorial para o outro, mas devemos mudar o sinal. Assim, por exemplo, para explicitar $\vec{a}$ na Eq. 3-4 escrevemos a equação na forma

$$\vec{d}+\vec{b}=\vec{a} \text{ ou } \vec{a}=\vec{d}+\vec{b}$$

Embora tenhamos usado nestes exemplos vetores deslocamento, as regras para somar e subtrair vetores se aplicam a vetores de qualquer tipo, sejam eles usados para representar velocidade, aceleração ou qualquer outra grandeza vetorial. Entretanto, apenas vetores do mesmo tipo podem ser somados. Assim, por exemplo, podemos somar dois deslocamentos ou duas velocidades, mas não faz sentido somar um deslocamento e uma velocidade. Na aritmética dos escalares isso seria como tentar somar 21 s e 12 m.

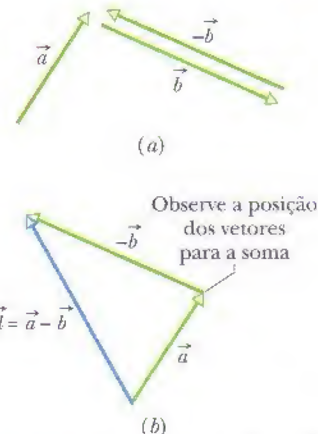


FIG. 3-6 (a) Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $-\vec{b}$. (b) Para subtrair o vetor $\vec{b}$ do vetor $\vec{a}$, basta somar o vetor $-\vec{b}$ ao vetor $\vec{a}$.

TESTE 1 Os módulos dos deslocamentos $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são 3 m e 4 m, respectivamente, e $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Considerando as várias orientações possíveis de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, qual é (a) o maior e (b) o menor valor possível do módulo de $\vec{c}$?

Exemplo 3-1

Em uma prova de orientação você recebe a tarefa de se afastar o máximo possível de um acampamento através de três deslocamentos retilíneos. Você pode usar os seguintes deslocamentos, em qualquer ordem: (a) $\vec{a}$, 2,0 km para leste; (b) $\vec{b}$, 2,0 km 30° ao norte do leste; (c) $\vec{c}$, 1,0 km para oeste. Você pode também substituir $\vec{b}$ por $-\vec{b}$ e $\vec{c}$ por $-\vec{c}$. Qual é a maior distância que você pode atingir após o terceiro deslocamento?

Raciocínio: Usando uma escala conveniente, desenhamos os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $-\vec{b}$ e $-\vec{c}$, como na Fig. 3-7*a*. Em seguida, deslocamos mentalmente os vetores sobre a página, sem mudar a sua orientação, ligando três vetores de cada vez, em um arranjo no qual a origem do segundo vetor está ligada à extremidade do primeiro e a origem do terceiro está ligada à extremidade do segundo, para encontrar o vetor soma, $\vec{d}$. A origem do primeiro vetor representa o acampamento. A extremidade do terceiro vetor representa o ponto de destino. O vetor soma $\vec{d}$ vai da origem do primeiro vetor à extremidade do terceiro. O módulo d do vetor soma é a distância entre o ponto de destino e o acampamento.

Examinando todos os casos possíveis, descobrimos que a distância é máxima para o arranjo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $-\vec{c}$. A ordem em que esses vetores são somados não importa, já que a soma vetorial é a mesma para qualquer ordem. A ordem mostrada na Fig. 3-7*b* é para a soma vetorial

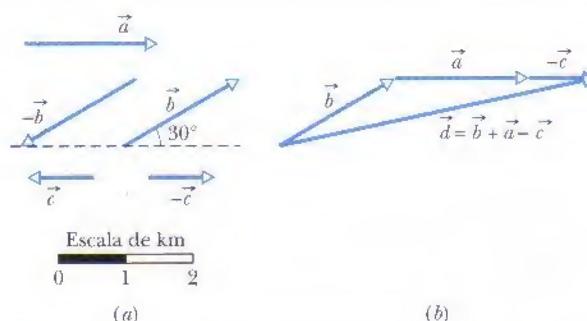


FIG. 3-7 (a) Vetores deslocamento; três deles devem ser usados. (b) A distância do acampamento é a maior possível se os deslocamentos escolhidos são $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $-\vec{c}$, em qualquer ordem.

$$\vec{d}=\vec{b}+\vec{a}+(-\vec{c})$$

Usando a escala da Fig. 3-7*a* medimos o comprimento d do vetor resultante, encontrando

$$d=4{,}8 \text{ m.} \quad \text{(Resposta)}$$

3-4 | Componentes de Vetores

Somar vetores geometricamente pode ser uma tarefa tediosa. Uma técnica mais elegante e mais simples envolve o uso da álgebra, mas requer que os vetores sejam representados em um sistema de coordenadas retangulares. Os eixos x e y são normalmente desenhados no plano do papel, como na Fig. 3-8*a*. O eixo z é perpendicular ao papel; vamos ignorá-lo, por enquanto, e tratar apenas de vetores bidimensionais.

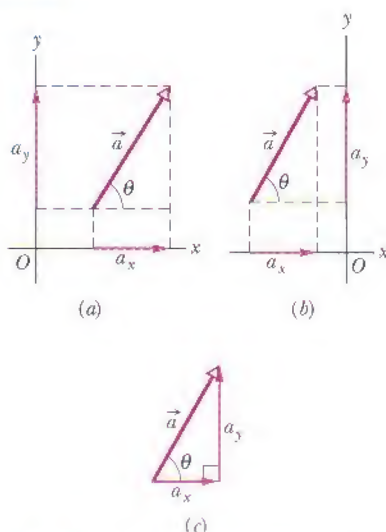


FIG. 3-8 (*a*) As componentes a_x e a_y do vetor $\vec{a}$. (*b*) As componentes não mudam quando o vetor é deslocado, desde que o módulo e a orientação sejam mantidos. (*c*) As componentes correspondem aos catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o módulo do vetor.

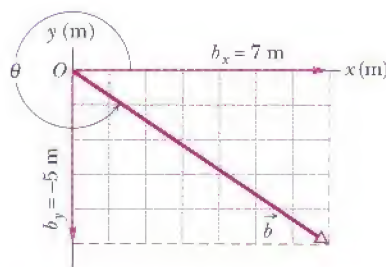


FIG. 3-9 A componente de $\vec{b}$ em relação ao eixo *x* é positiva e a componente em relação ao eixo *y* é negativa.

Uma **componente** de um vetor é a projeção do vetor em um eixo. Na Fig. 3-8*a*, por exemplo, a_x é a componente do vetor $\vec{a}$ em relação ao eixo *x* e a_y é a componente em relação ao eixo *y*. Para encontrar a projeção de um vetor em relação a um eixo traçamos retas perpendiculares ao eixo a partir da origem e da extremidade do vetor, como mostra a figura. A projeção de um vetor em relação a um eixo *x* é chamada de *componente x* do vetor; analogamente, a projeção em relação ao *y* recebe o nome de *componente y*. O processo de obter as componentes de um vetor é chamado de **decomposição do vetor**.

Uma componente de um vetor tem o mesmo sentido (em relação a um eixo) que o vetor. Na Fig. 3-8, a_x e a_y são positivas porque $\vec{a}$ aponta no sentido positivo dos dois eixos. (Observe as setas das componentes, que mostram seus sentidos.) Se tivéssemos invertido o sentido do vetor $\vec{a}$, as componentes seriam negativas e as setas apontariam no sentido negativo dos eixos *x* e *y*. A decomposição do vetor $\vec{b}$ da Fig. 3-9 leva a uma componente b_x positiva e a uma componente b_y negativa.

No caso mais geral, um vetor tem três componentes; para o vetor da Fig. 3-8*a*, porém, a componente *z* é nula. Como mostram as Figs. 3-8*a* e *b*, quando deslocamos um vetor sem mudar sua orientação as componentes não mudam.

Podemos determinar geometricamente as componentes de $\vec{a}$ na Fig. 3-8*a* a partir do triângulo retângulo mostrado na figura:

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{e} \quad a_y = a \operatorname{sen}\theta, \tag{3-5}$$

onde θ é o ângulo que o vetor $\vec{a}$ faz com o semi-eixo *x* positivo e *a* é o módulo de $\vec{a}$. A Fig. 3-8*c* mostra que $\vec{a}$ e suas componentes *x* e *y* formam um triângulo retângulo. A figura mostra também como é possível reconstruir um vetor a partir das componentes: basta posicionar a origem de uma das componentes na extremidade da outra e completar o triângulo retângulo ligando a origem de segunda componente à extremidade da primeira.

Uma vez que um vetor tenha sido decomposto em relação a um conjunto de eixos, as componentes podem ser usadas no lugar do vetor. Assim, por exemplo, o vetor $\vec{a}$ da Fig. 3-8*a* é dado (completamente determinado) por *a* e θ, mas também pode ser dado pelas componentes a_x e a_y. Os dois pares de valores contêm a mesma informação. Se conhecemos um vetor na *notação de componentes* (a_x e a_y) e queremos especificá-lo na *notação módulo-ângulo* (*a* e θ), podemos usar as equações

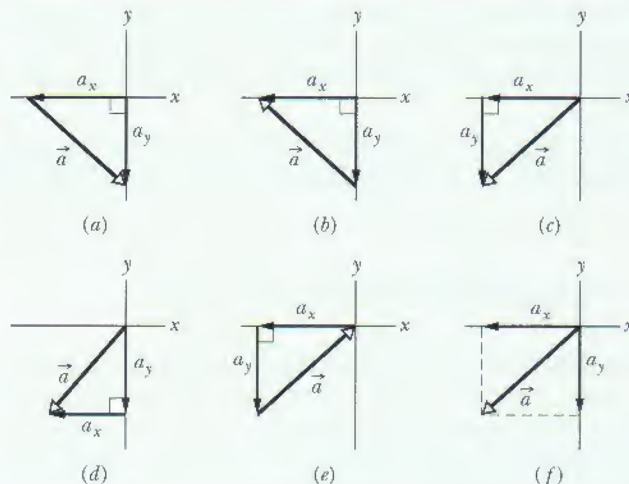
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{e} \quad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x} \tag{3-6}$$

para efetuar a transformação.

No caso mais geral de três dimensões, precisamos do módulo e de dois ângulos (a, θ e ϕ, digamos) ou de três componentes (a_x, a_y e a_z) para especificar um vetor.

TESTE 2

Quais dos métodos indicados na figura são corretos para se determinar o vetor $\vec{a}$ a partir das componentes *x* e *y*?



Exemplo 3-2

Um pequeno avião decola de um aeroporto em um dia nublado e é avistado mais tarde a 215 km de distância, em um curso que faz um ângulo de 22° a leste do norte. A que distância a leste e ao norte do aeroporto está o avião no momento em que é avistado?

IDÉIA-CHAVE Conhecemos o módulo (215 km) e o ângulo (22° a leste do norte) de um vetor e precisamos determinar as componentes do vetor.

Cálculos: Desenhamos um sistema de coordenadas xy com o sentido positivo de x para leste e o de y para o norte (Fig. 3-10). Por conveniência, a origem é colocada no aeroporto. O deslocamento $\vec{d}$ do avião aponta da origem para o ponto onde o avião foi avistado.

Para determinar as componentes de $\vec{d}$, usamos a Eq. 3-5 com $\theta = 68°$ $(= 90° - 22°)$:

$$d_x = d\cos\theta = (215\text{ km})(\cos 68°) = 81\text{ km} \quad \text{(Resposta)}$$

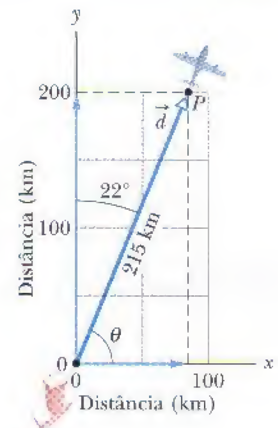


FIG. 3-10 Um avião decola de um aeroporto na origem e é avistado mais tarde no ponto P.

$$d_y = d\,\text{sen}\,\theta = (215\text{ km})(\text{sen } 68°) = 199\text{ km} \approx 2{,}0 \times 10^2\text{ km}. \quad \text{(Resposta)}$$

Assim, o avião foi avistado 81 km a leste e $2{,}0 \times 10^2$ km ao norte do aeroporto.

Exemplo 3-3

Durante duas décadas, equipes especializadas de espeleólogos procuraram uma ligação entre o sistema de cavernas de Flint Ridge e a Mammoth Cave, no estado americano de Kentucky. Quando a ligação finalmente foi descoberta, o sistema combinado foi declarado a caverna mais longa do mundo (mais de 200 km de extensão). A equipe que encontrou a ligação teve que rastejar, escalar e se contorcer em inúmeras passagens, deslocando-se 2,6 km para oeste, 3,9 km para o sul e 25 m para cima. Qual foi o deslocamento do início ao fim?

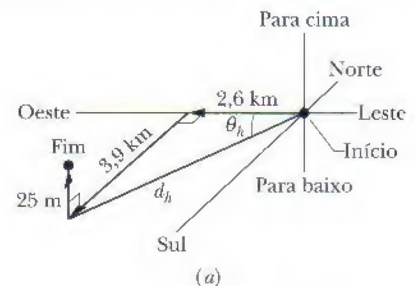
IDÉIA-CHAVE Temos as componentes de um vetor tridimensional e precisamos determinar o módulo do vetor e dois ângulos para especificar a sua orientação.

Componentes Horizontais: Para começar, desenhamos as componentes como na Fig. 3-11a. As componentes horizontais (2,6 km para oeste e 3,9 km para o sul) são os catetos de um triângulo retângulo. O deslocamento horizontal da equipe é a hipotenusa do triângulo, e o módulo d_h é dado pelo teorema de Pitágoras:

$$d_h = \sqrt{(2{,}6\text{ km})^2 + (3{,}9\text{ km})^2} = 4{,}69\text{ km}.$$

Também de acordo com o triângulo da Fig. 3-11a, o ângulo θ_h deste deslocamento horizontal ao sul do oeste é dado por

$$\tan\theta_h = \frac{3{,}9\text{ km}}{2{,}6\text{ km}}$$



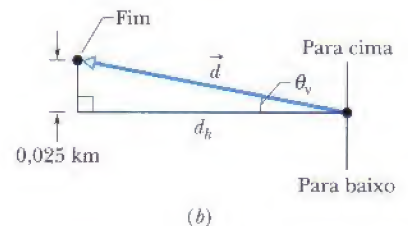


FIG. 3-11 (a) Componentes do deslocamento total da equipe de espeleólogos e o deslocamento horizontal d_h. (b) Vista lateral, mostrando d_h e o vetor deslocamento total da equipe, $\vec{d}$.

e portanto
$$\theta_h = \tan^{-1}\frac{3{,}9\text{ km}}{2{,}6\text{ km}} = 56°, \quad \text{(Resposta)}$$

que é um dos dois ângulos de que necessitamos para especificar a orientação do deslocamento.

Deslocamento Total: Para levar em conta a componente vertical (25 m = 0,025 km), desenhamos uma vista lateral dos vetores da Fig. 3-11a, olhado para noroeste. O resultado é a Fig. 3-11b, onde a componente vertical e o deslocamento horizontal d_h são os catetos de outro triângulo retângulo. O deslocamento total da equipe é a hipotenusa desse retângulo, com um módulo d dado por

$$d = \sqrt{(4,69\ \text{km})^2 + (0,025\ \text{km})^2} = 4,69\ \text{km}$$

$$\approx 4,7\ \text{km}. \qquad \text{(Resposta)}$$

O ângulo desse deslocamento para cima em relação ao deslocamento horizontal é dado por

$$\theta_v = \tan^{-1}\frac{0,025\ \text{km}}{4,69\ \text{km}} = 0,3°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, o vetor deslocamento da equipe teve um módulo de 4,7 km, um ângulo de 56° ao sul do oeste e um ângulo de 0,3° para cima. O deslocamento para cima, naturalmente, foi insignificante em comparação com o deslocamento horizontal. Entretanto, esse fato não tornou mais fácil o trabalho da equipe, que teve que subir e descer várias vezes durante o percurso. O caminho seguido pela equipe foi, na verdade, muito diferente do indicado pelo vetor deslocamento.

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 1: *Ângulos – Graus e Radianos* Ângulos medidos em relação ao semi-eixo x positivo são positivos se forem medidos no sentido anti-horário e negativos se medidos no sentido horário. Assim, por exemplo, 210° e –150° representam o mesmo ângulo.

Os ângulos podem ser medidos em graus ou radianos (rad). Para relacionar as duas medidas, lembre-se de que uma circunferência é descrita por um ângulo de 360°, ou 2π rad. Para converter, por exemplo, 40° para radianos, escrevemos

$$40°\frac{2\pi\ \text{rad}}{360°} = 0,70\ \text{rad}.$$

Tática 2: *Funções Trigonométricas* Você precisa conhecer as definições das funções trigonométricas mais comuns (seno, co-seno e tangente), porque elas são muito usadas na ciência e na engenharia. Elas são dadas na Fig. 3-12 para um triângulo retângulo genérico.

Você também deve saber como essas funções trigonométricas variam com o ângulo, como mostra a Fig. 3-13, para poder julgar se o resultado mostrado por uma calculadora é razoável. Em certas circunstâncias, o simples conhecimento dos sinais das funções nos vários quadrantes pode ser bastante útil.

Tática 3: *Funções Trigonométricas Inversas* Quando as funções trigonométricas inversas sen^{-1}, $\cos^{-1}$ e $\tan^{-1}$ são fornecidas por uma calculadora você deve ser capaz de dizer se os resultados são razoáveis ou não, pois em geral existe uma outra solução possível que a calculadora não fornece. Os intervalos em que as calculadoras operam ao determinar os valores das funções trigonométricas inversas estão indicados na Fig. 3-13. Assim, por exemplo, $\text{sen}^{-1}(0,5)$ pode ser igual a 30° (que é o valor mostrado pela calculadora, já que 30° está no intervalo de operação) ou a 150°. Para observar os dois valores, trace uma reta horizontal passando pelo valor 0,5 na Fig. 3-13a, e verifique os pontos em que a reta intercepta a curva da função seno.

$$\text{sen}\ \theta = \frac{\text{cateto oposto a}\ \theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente a}\ \theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto oposto a}\ \theta}{\text{cateto adjacente a}\ \theta}$$

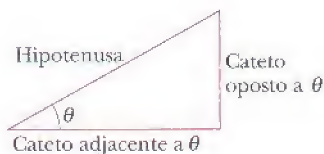
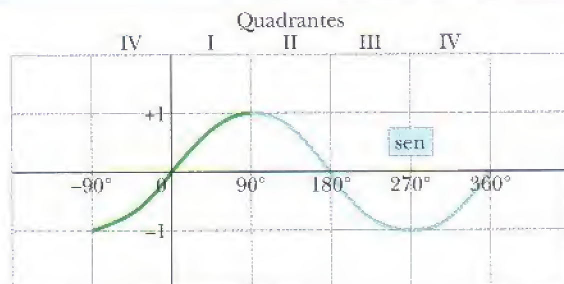
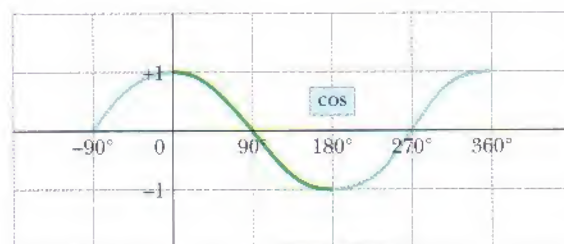


FIG. 3-12 Triângulo usado para definir as funções trigonométricas. Veja também o Apêndice E.





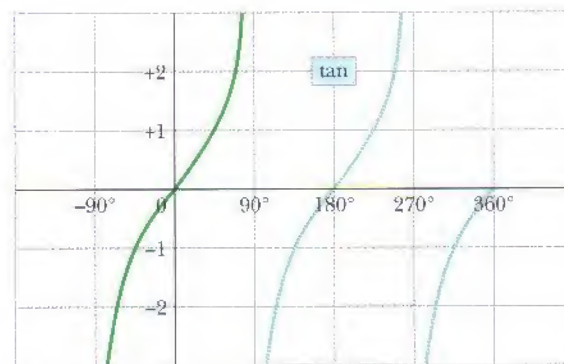


FIG. 3-13 Gráficos das três funções trigonométricas. As partes mais escuras das curvas correspondem aos valores fornecidos pelas calculadoras para as funções trigonométricas inversas.

Como é possível saber a resposta correta? Ela é a que parece mais razoável para uma dada situação. Considere, por exemplo, o cálculo de θ_h no Exemplo 3-3, no qual $\tan\theta_h = 3,9/2,6 = 1,5$. Uma calculadora fornece para $\tan^{-1}(1,5)$ o valor de 56°, mas θ_h = 236° (= 180° + 56°) também tem uma tangente igual a 1,5. Qual das duas soluções é a correta? Examinando a situação física (Fig. 3-11a), vemos que 56° é um valor razoável, e que o mesmo não acontece com 236°.

Tática 4: Medida dos Ângulos de um Vetor As expressões de cos θ e sen θ na Eq. 3-5 e de tan θ na Eq. 3-6 são válidas apenas se o ângulo for medido em relação ao semi-eixo x positivo. Se o ângulo for medido em relação a outro eixo, talvez seja preciso trocar as funções trigonométricas da Eq. 3-5 ou inverter a razão da Eq. 3-6. Um método mais seguro é converter o ângulo dado em um ângulo medido em relação ao semi-eixo x positivo.

3-5 | Vetores Unitários

Vetor unitário é um vetor que tem módulo igual a 1 e aponta em uma certa direção. Um vetor unitário não possui dimensão nem unidade; sua única função é especificar uma orientação. Neste livro, os vetores unitários que indicam os sentidos positivos dos eixos x, y e z são representados como $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$ e $\hat{\mathrm{k}}$, respectivamente, sendo o símbolo $\hat{}$ usado em lugar de uma seta (Fig. 3-14) para mostrar que se trata de vetores unitários. Um sistema de eixos como o da Fig. 3-14 é chamado de **sistema de coordenadas dextrogiro**. O sistema permanece dextrogiro quando os três eixos sofrem a mesma rotação, qualquer que ela seja. Os sistemas de coordenadas usados neste livro são todos deste tipo.

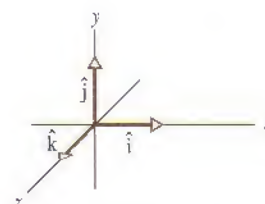


FIG. 3-14 Os vetores unitários $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$ e $\hat{\mathrm{k}}$ definem os sentidos positivos de um sistema de coordenadas dextrogiro.

Os vetores unitários são muito úteis para especificar outros vetores; assim, por exemplo, podemos expressar os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ das Figs. 3-8 e 3-9 como

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} \tag{3-7}$$

e

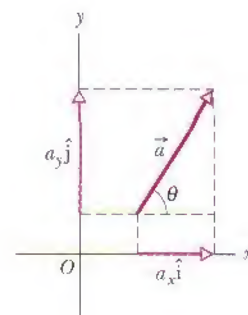
$$\vec{b} = b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}}. \tag{3-8}$$

Essas duas equações estão ilustradas na Fig. 3-15. As grandezas $a_x\hat{\mathrm{i}}$ e $a_y\hat{\mathrm{j}}$ são vetores conhecidos como **componentes vetoriais** de $\vec{a}$. As grandezas a_x e a_y são escalares conhecidos como **componentes escalares** (ou, simplesmente, **componentes**) de $\vec{a}$.

Como exemplo, vamos escrever o deslocamento $\vec{d}$ da equipe de espeleólogos do Exemplo 3-3 em termos de vetores unitários. Para começar, superpomos o sistema de coordenadas da Fig. 3-14 ao da Fig. 3-11*a*. Dessa forma, as orientações de $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$ e $\hat{\mathrm{k}}$ são para leste, para cima e para o sul, respectivamente. Assim, o deslocamento $\vec{d}$ do início ao fim é expresso em termos dos vetores unitários como

$$\vec{d} = -(2{,}6\text{ km})\hat{\mathrm{i}} + (0{,}025\text{ km})\hat{\mathrm{j}} + (3{,}9\text{ km})\hat{\mathrm{k}}. \tag{3-9}$$

onde $-(2{,}6\text{ km})\hat{\mathrm{i}}$ é a componente vetorial $d_x\hat{\mathrm{i}}$ do vetor em relação ao eixo x e $-(2{,}6\text{ km})$ é a componente x do vetor, d_x.



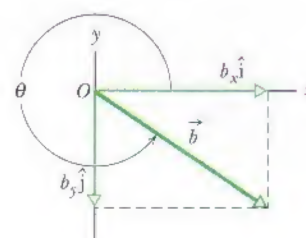


FIG. 3-15 (*a*) Componentes vetoriais do vetor $\vec{a}$. (*b*) Componentes vetoriais do vetor $\vec{b}$.

3-6 | Soma de Vetores através de Suas Componentes

Usando um desenho, podemos adicionar vetores geometricamente. Em uma sofisticada calculadora podemos somá-los diretamente na tela. Uma terceira forma de somar vetores é combinar suas componentes eixo por eixo, que é a forma que discutiremos em seguida.

Para começar, considere a equação

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}, \tag{3-10}$$

segundo a qual o vetor $\vec{r}$ é igual ao vetor $(\vec{a} + \vec{b})$. Isso significa que cada componente de $\vec{r}$ deve ser igual à componente correspondente de $(\vec{a} + \vec{b})$:

$$r_x = a_x + b_x \tag{3-11}$$

$$r_y = a_y + b_y \tag{3-12}$$

$$r_z = a_z + b_z. \tag{3-13}$$

Em outras palavras, dois vetores são iguais se suas componentes correspondentes forem iguais. As Eqs. 3-10 a 3-13 nos dizem que, para somar dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, devemos (1) obter as componentes escalares dos vetores; (2) combinar essas componentes escalares, eixo por eixo, para obter as componentes do vetor soma, $\vec{r}$; (3) combinar as componentes de $\vec{r}$ para obter o vetor $\vec{r}$. Isto pode ser feito de duas maneiras:

podemos expressar $\vec{r}$ em termos dos vetores unitários (como na Eq. 3-9) ou através da notação módulo-ângulo (como na resposta do Exemplo 3-3).

Este procedimento para somar vetores através de suas componentes também se aplica à subtração. Lembre-se de que uma subtração como $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ pode ser escrita como uma adição da forma $\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Para subtrair, somamos as componentes de $\vec{a}$ e $-\vec{b}$ para obter

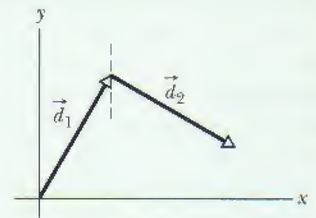
$$d_x = a_x - b_x,\ d_y = a_y - b_y,\ \text{e}\ d_z = a_z - b_z,$$

onde

$$\vec{d} = d_x\hat{\text{i}} + d_y\hat{\text{j}} + d_z\hat{\text{k}}.$$



TESTE 3 (a) Quais são os sinais das componentes x de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$ na figura ao lado? (b) Quais são os sinais das componentes y de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$? Quais são os sinais das componentes x e y de $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$?



Exemplo 3-4

A Fig. 3-16*a* mostra os seguintes vetores:

$$\vec{a} = (4{,}2\ \text{m})\hat{\text{i}} - (1{,}5\ \text{m})\hat{\text{j}},$$

$$\vec{b} = (-1{,}6\ \text{m})\hat{\text{i}} + (2{,}9\ \text{m})\hat{\text{j}},$$

e

$$\vec{c} = (-3{,}7\ \text{m})\hat{\text{j}}.$$

Qual é o vetor soma $\vec{r}$, que também aparece na Fig. 3-16*a*?

IDÉIA-CHAVE Podemos somar os três vetores somando suas componentes, eixo por eixo, e usando as componentes resultantes para obter o vetor soma $\vec{r}$.

Cálculos: No caso do eixo x, somamos as componentes x de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ para obter a componente x do vetor soma $\vec{r}$:

$$r_x = a_x + b_x + c_x$$
$$= 4{,}2\ \text{m} - 1{,}6\ \text{m} + 0 = 2{,}6\ \text{m}.$$

Analogamente, no caso do eixo y,

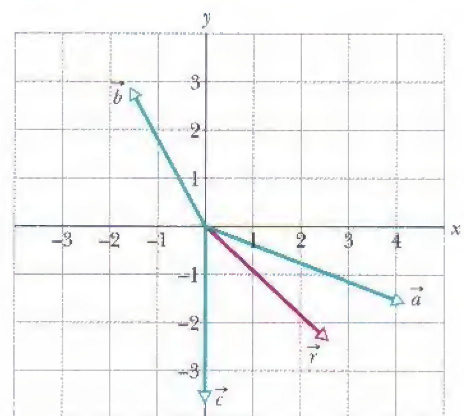
$$r_y = a_y + b_y + c_y$$
$$= -1{,}5\ \text{m} + 2{,}9\ \text{m} - 3{,}7\ \text{m} = -2{,}3\ \text{m}.$$

Podemos então combinar essas componentes de $\vec{r}$ para escrever o vetor em termos dos vetores unitários:

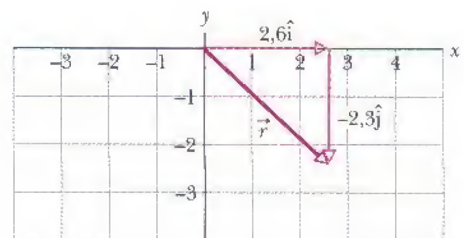
$$\vec{r} = (2{,}6\ \text{m})\hat{\text{i}} - (2{,}3\ \text{m})\hat{\text{j}}, \qquad \text{(Resposta)}$$

onde $(2{,}6\ \text{m})\hat{\text{i}}$ é a componente vetorial de $\vec{r}$ em relação ao longo do eixo x, e $-(2{,}3\ \text{m})\hat{\text{j}}$ é a componente vetorial de $\vec{r}$ em relação ao eixo y. A Fig. 3-16*b* mostra uma forma de obter o vetor $\vec{r}$ a partir dessas componentes. (Você pode imaginar outra forma?)

Também podemos resolver o problema determinando o módulo e o ângulo de $\vec{r}$. De acordo com a Eq. 3-6, o módulo é dado por



(*a*)



(*b*)

FIG. 3-16 O vetor $\vec{r}$ é a soma vetorial dos outros três vetores.

$$r = \sqrt{(2{,}6\ \text{m})^2 + (-2{,}3\ \text{m})^2} \approx 3{,}5\ \text{m} \qquad \text{(Resposta)}$$

e o ângulo (medido em relação ao semi-eixo x positivo) é dado por

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2{,}3\ \text{m}}{2{,}6\ \text{m}}\right) = -41° \qquad \text{(Resposta)}$$

onde o sinal negativo significa que o ângulo deve ser medido no sentido horário.

Exemplo 3-5

De acordo com as pesquisas, a formiga do deserto mostrada na fotografia de abertura deste capítulo mantém um registro dos seus movimentos em um sistema mental de coordenadas. Quando decide voltar ao formigueiro soma seus deslocamentos em relação aos eixos do sistema para calcular um vetor que aponta diretamente para o ponto de partida. Como exemplo desse cálculo, considere uma formiga que executa cinco movimentos de 6,0 cm cada um em um sistema de coordenadas xy, nas orientações mostradas na Fig. 3-17a, partindo do formigueiro. No final do quinto movimento, quais são o módulo e o ângulo do vetor deslocamento total $\vec{d}_{tot}$ e quais são os valores correspondentes do vetor de retorno $\vec{d}_{volta}$ que liga a posição final da formiga à posição do formigueiro?

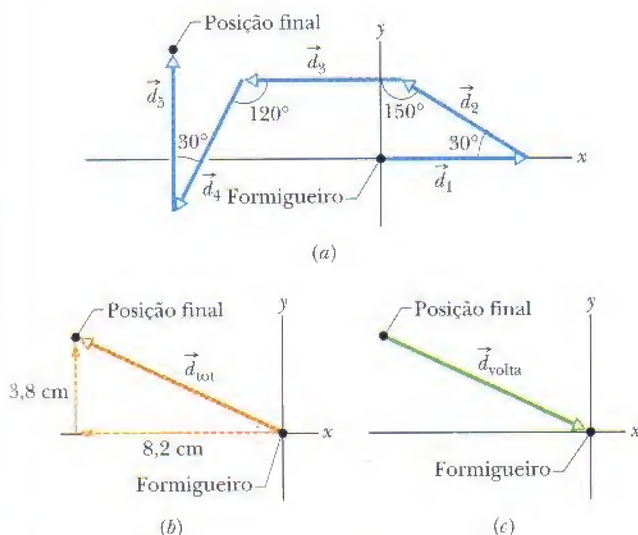


FIG. 3-17 (a) Movimentos de uma formiga do deserto. (b) Componentes x e y de $\vec{d}_{tot}$. (c) O vetor $\vec{d}_{volta}$ indica o caminho de volta para o formigueiro.

IDÉIAS-CHAVE (1) Para encontrar o deslocamento resultante $\vec{d}_{tot}$, precisamos somar os cinco vetores deslocamento:

$$\vec{d}_{tot} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3 + \vec{d}_4 + \vec{d}_5.$$

(2) Calculamos esta soma apenas para a componente x,

$$d_{tot,x} = d_{1x} + d_{2x} + d_{3x} + d_{4x} + d_{5x}, \qquad (3\text{-}14)$$

e apenas para a componente y,

$$d_{tot,y} = d_{1y} + d_{2y} + d_{3y} + d_{4y} + d_{5y}. \qquad (3\text{-}15)$$

(3) Obtemos o vetor $\vec{d}_{tot}$ a partir de suas componentes x e y.

Cálculos: Para resolver a Eq. 3-14, aplicamos a parte correspondente a x da Eq. 3-5 a cada movimento:

$$d_{1x} = (6{,}0\text{ cm})\cos 0° = +6{,}0\text{ cm}$$
$$d_{2x} = (6{,}0\text{ cm})\cos 150° = -5{,}2\text{ cm}$$
$$d_{3x} = (6{,}0\text{ cm})\cos 180° = -6{,}0\text{ cm}$$
$$d_{4x} = (6{,}0\text{ cm})\cos(-120°) = -3{,}0\text{ cm}$$
$$d_{5x} = (6{,}0\text{ cm})\cos 90° = 0.$$

A Eq. 3-14 nos dá

$$\begin{aligned} d_{tot,x} &= +6{,}0\text{ cm} + (-5{,}2\text{ cm}) + (-6{,}0\text{ cm}) \\ &\quad + (-3{,}0\text{ cm}) + 0 \\ &= -8{,}2\text{ cm}. \end{aligned}$$

Analogamente, calculamos as componentes y dos cinco movimentos usando a parte correspondente a y da Eq. 3-5. Os resultados aparecem na Tabela 3-1. Substituindo esses resultados na Eq. 3-15, obtemos:

$$d_{tot,y} = +3{,}8\text{ cm}.$$

O vetor $\vec{d}_{tot}$ e suas componentes x e y aparecem na Fig. 3-17b. Para encontrar o módulo e o ângulo de $\vec{d}_{tot}$ a partir das componentes, usamos a Eq. 3-6. O módulo é dado por

$$\begin{aligned} d_{tot} &= \sqrt{d_{tot,x}^2 + d_{tot,y}^2} \\ &= \sqrt{(-8{,}2\text{ cm})^2 + (3{,}8\text{ cm})^2} = 9{,}0\text{ cm}. \end{aligned}$$

Para encontrar o ângulo (medido a partir do semi-eixo x positivo), calculamos o arco tangente:

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{d_{tot,y}}{d_{tot,x}}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{3{,}8\text{ cm}}{-8{,}2\text{ cm}}\right) = -24{,}86°. \end{aligned}$$

Atenção: Como foi dito na Tática para a Solução de Problemas 3, uma calculadora nem sempre fornece o resultado correto para o arco tangente. A resposta $-24{,}86°$ parece indicar que vetor $\vec{d}_{tot}$ está no quarto quadrante de nosso sistema de coordenadas xy. Entretanto, quando compomos o vetor a partir das componentes (Fig. 3-17b) vemos que $\vec{d}_{tot}$ está no segundo quadrante. Assim, precisamos "corrigir" a resposta da calculadora somando 180°:

TABELA 3-1

Mov.	d_x (cm)	d_y (cm)
1	+6,0	0
2	−5,2	+3,0
3	−6,0	0
4	−3,0	−5,2
5	0	+6,0
total	−8,2	+3,8

$$\theta = -24{,}86° + 180° = 155{,}14° \approx 155°.$$

Assim, o deslocamento $\vec{d}_{tot}$ da formiga, na notação módulo-ângulo, é dado por

$$d_{tot} = 9{,}0\text{ cm a }155°. \qquad \text{(Resposta)}$$

O vetor $\vec{d}_{volta}$, que aponta da formiga para o formigueiro, tem o mesmo módulo que $\vec{d}_{tot}$ e o sentido oposto

(Fig. 3-17*c*). Já temos o ângulo ($-24{,}86° \approx -25°$) para o sentido oposto a $\vec{d}_{tot}$. Assim, $\vec{d}_{volta}$ é dado por

$$d_{volta} = 9{,}0 \text{ cm a } -25°. \quad \text{(Resposta)}$$

Uma formiga do deserto que se afasta mais de 500 m do formigueiro realiza, na verdade, milhares de deslocamentos. Ainda assim, de alguma forma ela é capaz de calcular $\vec{d}_{volta}$ (sem estudar este capítulo).

Exemplo 3-6 Aumente sua capacidade

Aqui está um problema de soma vetorial que *não pode* ser resolvido diretamente em uma calculadora. Uma amiga se afasta de você em linha reta (vetor $\vec{A}$), muda de direção, caminha novamente em linha reta (vetor $\vec{B}$) e pára. Que distância você deve caminhar em linha reta (vetor $\vec{C}$) para chegar até ela?

Os três vetores (que aparecem na Fig. 3-18) estão relacionados pela equação

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}. \quad (3\text{-}16)$$

O vetor $\vec{A}$ tem um módulo de 22,0 m e faz um ângulo de $-47{,}0°$ (sentido horário) com o semi-eixo x positivo. O vetor $\vec{B}$ tem um módulo de 17,0 m e faz um ângulo ϕ (no sentido anti-horário) com o semi-eixo x positivo. Qual é o módulo de $\vec{C}$?

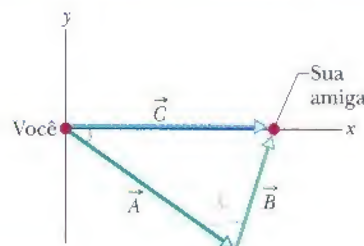


FIG. 3-18 O vetor $\vec{C}$ é igual a $\vec{A} + \vec{B}$.

IDÉIA-CHAVE Não podemos responder à pergunta somando vetorialmente $\vec{A}$ e $\vec{B}$ em uma calculadora, mesmo que ela seja capaz de executar uma instrução como

[módulo de $\vec{A}$ ∠ ângulo de $\vec{A}$] + [módulo de $\vec{B}$ ∠ ângulo de $\vec{B}$]

porque não conhecemos o valor do ângulo ϕ de $\vec{B}$. Entretanto, *podemos* expressar a Eq. 3-16 em termos das componentes em relação ao eixo x e ao eixo y.

Cálculos: Escrevendo a Eq. 3-16 em termos das componentes em relação ao eixo x, temos:

$$C_x = A_x + B_x.$$

Expressando as componentes x de acordo com a parte referente a x da Eq. 3-5 e substituindo os valores conhecidos, obtemos:

$$C \cos 0° = 22{,}0 \cos(-47{,}0°) + 17{,}0 \cos \phi. \quad (3\text{-}17)$$

Esta equação não é suficiente para resolver o problema, já que não podemos calcular o valor de C sem conhecer ϕ.

Vamos escrever a Eq. 3-16 em termos das componentes em relação ao eixo y:

$$C_y = A_y + B_y.$$

Expressando as componentes y de acordo com a parte referente a y da Eq. 3-5 e substituindo os valores conhecidos, obtemos:

$$C \operatorname{sen} 0° = 22{,}0 \operatorname{sen}(-47{,}0°) + 17{,}0 \operatorname{sen} \phi,$$

o que nos dá

$$0 = 22{,}0 \operatorname{sen}(-47{,}0°) + 17{,}0 \operatorname{sen} \phi.$$

Explicitando ϕ, obtemos

$$\phi = \operatorname{sen}^{-1} - \frac{22{,}0 \operatorname{sen}(-47{,}0°)}{17{,}0} = 71{,}17°$$

Substituindo este valor na Eq. 3-17, temos:

$$C = 20{,}5 \text{ m}. \quad \text{(Resposta)}$$

Observe a técnica usada para resolver o problema: Quando chegamos a um beco sem saída ao trabalhar com as componentes x, usamos as componentes y para determinar o valor de ϕ. Em seguida, voltamos a trabalhar com as componentes x para calcular o valor de C.

3-7 | Vetores e as Leis da Física

Até agora, em toda figura em que aparece um sistema de coordenadas os eixos x e y são paralelos às bordas do papel. Assim, quando um vetor $\vec{a}$ é desenhado suas componentes a_x e a_y também são paralelas às bordas do papel (como na Fig. 3-19*a*). A única razão para usar esta orientação dos eixos é que ela parece "apropriada"; não existe uma razão mais profunda. Podemos perfeitamente girar os eixos (mas não o vetor $\vec{a}$) de um ângulo ϕ, como na Fig. 3-19*b*, caso em que as componentes terão novos valores, a'_x e a'_y. Como existe uma infinidade de valores possíveis de ϕ, existe um número infinito de pares possíveis de componentes de $\vec{a}$.

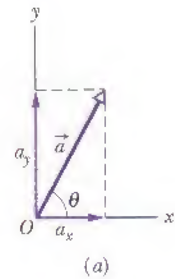
Qual é, então, o par de componentes "correto"? A resposta é que são todos igualmente válidos, já que cada par (com seu sistema de eixos) nos dá apenas uma forma diferente de descrever o mesmo vetor $\vec{a}$; todos produzem o mesmo módulo e a mesma orientação para o vetor. Na Fig. 3-19, temos:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2} \quad (3\text{-}18)$$

e

$$\theta = \theta' + \phi. \quad (3\text{-}19)$$

A verdade é que temos uma grande liberdade para escolher um sistema de coordenadas, já que as relações entre vetores não dependem da localização da origem nem da orientação dos eixos. Isso também se aplica às relações da física; elas são todas independentes da escolha do sistema de coordenadas. Acrescente a isso a simplicidade e a riqueza da linguagem dos vetores, e é fácil compreender por que as leis da física são quase sempre apresentadas nessa linguagem: uma equação, como a Eq. 3-10, pode representar três (ou até mais) relações, como as Eqs. 3-11, 3-12 e 3-13.



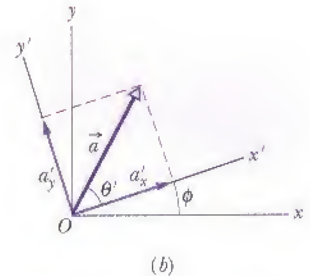


FIG. 3-19 (a) O vetor $\vec{a}$ e suas componentes. (b) O mesmo vetor, com os eixos do sistema de coordenadas girados de um ângulo ϕ.

3-8 | Multiplicação de Vetores*

Existem três formas de multiplicar vetores, mas nenhuma é exatamente igual à multiplicação algébrica. Ao ler esta seção, tenha em mente que uma calculadora o ajudará a multiplicar vetores apenas se você compreender as regras básicas desse tipo de multiplicação.

Multiplicação de um Vetor por um Escalar

Quando multiplicamos um vetor $\vec{a}$ por um escalar s obtemos outro vetor cujo módulo é o produto do módulo de $\vec{a}$ pelo valor absoluto de s, cuja direção é a mesma de $\vec{a}$ e cujo sentido é o mesmo de $\vec{a}$, se s for positivo, e o sentido oposto, se s for negativo. Para dividir $\vec{a}$ por s, multiplicamos $\vec{a}$ por $1/s$.

Multiplicação de um Vetor por um Vetor

Existem duas formas de multiplicar um vetor por um vetor: uma forma (conhecida como *produto escalar*) resulta em um escalar; a outra (conhecida como *produto vetorial*) resulta em um vetor. (Os estudantes costumam confundir as duas formas.)

O Produto Escalar

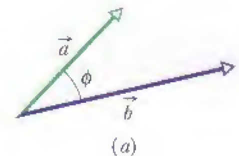
O **produto escalar** dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ da Fig. 3-20a é escrito como $\vec{a}\cdot\vec{b}$ e definido pela equação

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi, \quad (3\text{-}20)$$

onde a é o módulo de $\vec{a}$, b é o módulo de $\vec{b}$ e ϕ é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (ou, mais apropriadamente, entre as orientações de $\vec{a}$ e $\vec{b}$). Na realidade, existem dois ângulos possíveis: ϕ e $360° - \phi$. Qualquer dos dois pode ser usado na Eq. 3-20, já que seus co-senos são iguais.

Note que o lado direito da Eq. 3-20 contém apenas escalares (incluindo o valor de $\cos\phi$). Assim, o produto $\vec{a}\cdot\vec{b}$ no lado esquerdo representa uma grandeza *escalar*, e é lido como "a escalar b".

O produto escalar pode ser considerado como o produto de duas grandezas: (1) o módulo de um dos vetores e (2) a componente escalar do outro em relação ao pri-



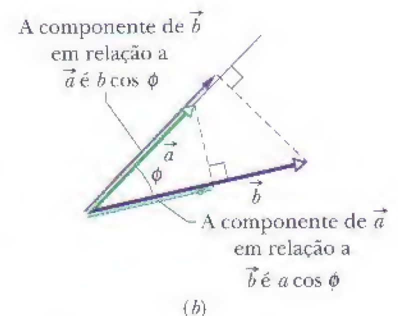


FIG. 3-20 (a) Dois vetores, $\vec{a}$ e $\vec{b}$, formando um ângulo ϕ. (b) Cada vetor tem uma componente na direção do outro vetor.

*Como os assuntos discutidos nesta seção serão aplicados apenas em capítulos posteriores (Capítulo 7, no caso do produto escalar, e Capítulo 11, no caso do produto vetorial), talvez o professor prefira deixar o estudo desta seção para mais tarde.

meiro vetor. Assim, por exemplo, na Fig. 3-19b, $\vec{a}$ tem uma componente escalar $a \cos \phi$ em relação a $\vec{b}$; note que essa componente pode ser determinada traçando uma perpendicular a $\vec{b}$ que passe pela extremidade de $\vec{a}$. Analogamente, $\vec{b}$ possui uma componente escalar $b \cos \phi$ em relação a $\vec{a}$.

Se o ângulo ϕ entre dois vetores é 0°, a componente de um vetor em relação ao outro é máxima, o que também acontece com o produto escalar dos vetores. Se o ângulo é 90°, a componente de um vetor em relação ao outro é nula, o que também acontece com o produto escalar.

Para separar as componentes, a Eq. 3-20 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a \cos \phi)(b) = (a)(b \cos \phi). \tag{3-21}$$

A propriedade comutativa se aplica ao produto escalar, de modo que podemos escrever

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Quando os dois vetores são escritos em termos dos vetores unitários, o produto escalar assume a forma

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}) \cdot (b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}), \tag{3-22}$$

que pode ser expandida de acordo com a propriedade distributiva: calculando os produtos escalares das componentes vetoriais do primeiro vetor pelas componentes vetoriais do segundo vetor, obtemos:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{3-23}$$



TESTE 4 Os vetores $\vec{C}$ e $\vec{D}$ têm módulos de 3 unidades e 4 unidades, respectivamente. Qual é o ângulo entre esses vetores se $\vec{C} \cdot \vec{D}$ é igual (a) a zero, (b) a 12 unidades e (c) a −12 unidades?

Exemplo 3-7

Qual é o ângulo ϕ entre $\vec{a} = 3{,}0\hat{\mathrm{i}} - 4{,}0\hat{\mathrm{j}}$ e $\vec{b} = -2{,}0\hat{\mathrm{i}} + 3{,}0\hat{\mathrm{k}}$? (*Atenção:* Muitos dos cálculos a seguir não são necessários quando se usa uma calculadora, mas você aprenderá mais sobre produtos escalares se, pelo menos no início, executar esses cálculos.)

IDÉIA-CHAVE O ângulo entre as orientações dos dois vetores aparece na definição de seu produto escalar (Eq. 3-20):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi. \tag{3-24}$$

Cálculos: Na Eq. 3-24, a é o módulo de $\vec{a}$, ou seja,

$$a = \sqrt{3{,}0^2 + (-4{,}0)^2} = 5{,}00, \tag{3-25}$$

e b é o módulo de $\vec{b}$, ou seja,

$$b = \sqrt{(-2{,}0)^2 + 3{,}0^2} = 3{,}61. \tag{3-26}$$

Podemos calcular o lado esquerdo da Eq. 3-24 escrevendo os vetores em termos dos vetores unitários e usando a propriedade distributiva:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (3{,}0\hat{\mathrm{i}} - 4{,}0\hat{\mathrm{j}}) \cdot (-2{,}0\hat{\mathrm{i}} + 3{,}0\hat{\mathrm{k}}) \\ &= (3{,}0\hat{\mathrm{i}}) \cdot (-2{,}0\hat{\mathrm{i}}) + (3{,}0\hat{\mathrm{i}}) \cdot (3{,}0\hat{\mathrm{k}}) \\ &\quad + (-4{,}0\hat{\mathrm{j}}) \cdot (-2{,}0\hat{\mathrm{i}}) + (-4{,}0\hat{\mathrm{j}}) \cdot (3{,}0\hat{\mathrm{k}}).\end{aligned}$$

Em seguida, aplicamos a Eq. 3-20 a cada termo desta última expressão. O ângulo entre os vetores unitários do primeiro termo ($\hat{\mathrm{i}}$ e $\hat{\mathrm{i}}$) é de 0°, e nos outros ângulos é de 90°. Assim, temos

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= -(6{,}0)(1) + (9{,}0)(0) + (8{,}0)(0) - (12)(0) \\ &= -6{,}0.\end{aligned}$$

Substituindo este resultado e os resultados das Eqs. 3-25 e 3-26 na Eq. 3-24, obtemos:

$$-6{,}0 = (5{,}00)(3{,}61) \cos \phi,$$

e portanto $$\phi = \cos^{-1} \frac{-6{,}0}{(5{,}00)(3{,}61)} = 109° \approx 110°.$$

(Resposta)

O Produto Vetorial

O **produto vetorial** de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é escrito como $\vec{a}\times\vec{b}$, e resulta em um terceiro vetor, $\vec{c}$, cujo módulo é

$$c = ab \operatorname{sen} \phi, \tag{3-27}$$

onde ϕ é o *menor* dos dois ângulos entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. (É preciso usar o menor dos ângulos entre os vetores porque sen ϕ e sen$(360° - \phi)$ têm sinais opostos.) O produto $\vec{a}\times\vec{b}$ é lido como "*a* vetor *b*".

Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos ou antiparalelos, $\vec{a}\times\vec{b} = 0$. O módulo de $\vec{a}\times\vec{b}$, que pode ser escrito como $|\vec{a}\times\vec{b}|$, é máximo quando $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são mutuamente perpendiculares um ao outro.

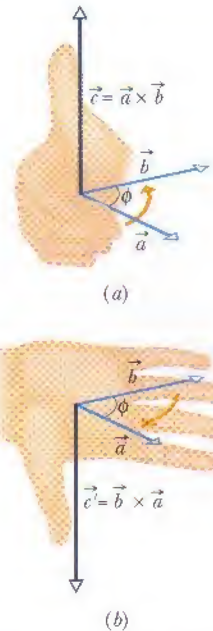


FIG. 3-21 Ilustração da regra da mão direita para produtos vetoriais. (*a*) Empurre o vetor $\vec{a}$ na direção do vetor $\vec{b}$ com os dados da mão direita. O polegar estendido mostra a orientação do vetor $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$. (*b*) O vetor $\vec{b}\times\vec{a}$ tem o sentido oposto ao de $\vec{a}\times\vec{b}$.

A direção de $\vec{c}$ é perpendicular ao plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. A Fig. 3-21*a* mostra como podemos determinar o sentido de $\vec{c} = \vec{b}\times\vec{a}$ usando a chamada **regra da mão direita**. Superponha as origens de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sem mudar suas orientações e imagine uma reta perpendicular ao plano definido pelos dois vetores, passando pela origem comum. Envolva essa linha com a mão *direita* de modo que seus dedos empurrem $\vec{a}$ em direção a $\vec{b}$ ao longo do menor ângulo entre os vetores. O polegar estendido aponta no sentido de $\vec{c}$.

No caso do produto vetorial, a ordem dos vetores é importante. Na Fig. 3-21*b*, estamos determinando o sentido de $\vec{c}' = \vec{b}\times\vec{a}$, de modo que os dedos da mão direita empurram $\vec{b}$ na direção de $\vec{a}$ ao longo do menor ângulo. O polegar neste caso aponta no sentido contrário ao da Fig. 3-21*a*, de modo que $\vec{c}' = -\vec{c}$, ou seja,

$$\vec{b}\times\vec{a} = -(\vec{a}\times\vec{b}). \tag{3-28}$$

Em outras palavras, a propriedade comutativa não se aplica ao produto vetorial.

Em termos dos vetores unitários, podemos escrever

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}) \times (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}), \tag{3-29}$$

que pode ser expandido de acordo com a propriedade distributiva, ou seja, calculando-se o produto vetorial de cada componente do primeiro vetor por todas as componentes do segundo vetor. Os produtos vetoriais dos vetores unitários aparecem no Apêndice E (veja "Produtos de Vetores"). Assim, por exemplo, na expansão da Eq. 3-29 temos:

$$a_x\hat{\imath} \times b_x\hat{\imath} = a_x b_x(\hat{\imath}\times\hat{\imath}) = 0,$$

porque os vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\imath}$ são paralelos e, portanto, seu produto vetorial é zero. Analogamente, temos:

$$a_x\hat{\imath} \times b_y\hat{\jmath} = a_x b_y(\hat{\imath}\times\hat{\jmath}) = a_x b_y\hat{k}.$$

No último passo usamos a Eq. 3-27 para descobrir que o módulo de $\hat{\imath}\times\hat{\jmath}$ é um. (O módulo dos vetores $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ é um, e o ângulo entre eles é de 90°.) Usando a regra da mão direita, descobrimos que o sentido de $\hat{\imath}\times\hat{\jmath}$ é o sentido do semi-eixo *z* positivo, ou seja, o sentido de $\hat{k}$.

Continuando a expandir a Eq. 3-29, é possível mostrar que

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\hat{\imath} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{\jmath} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{k}. \tag{3-30}$$

Também é possível calcular o resultado de um produto vetorial usando um determinante (veja o Apêndice E) ou uma calculadora.

Para verificar se um sistema de coordenadas *xyz* é um sistema dextrogiro, aplique a regra da mão direita ao produto vetorial $\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}$ no sistema dado. Se seus dedos empurrarem $\hat{\imath}$ (semi-eixo *x* positivo) na direção de $\hat{\jmath}$ (semi-eixo *y* positivo) e o polegar estendido apontar no sentido do semi-eixo *z* positivo, é porque o sistema é dextrogiro.



TESTE 5 Os vetores $\vec{C}$ e $\vec{D}$ têm módulos de 3 unidades e 4 unidades, respectivamente. Qual é o ângulo entre esses vetores se o módulo do produto vetorial $\vec{C} \times \vec{D}$ é igual a (a) zero e (b) 12 unidades?

Exemplo 3-8

Na Fig. 3-22, o vetor $\vec{a}$ está no plano xy, tem módulo igual a 18 unidades e uma orientação que faz um ângulo de 250° com o semi-eixo x positivo. O vetor $\vec{b}$ tem módulo de 12 unidades e está orientado ao longo do semi-eixo z positivo. Qual é o produto vetorial $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$?

IDÉIA-CHAVE Quando conhecemos dois vetores na notação módulo-ângulo podemos calcular o módulo do produto vetorial usando a Eq. 3-27 e a orientação do produto vetorial usando a regra da mão direita da Fig. 3-21.

Cálculos: O módulo do produto vetorial é dado por

$$c = ab \text{ sen } \phi = (18)(12)(\text{sen } 90°) = 216. \quad \text{(Resposta)}$$

Para determinar a orientação do produto vetorial na Fig. 3-22, coloque os dedos da mão direita em torno de uma reta perpendicular ao plano de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (a reta na qual se encontra o vetor $\vec{c}$) de modo que seus dedos empurrem o vetor $\vec{a}$ na direção de $\vec{b}$; seu polegar estendido fornece a orientação de $\vec{c}$. Assim, como mostra a figura, $\vec{c}$ está no plano xy. Como a direção de $\vec{c}$ é perpendicular à direção de $\vec{a}$, o vetor faz um ângulo de

$$250° - 90° = 160° \quad \text{(Resposta)}$$

com o semi-eixo x positivo.

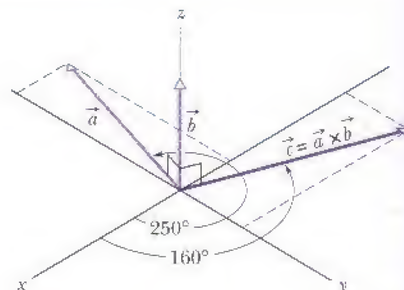


FIG. 3-22 O vetor $\vec{c}$ (no plano xy) é o produto vetorial dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Exemplo 3-9

Se $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ e $\vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$, determine $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$?

IDÉIA-CHAVE Quando dois vetores estão expressos em termos dos vetores unitários, podemos determinar o produto vetorial usando a lei distributiva.

Cálculos: Temos:

$$\vec{c} = (3\hat{i} - 4\hat{j}) \times (-2\hat{i} + 3\hat{k})$$
$$= 3\hat{i} \times (-2\hat{i}) + 3\hat{i} \times 3\hat{k} + (-4\hat{j}) \times (-2\hat{i}) + (-4\hat{j}) \times 3\hat{k}.$$

Podemos calcular os valores dos diferentes termos usando a Eq. 3-27 e determinando a orientação dos vetores com o auxílio da regra da mão direita. No primeiro termo, o ângulo ϕ entre os dois vetores envolvidos no produto vetorial é 0; nos outros três termos, $\phi = 90°$. O resultado é o seguinte:

$$\vec{c} = -6(0) + 9(-\hat{j}) + 8(-\hat{k}) - 12\hat{i}$$
$$= -12\hat{i} - 9\hat{j} - 8\hat{k}. \quad \text{(Resposta)}$$

O vetor $\vec{c}$ é perpendicular a $\vec{a}$ e $\vec{b}$, o que pode ser demonstrado observando que $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ e $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$, ou seja, não existem componentes de $\vec{c}$ em relação a $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

***Tática 5:** Erros Freqüentes no Cálculo de Produtos Vetoriais* Vários erros são freqüentes no cálculo de produtos vetoriais. (1) Deixar de posicionar os vetores com a origem no mesmo ponto em comum quando uma figura mostra a origem de um dos vetores coincidindo com a extremidade do outro; você deve deslocar mentalmente um dos vetores para a posição apropriada sem modificar a direção e o sentido (ou, melhor ainda, refazer o desenho). (2) Usar a mão esquerda ao aplicar a regra da mão direita quando a última está ocupada com uma calculadora ou com um lápis. (3) Não respeitar o sentido do primeiro vetor para o segundo quando a orientação dos vetores exige um movimento complicado da mão para aplicar a regra mão direita. Às vezes isso ocorre quando você tenta realizar mentalmente a manobra em vez de mover realmente a mão. (4) Deixar de usar um sistema de coordenadas dextrogiro. A Fig. 3-14 mostra um desenho em perspectiva de um sistema de coordenadas desse tipo.

REVISÃO E RESUMO

Escalares e Vetores *Grandezas escalares*, como a temperatura, possuem apenas um valor. São especificadas por um número com uma unidade (10°C, por exemplo) e obedecem às regras da aritmética e da álgebra comum. As *grandezas vetoriais*,

como o deslocamento, possuem um módulo e uma orientação (5 m para cima, por exemplo), e obedecem às regras da álgebra vetorial.

Soma Geométrica de Vetores Dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ podem ser somados geometricamente desenhando-os na mesma escala e posicionando-os com a extremidade de um na origem do outro. O vetor que liga a origem do primeiro à extremidade do segundo é o vetor soma, $\vec{s}$. Para subtrair $\vec{b}$ de $\vec{a}$ invertemos o sentido de $\vec{b}$ para obter $-\vec{b}$ e somamos $-\vec{b}$ a $\vec{a}$. A soma vetorial é comutativa e associativa.

Componentes de um Vetor As *componentes* (escalares) a_x e a_y de um vetor bidimensional $\vec{a}$ em relação ao eixos de um sistema de coordenadas xy são obtidas traçando retas perpendiculares aos eixos a partir da origem e da extremidade de $\vec{a}$. As componentes são dadas por

$$a_x = a\cos\theta \text{ e } a_y = a \operatorname{sen}\theta, \tag{3-5}$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{a}$ e o semi-eixo x positivo. O sinal algébrico de uma componente indica seu sentido em relação ao eixo correspondente. Dadas as componentes, podemos encontrar o módulo e a orientação de um vetor $\vec{a}$ através das equações

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \text{ e } \tan\theta = \frac{a_y}{a_x}. \tag{3-6}$$

Notação com Vetores Unitários Os *vetores unitários* $\hat{\text{i}}$, $\hat{\text{j}}$ e $\hat{\text{k}}$ têm módulo unitário e sentido igual ao sentido positivo dos eixos x, y e z, respectivamente, em um sistema de coordenadas dextrogiro. Podemos expressar um vetor $\vec{a}$ em termos de vetores unitários como

$$\vec{a} = a_x\hat{\text{i}} + a_y\hat{\text{j}} + a_z\hat{\text{k}}, \tag{3-7}$$

onde $a_x\hat{\text{i}}$, $a_y\hat{\text{j}}$ e $a_z\hat{\text{k}}$ são as **componentes vetoriais** de $\vec{a}$, e a_x, a_y e az são as **componentes escalares**.

Soma de Vetores na Forma de Componentes Para somar vetores na forma de componentes, usamos as regras

$$r_x = a_x + b_x \quad r_y = a_y + b_y \quad r_z = a_z + b_z. \quad \text{(3-11 a 3-13)}$$

onde $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são os vetores a serem somados e $\vec{r}$ é o vetor soma.

Produto de um Escalar por um Vetor O produto de um escalar s por um vetor $\vec{v}$ é um vetor de módulo sv com a mesma orientação de $\vec{v}$ se s é positivo e com a orientação oposta se s é negativo. Para dividir $\vec{v}$ por s, multiplicamos $\vec{v}$ por $1/s$.

O Produto Escalar O **produto escalar** de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é representado por $\vec{a}\cdot\vec{b}$ e é igual à grandeza *escalar* dada por

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi, \tag{3-20}$$

onde ϕ é o menor dos ângulos entre as direções de $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O produto escalar é o produto do módulo de um dos vetores pela componente escalar do outro em relação ao primeiro. Em termos dos vetores unitários,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{\text{i}} + a_y\hat{\text{j}} + a_z\hat{\text{k}})\cdot(b_x\hat{\text{i}} + b_y\hat{\text{j}} + b_z\hat{\text{k}}), \tag{3-22}$$

que pode ser expandida de acordo com a lei distributiva. Note que $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$.

O Produto Vetorial O **produto vetorial** de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, representado por $\vec{a}\times\vec{b}$, é um *vetor* $\vec{c}$ cujo módulo c é dado por

$$c = ab \operatorname{sen}\phi, \tag{3-27}$$

onde ϕ é o menor dos ângulos entre as direções de $\vec{a}$ e $\vec{b}$. A orientação de $\vec{c}$ é perpendicular ao plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e é dada pela regra da mão direita, como mostra a Fig. 3-21. Note que $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$. Em termos dos vetores unitários,

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\hat{\text{i}} + a_y\hat{\text{j}} + a_z\hat{\text{k}})\times(b_x\hat{\text{i}} + b_y\hat{\text{j}} + b_z\hat{\text{k}}), \tag{3-29}$$

que pode ser expandida de acordo com a lei distributiva.

PERGUNTAS

1 Como a mascote da Universidade da Flórida é um jacaré, a equipe de golfe da universidade joga em um campo onde existe um lago com jacarés. A Fig. 3-23 mostra uma vista aérea da região em torno de um dos buracos do campo com um sistema de coordenadas xy superposto. As tacadas da equipe devem levar a bola da origem até o buraco, que está nas coordenadas (8 m, 12 m), mas a bola pode sofrer apenas os seguintes deslocamentos, que podem ser usados mais de uma vez:



FIG. 3-23 Pergunta 1.

$$\vec{d}_1 = (8\text{ m})\hat{\text{i}} + (6\text{ m})\hat{\text{j}}, \quad \vec{d}_2 = (6\text{ m})\hat{\text{j}}, \quad \vec{d}_3 = (8\text{ m})\hat{\text{i}}.$$

O lago está nas coordenadas (8 m, 6 m). Se um membro da equipe lança a bola no lago, é imediatamente transferido para a Universidade Estadual da Flórida, a eterna rival. Que seqüência de deslocamentos deve ser usada por um membro do time para evitar o lago?

2 A Eq. 3-2 mostra que a soma de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é comutativa. Isso significa que a subtração é comutativa, ou seja, que $\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$?

3 A soma dos módulos de dois vetores pode ser igual ao módulo da soma dos mesmos vetores? Justifique sua resposta.

4 Os dois vetores da Fig. 3-24 estão em um plano xy. Determine os sinais das componentes x e y, respectivamente, de (a) $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$; (b) $\vec{d}_1 - \vec{d}_2$; (c) $\vec{d}_2 - \vec{d}_1$.

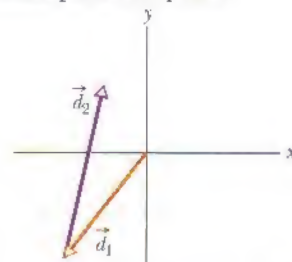


FIG. 3-24 Pergunta 4.

5 Se $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c})$, é verdade que (a) $\vec{a} + (-\vec{d}) = \vec{c} + (-\vec{b})$; (b) $\vec{a} = (-\vec{b}) + \vec{d} + \vec{c}$; (c) $\vec{c} + (-\vec{d}) = \vec{a} + \vec{b}$?

6 Descreva dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tais que

(a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ e $a + b = c$;

(b) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$;

(c) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ e $a^2 + b^2 = c^2$.

7 Quais dos sistemas de eixos na Fig. 3-25 são sistemas de coordenadas dextrogiros? Como de costume, a letra que identifica o eixo está no semi-eixo positivo.

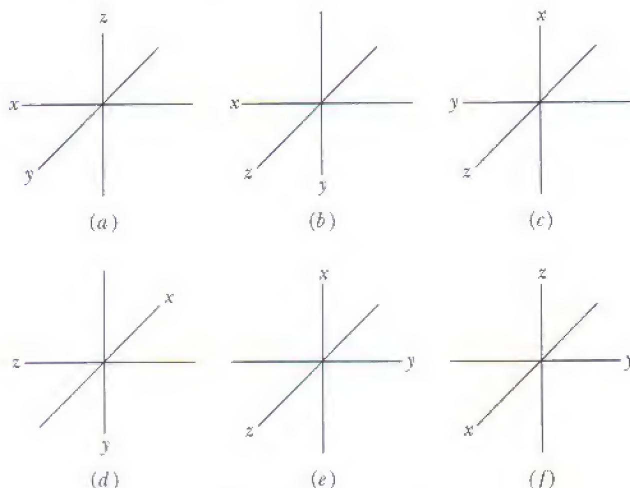


FIG. 3-25 Pergunta 7.

8 A Fig. 3-26 mostra um vetor $\vec{A}$ e outros quatro vetores de mesmo módulo e orientações diferentes. (a) Quais dos outros quatro vetores têm o mesmo produto escalar com $\vec{A}$? (b) Quais têm um produto escalar com $\vec{A}$ negativo?

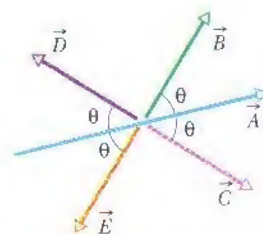


FIG. 3-26 Pergunta 8.

9 Se $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ e $\vec{v}$ é perpendicular a $\vec{B}$, qual é a orientação de $\vec{B}$ nas três situações da Fig. 3-27 se a constante q é (a) positiva e (b) negativa?

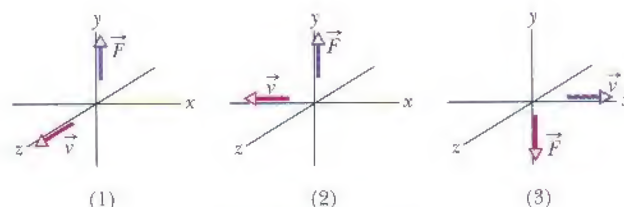


FIG. 3-27 Pergunta 9.

10 Se $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{b}$ é necessariamente igual a $\vec{c}$?

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 3-4 Componentes de Vetores

•1 A componente x do vetor $\vec{A}$ é $-25{,}0$ m e a componente y é $+40{,}0$ m. (a) Qual é o módulo de $\vec{A}$? (b) Qual é o ângulo entre a orientação de $\vec{A}$ e o semi-eixo x positivo?

•2 Expresse os seguintes ângulos em radianos: (a) 20,0°; (b) 50,0°; (c) 100°. Converta os seguintes ângulos para graus: (d) 0,330 rad; (e) 2,10 rad; (f) 7,70 rad.

•3 Quais são (a) a componente x e (b) a componente y de um vetor $\vec{a}$ do plano xy que faz um ângulo de 250° no sentido anti-horário como o semi-eixo x positivo e tem um módulo de 7,3 m?

•4 Na Fig. 3-28, uma máquina pesada é erguida com o auxílio de uma rampa que faz um ângulo $\theta = 20{,}0°$ com a horizontal, na qual a máquina percorre uma distância $d = 12{,}5$ m. (a) De quanto a máquina foi erguida verticalmente? (b) Qual é a distância vertical percorrida pela máxima? (c) Qual é a distância horizontal?

•5 O objetivo de um navio é chegar a um porto situado 120 km ao norte do ponto de partida, mas uma tempestade inesperada o leva para um local situado 100 km a leste do ponto de partida. (a) Que distância o navio deve percorrer e (b) que rumo deve tomar para chegar ao destino?

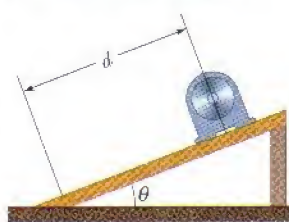


FIG. 3-28 Problema 4.

•6 Um vetor deslocamento $\vec{r}$ no plano xy tem 15 m de comprimento e faz um ângulo $\theta = 30°$ com o semi-eixo x positivo, como mostra a Fig. 3-29. Determine (a) a componente x e (b) a componente y do vetor.

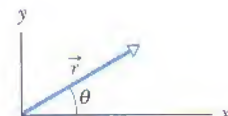


FIG. 3-29 Problema 6.

••7 As dimensões de uma sala são 3,00 m (altura) × 3,70 m × 4,30 m. Uma mosca parte de um canto da sala e vai pousar em um canto diagonalmente oposto. (a) Qual é o módulo do deslocamento da mosca? (b) A distância percorrida pode ser menor que este valor? (c) Pode ser maior? (d) Pode ser igual? (e) Escolha um sistema de coordenadas apropriado e expresse as componentes do vetor deslocamento em termos de vetores unitários. (f) Se a mosca caminhar, em vez de voar, qual o comprimento do caminho mais curto para o outro canto? (*Sugestão:* O problema pode ser resolvido sem fazer cálculos complicados. A sala é como uma caixa; desdobre as paredes para representá-las em um único plano antes de procurar uma solução).

seção 3-6 Soma de Vetores através de Suas Componentes

•8 Um carro viaja 50 km para leste, 30 km para o norte e 25 km em uma direção 30° a leste do norte. Desenhe o diagrama vetorial e determine (a) o módulo e (b) o ângulo do deslocamento total do carro em relação ao ponto de partida.

•9 (a) Determine a soma $\vec{a} + \vec{b}$, em termos de vetores unitários, para $\vec{a} = (4{,}0 \text{ m})\hat{i} + (3{,}0 \text{ m})\hat{j}$ e $\vec{b} = (-13{,}0 \text{ m})\hat{i} + (7{,}0 \text{ m})\hat{j}$. Determine (b) o módulo e (c) o sentido de $\vec{a} + \vec{b}$.

•**10** Uma pessoa caminha da seguinte forma: 3,1 km para o norte, 2,4 km para oeste e 5,2 km para o sul. (a) Desenhe o diagrama vetorial que representa este movimento. (b) Que distância e (c) em que direção deve voar um pássaro em linha reta do mesmo ponto de partida ao mesmo ponto de chegada?

•**11** Uma pessoa deseja chegar a um ponto que está a 3,40 km de sua localização atual, em uma direção 35,0° ao norte do leste. As ruas por onde pode passar são todas na direção norte-sul ou na direção leste-oeste. Qual é a menor distância que a pessoa precisa percorrer para chegar ao destino?

•**12** Para os vetores $\vec{a} = (3,0\text{ m})\hat{i} + (4,0\text{ m})\hat{j}$ e $\vec{b} = (5,0\text{ m})\hat{i} + (-2,0\text{ m})\hat{j}$, determine $\vec{a} + \vec{b}$ (a) em termos de vetores unitários e em termos (b) do módulo e (c) do ângulo (em relação a $\hat{i}$). Determine $\vec{b} - \vec{a}$ (d) em termos de vetores unitários e em termos (e) do módulo e (f) do ângulo.

•**13** Dois vetores são dados por

$$\vec{a} = (4,0\text{ m})\hat{i} - (3,0\text{ m})\hat{j} + (1,0\text{ m})\hat{k}$$

e

$$\vec{b} = (-1,0\text{ m})\hat{i} + (1,0\text{ m})\hat{j} + (4,0\text{ m})\hat{k}.$$

Em termos de vetores unitários, determine (a) $\vec{a} + \vec{b}$, (b) $\vec{a} - \vec{b}$ e (c) um terceiro vetor, $\vec{c}$, tal que $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$.

•**14** Determine as componentes (a) x, (b) y e (c) z da soma $\vec{r}$ dos deslocamentos $\vec{c}$ e $\vec{d}$ cujas componentes em metros ao longo dos três eixos são $c_x = 7,4$, $c_y = -3,8$, $c_z = -6,1$, $d_x = 4,4$, $d_y = -2,0$, $d_z = 3,3$.

•**15** Uma formiga, enlouquecida pelo sol em um dia quente, sai correndo em um plano xy. As componentes $(x; y)$ de quatro corridas consecutivas em linha reta são as seguintes, todas em centímetros: (30,0; 40,0), (b_x; −70,0), (−20,0; c_y);(−80,0; −70,0). O deslocamento resultante das quatro corridas tem componentes (−140; −20,0). Determine (a) b_x e (b) c_y. Determine (c) o módulo e (d) o ângulo (em relação ao semi-eixo x positivo) do deslocamento total.

•**16** Na soma $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$, o vetor $\vec{A}$ tem um módulo de 12,0 m e um ângulo de 40,0° no sentido anti-horário em relação ao semi-eixo x positivo, e o vetor $\vec{C}$ tem um módulo de 15,0 m e um ângulo de 20,0° no sentido anti-horário em relação ao semi-eixo x negativo. Determine (a) o módulo de $\vec{B}$ e (b) o ângulo de $\vec{B}$ em relação ao semi-eixo x positivo.

•**17** Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ na Fig. 3-30 têm módulos iguais a 10,0 m e os ângulos são $\theta_1 = 30°$ e $\theta_2 = 105°$. Determine as componentes (a) x e (b) y da soma vetorial $\vec{r}$ dos dois vetores, (c) o módulo de $\vec{r}$ e (d) o ângulo que $\vec{r}$ faz com o semi-eixo x positivo.

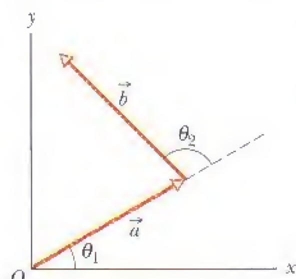


FIG. 3-30 Problema 17.

•**18** Você deve executar quatro deslocamentos sucessivos na superfície plana num deserto, começando na origem de um sistema de coordenadas xy e terminando nas coordenadas (−140 m, 30 m). As componentes de seus deslocamentos são, respectivamente, as seguintes, em metros: (20, 60), (b_x, −70), (−20, c_y) e (−60, −70). Determine (a) b_x e (b) c_y. Determine (c) o módulo e (d) o ângulo (em relação ao semi-eixo x positivo) do deslocamento total.

•**19** Três vetores, $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, têm módulos iguais a 50 m e estão em um plano xy. Suas orientações em relação ao sentido semi-eixo x positivo são 30°, 195° e 315°, respectivamente. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo do vetor $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ e (c) o módulo e (d) o ângulo de $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$. Determine (e) o módulo e (f) o ângulo de um quarto vetor, $\vec{d}$, tal que $(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{c} + \vec{d}) = 0$.

•**20** (a) Qual é a soma dos quatro vetores seguintes em termos de vetores unitários? (b) Para esta soma, quais são (b) o módulo, (c) o ângulo em graus e (d) o ângulo em radianos?

$\vec{E}$: 6,00 m a + 0,900 rad	$\vec{F}$: 5,00 m a − 75,0°
$\vec{G}$: 4,00 m a + 1,20 rad	$\vec{H}$: 6,00 m a − 210°

•**21** Em um jogo de xadrez ao ar livre, no qual as peças ocupam o centro de quadrados com 1,00 m de lado, um cavalo é movido da seguinte forma: (1) dois quadrados para a frente e um quadrado para a direita; (2) dois quadrados para a esquerda e um quadrado para a frente; (3) dois quadrados para a frente e um quadrado para a esquerda. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação ao sentido "para a frente") do deslocamento total do cavalo após a série de três movimentos.

••**22** Um explorador polar foi surpreendido por uma nevasca, que reduziu a visibilidade a praticamente zero, quando retornava ao acampamento. Para chegar ao acampamento ele deveria caminhar 5,6 km para o norte, mas quando o tempo melhorou percebeu que na realidade havia caminhado 7,8 km em uma direção 50° ao norte do leste. (a) Que distância e (b) em que sentido deve caminhar para voltar à base?

••**23** O oásis B está 25 km a leste do oásis A. Partindo do oásis A, um camelo percorre 24 km em uma direção 15° ao sul do leste e 8,0 km para o norte. A que distância o camelo está do oásis B?

••**24** Dois besouros correm em um deserto plano, partindo do mesmo ponto. O besouro 1 corre 0,50 m para leste e 0,80 m em uma direção 30° ao norte do leste. O besouro 2 corre 1,6 m em uma direção 40° ao leste do norte e depois corre em outra direção. Quais devem ser (a) o módulo e (b) o sentido da segunda corrida do segundo besouro para que ele termine na mesma posição final que o primeiro besouro?

••**25** Se $\vec{B}$ é somado a $\vec{C} = 3,0\hat{i} + 4,0\hat{j}$, o resultado é um vetor no sentido do semi-eixo y positivo, com um módulo igual ao de $\vec{C}$. Qual é o módulo de $\vec{B}$?

••**26** O vetor $\vec{A}$, paralelo ao eixo x, deve ser somado ao vetor $\vec{B}$, que tem um módulo de 7,0 m. A soma é um vetor paralelo ao eixo y, com um módulo 3 vezes maior que o de $\vec{A}$. Qual é o módulo de $\vec{A}$?

••**27** Para se orientarem, as formigas de jardim costumam criar uma rede de trilhas marcadas por feromônios. Partindo do formigueiro, cada uma dessas trilhas se bifurca repetidamente em duas trilhas que formam um ângulo de 60°. Quando uma formiga perdida encontra uma trilha, pode saber em que direção fica o formigueiro ao chegar ao primeiro ponto de bifurcação. Se estiver se afastando do formigueiro, encontrará duas trilhas que formam ângulos pequenos com a direção em que estava se movendo, 30° para a esquerda e 30° para a direita. Se estiver se aproximando do formigueiro, encontrará apenas uma trilha com essa característica, 30° para a esquerda ou 30° para a direita. A Fig. 3-31 mostra uma rede de trilhas típica, com segmentos de reta de 2,0 cm de comprimento e bifurcações simétricas de 60°. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação ao semi-eixo x positivo) do deslocamento até o formigueiro (encontre-o na figura) de uma formiga que entra na rede de trilhas no ponto A. Determine (c) o módulo e (d) o ângulo de uma formiga que entra na rede de trilhas no ponto B.

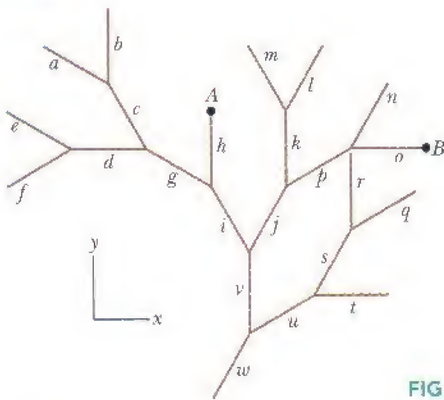


FIG. 3-31 Problema 27.

••**28** São dados dois vetores:

$$\vec{a} = (4{,}0\ \text{m})\hat{i} - (3{,}0\ \text{m})\hat{j} \text{ e } \vec{b} = (6{,}0\ \text{m})\hat{i} - (8{,}0\ \text{m})\hat{j}.$$

Determine (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação a $\hat{i}$) de $\vec{a}$. Determine (c) o módulo e (d) o ângulo de $\vec{b}$. Determine (e) o módulo e (f) o ângulo de $\vec{a} + \vec{b}$; (g) o módulo e (h) o ângulo de $\vec{b} - \vec{a}$; (i) o módulo e (j) o ângulo de $\vec{a} - \vec{b}$. (k) Determine o ângulo entre as direções de $\vec{b} - \vec{a}$ e $\vec{a} - \vec{b}$.

••**29** Se $\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = 5\vec{d}_3$, $\vec{d}_1 - \vec{d}_2 = 3\vec{d}_3$ e $\vec{d}_3 = 2\hat{i} + 4\hat{j}$, determine em termos dos vetores unitários, (a) $\vec{d}_1$ e (b) $\vec{d}_2$.

••**30** Determine a soma dos quatro vetores a seguir (a) em termos dos vetores unitários e em termos (b) do módulo e (c) do ângulo.

$\vec{A} = (2{,}00\ \text{m})\hat{i} + (3{,}00\ \text{m})\hat{j}$ $\quad$ $\vec{B}$: 4,00 m, a +65,0°

$\vec{C} = (-4{,}00\ \text{m})\hat{i} + (-6{,}00\ \text{m})\hat{j}$ $\quad$ $\vec{D}$: 5,00 m, a −235°

•••**31** Na Fig. 3.32, um cubo de aresta a tem um de seus vértices posicionado na origem de um sistema de coordenadas xyz. A *diagonal do cubo* é uma reta que vai de um vértice a outro do cubo, passando pelo centro. Em termos dos vetores unitários, qual é a diagonal do cubo que passa pelo vértice cujas coordenadas são (a) (0, 0, 0), (b) (a, 0, 0) (c) (0, a, 0) e (d) (a, a, 0)? (e) Determine os ângulos que as diagonais do cubo fazem com as arestas vizinhas. (f) Determine o comprimento das diagonais do cubo em termos de a.

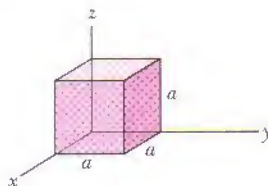


FIG. 3-32 Problema 31.

seção 3-7 Vetores e as Leis da Física

•**32** Na Fig. 3-33, um vetor $\vec{a}$ com um módulo de 17,0 m faz um ângulo θ = 56,0° no sentido anti-horário como o semi-eixo x positivo. Quais são as componentes (a) a_x e (b) a_y do vetor? Um segundo sistema de coordenadas está inclinado de um ângulo θ' = 18° em relação ao primeiro. Quais são as componentes (c) a'_x e (d) a'_y neste novo sistema de coordenadas?

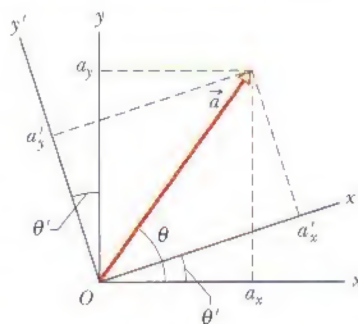


FIG. 3-33 Problema 32.

seção 3-8 Multiplicação de Vetores

•**33** Dois vetores, $\vec{r}$ e $\vec{s}$, estão no plano xy. Seus módulos são 4,50 unidades e 7,30 unidades, respectivamente, e eles estão orientados a 320° e 85,0°, respectivamente, no sentido anti-horário em relação ao semi-eixo x positivo. Quais são os valores de (a) $\vec{r} \cdot \vec{s}$ e (b) $\vec{r} \times \vec{s}$?

•**34** Se $\vec{d}_1 = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ e $\vec{d}_2 = -5\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, determine $(\vec{d}_1 + \vec{d}_2) \cdot (\vec{d}_1 \times 4\vec{d}_2)$

•**35** Três vetores são dados por $\vec{a} = 3{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} - 2{,}0\hat{k}$, $\vec{b} = -1{,}0\hat{i} - 4{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$ e $\vec{c} = 2{,}0\hat{i} + 2{,}0\hat{j} + 1{,}0\hat{k}$. Determine (a) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, (b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$ e (c) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$.

•**36** Dois vetores são dados por $\vec{a} = 3{,}0\hat{i} + 5{,}0\hat{j}$ e $\vec{b} = 2{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j}$. Determine (a) $\vec{a} \times \vec{b}$, (b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, (c) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ e (d) a componente de $\vec{a}$ em relação a $\vec{b}$. [*Sugestão:* Para resolver o item (d) considere a Eq. 3-20 e a Fig. 3-20.]

•**37** Para os vetores da Fig. 3-34, com a = 4, b = 3 e c = 5, determine (a) o módulo e (b) a orientação de $\vec{a} \times \vec{b}$, (c) o módulo e (d) a orientação de $\vec{a} \times \vec{c}$ e (e) o módulo e (f) orientação de $\vec{b} \times \vec{c}$. (Embora exista, o eixo z não é mostrado na figura.)

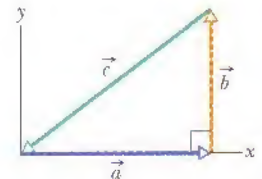


FIG. 3-34 Problemas 37 e 50.

••**38** O deslocamento $\vec{d}_1$ está no plano yz, faz um ângulo de 63,0° com o semi-eixo y positivo, tem uma componente z positiva e um módulo de 4,50 m. O deslocamento $\vec{d}_2$ está no plano xz, faz um ângulo de 30,0° com o semi-eixo x positivo, tem uma componente z positiva e um módulo de 1,40 m. Determine (a) $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2$; (b) $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2$ e (c) o ângulo entre $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$.

••**39** Use a definição de produto escalar, $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\theta$, e o fato de que $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$ para calcular o ângulo entre os dois vetores dados por $\vec{a} = 3{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 3{,}0\hat{k}$ e $\vec{b} = 2{,}0\hat{i} + 1{,}0\hat{j} + 3{,}0\hat{k}$.

••**40** Determine $3\vec{C} \cdot (2\vec{A} \times \vec{B})$ para os três vetores a seguir.

$\vec{A} = 2{,}00\hat{i} + 3{,}00\hat{j} - 4{,}00\hat{k}$

$\vec{B} = -3{,}00\hat{i} + 4{,}00\hat{j} + 2{,}00\hat{k}$ $\quad$ $\vec{C} = 7{,}00\hat{i} - 8{,}00\hat{j}$

••**41** O vetor $\vec{A}$ tem módulo igual a 6,00 unidades, o vetor $\vec{B}$ tem módulo igual a 7,00 unidades e $\vec{A} \cdot \vec{B} = 14{,}0$. Qual é o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$?

••**42** No produto $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, faça q = 2,

$$\vec{v} = 2{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j} + 6{,}0\hat{k} \text{ e } \vec{F} = 4{,}0\hat{i} - 20\hat{j} + 12\hat{k}.$$

Determine $\vec{B}$, em termos dos vetores unitários, para $B_x = B_y$.

••**43** Os três vetores na Fig. 3-35 têm módulos a = 3,00 m, b = 4,00 m e c = 10,0 m; θ = 30,0°. Determine (a) a componente x e (b) a componente y de $\vec{a}$; (c) a componente x e (d) a componente y de $\vec{b}$; (e) a componente x e (f) a componente y de $\vec{c}$. Se $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$, quais são os valores de (g) p e (h) q?

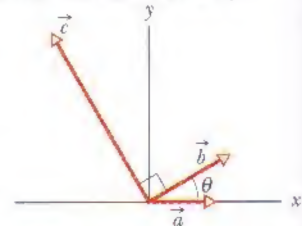


FIG. 3-35 Problema 43.

••**44** Em um encontro de mímicos, o mímico 1 se desloca de $\vec{d}_1 = (4{,}0\ \text{m})\hat{i} + (5{,}0\ \text{m})\hat{j}$ e o mímico 2 se desloca de $\vec{d}_2 = (-3{,}0\ \text{m})\hat{i} + (4{,}0\ \text{m})\hat{j}$. Determine (a) $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2$, (b) $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2$, (c) $(\vec{d}_1 + \vec{d}_2) \cdot \vec{d}_2$ e (d) a componente de $\vec{d}_1$ em relação a $\vec{d}_2$. [*Sugestão:* Para resolver o item (d), veja a Eq. 3-20 e a Fig. 3-20.]

Problemas Adicionais

45 Uma *falha* em uma rocha é uma ruptura ao longo da qual faces opostas da rocha deslizaram uma em relação à outra. Na Fig.

3-36, os pontos A e B coincidiam antes de a rocha em primeiro plano deslizar para a direita. O deslocamento total $\overrightarrow{AB}$ está no plano da falha. A componente horizontal de $\overrightarrow{AB}$ é o *rejeito horizontal AC*. A componente de $\overrightarrow{AB}$ dirigida para baixo no plano da falha é o *rejeito de mergulho AD*. (a) Qual é o módulo do deslocamento total $\overrightarrow{AB}$ se o rejeito horizontal é 22,0 m e o rejeito de mergulho é 17,0 m? (b) Se o plano da falha faz um ângulo $\phi = 52.0°$ com a horizontal, qual é a componente vertical de $\overrightarrow{AB}$?

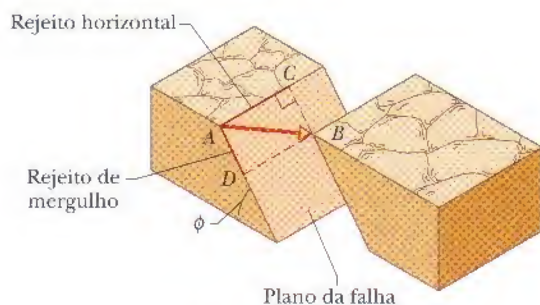


FIG. 3-36 Problema 45.

46 Dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm componentes, em metros, $a_x = 3{,}2$, $a_y = 1{,}6$, $b_x = 0{,}50$ e $b_y = 4{,}5$. (a) Determine o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Existem dois vetores no plano xy que são perpendiculares a $\vec{a}$ e têm um módulo de 5,0 m. Um deles, o vetor $\vec{c}$, tem uma componente x positiva; o outro, o vetor $\vec{d}$, tem uma componente x negativa. Determine (b) a componente x e (c) a componente y de $\vec{c}$; (d) a componente x e (e) a componente y de $\vec{d}$.

47 Um vetor $\vec{a}$ de módulo 10 unidades e outro vetor $\vec{b}$ de módulo 6,0 unidades fazem um ângulo de 60°. Determine (a) o produto escalar dos dois vetores e (b) o módulo do produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$.

48 O vetor $\vec{a}$ tem módulo 5,0 m e aponta para leste. O vetor $\vec{b}$ tem módulo 4,0 m e aponta na direção 35° a oeste do norte. Determine (a) o módulo e (b) a orientação do vetor $\vec{a} + \vec{b}$. Determine (c) o módulo e (d) a orientação do vetor $\vec{b} - \vec{a}$. (e) Desenhe os diagramas vetoriais correspondentes às duas combinações de vetores.

49 Uma partícula sofre três deslocamentos sucessivos em um plano: $\vec{d}_1$, 4,00 m para sudoeste, $\vec{d}_2$, 5,00 m para leste e $\vec{d}_3$, 6,00 m em uma direção 60,0° ao norte do leste. Use um sistema de coordenadas com o eixo y apontando para o norte e o eixo x apontando para o leste. Determine (a) a componente x e (b) a componente y de $\vec{d}_1$. Determine (c) a componente x e (d) a componente y de $\vec{d}_2$. Determine (e) a componente x e (f) a componente y de $\vec{d}_3$. Considere o deslocamento *total* da partícula após os três deslocamentos. Determine (g) a componente x, (h) a componente y, (i) o módulo e (j) a orientação do deslocamento total. Para que a partícula volte ao ponto de partida (k), que distância deve percorrer e (l) em que direção deve se deslocar?

50 Para os vetores da Fig. 3.34, com $a = 4$, $b = 3$ e $c = 5$, calcule (a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, (b) $\vec{a} \cdot \vec{c}$ e (c) $\vec{b} \cdot \vec{c}$.

51 Um barco a vela parte do lado americano do lago Erie para um ponto no lado canadense, 90,0 km ao norte. O navegante, contudo, termina 50,0 km a leste do ponto de partida. (a) Que distância e (b) em que sentido deve navegar para chegar ao ponto desejado?

52 Determine a soma dos quatro vetores a seguir (a) em termos dos vetores unitários e em termos (b) do módulo e (c) do ângulo em relação ao semi-eixo x positivo.

$\vec{P}$: 10,0 m, 25,0°, sentido anti-horário em relação a $+x$

$\vec{Q}$: 12,0 m, 10,0°, sentido anti-horário em relação a $+y$

$\vec{R}$: 8,00 m, 20,0°, sentido horário em relação a $-y$

$\vec{S}$: 9,00 m, 40,0°, sentido anti-horário em relação a $-y$

53 Os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ estão no plano xy. $\vec{B}$ tem módulo 8,00 e ângulo 130°; $\vec{B}$ tem componentes $B_x = -7{,}72$ e $B_y = -9{,}20$. Determine os ângulos entre o semi-eixo y negativo e (a) o vetor $\vec{A}$, (b) o vetor $\vec{A} \times \vec{B}$ e (c) o vetor $\vec{A} \times (\vec{B} + 3{,}00\hat{k})$.

54 São dados três deslocamentos em metros: $\vec{d}_1 = 4{,}0\hat{i} + 5{,}0\hat{j} - 6{,}0\hat{k}$, $\vec{d}_2 = -1{,}0\hat{i} + 2{,}0\hat{j} + 3{,}0\hat{k}$ e $\vec{d}_3 = 4{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$. (a) Determine $\vec{r} = \vec{d}_1 - \vec{d}_2 + \vec{d}_3$. (b) Determine o ângulo entre $\vec{r}$ e o semi-eixo z positivo. (c) Determine a componente de $\vec{d}_1$ em relação a $\vec{d}_2$. (d) Qual é a componente de $\vec{d}_1$ que é perpendicular a $\vec{d}_2$ e está no plano de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$? (*Sugestão:* Para resolver o item (c), considere a Eq. 3-20 e a Fig. 3-20; para resolver o item (d), considere a Eq. 3-27.)

55 Os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ estão no plano xy. $\vec{A}$ tem módulo 8,00 e ângulo 130°; $\vec{B}$ tem componentes $B_x = -7{,}72$ e $B_y = -9{,}20$. (a) Determine $5\vec{A} \cdot \vec{B}$. Determine $4\vec{A} \times 3\vec{B}$ (b) em termos dos vetores unitários e (c) através do módulo e do ângulo em coordenadas esféricas (veja a Fig. 3-37). (d) Determine o ângulo entre os vetores $\vec{A}$ e $4\vec{A} \times 3\vec{B}$. (*Sugestão:* Pense um pouco antes de iniciar os cálculos.) Determine $\vec{A} + 3{,}00\hat{k}$ (e) em termos dos vetores unitários e (f) através do módulo e do ângulo em coordenadas esféricas.

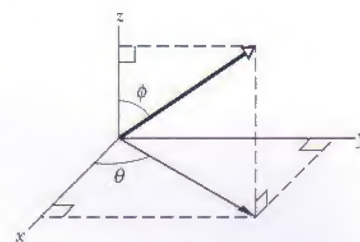


FIG. 3-37 Problema 55.

56 O vetor $\vec{d}_1$ está no sentido negativo do eixo y e o vetor $\vec{d}_2$ está no sentido positivo do eixo x. Determine a orientação (a) de $\vec{d}_2/4$ e (b) de $\vec{d}_1/(-4)$. Determine o módulo (c) de $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2$ e (d) de $\vec{d}_1 \cdot (\vec{d}_2/4)$. Determine a orientação do vetor (e) $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2$ e (f) do vetor $\vec{d}_2 \times \vec{d}_1$. Determine o módulo (g) de $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2$ e (h) de $\vec{d}_2 \times \vec{d}_1$. Determine (i) o módulo e (j) a orientação de $\vec{d}_1 \times (\vec{d}_2/4)$.

57 São dados três vetores em metros:

$$\vec{d}_1 = -3{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$$
$$\vec{d}_2 = -2{,}0\hat{i} - 4{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$$
$$\vec{d}_3 = 2{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 1{,}0\hat{k}.$$

Determine (a) $\vec{d}_1 \cdot (\vec{d}_2 + \vec{d}_3)$, (b) $\vec{d}_1 \cdot (\vec{d}_2 \times \vec{d}_3)$ e (c) $\vec{d}_1 \times (\vec{d}_2 + \vec{d}_3)$.

58 Um jogador de golfe precisa de três tacadas para colocar a bola no buraco. A primeira tacada lança a bola 3,66 m para o norte, a segunda 1,83 m para o sudeste e a terceira 0,91 m para o sudoeste. Determine (a) o módulo e (b) a direção do deslocamento necessário para colocar a bola no buraco na primeira tacada.

59 Considere um vetor $\vec{a}$ no sentido positivo do eixo x, um vetor $\vec{b}$ no sentido positivo do eixo y e um escalar d. Qual é a orientação de $\vec{b}/d$ se d é (a) positivo e (b) negativo? Qual é o módulo de (c) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e (d) $\vec{a} \cdot \vec{b}/d$? Qual é orientação (e) de $\vec{a} \times \vec{b}$ e (f) $\vec{b} \times \vec{a}$? (g) Qual é o módulo de $\vec{a} \times \vec{b}$? (h) Qual é o módulo de $\vec{b} \times \vec{a}$? Qual é (i) a amplitude e (j) a orientação de $\vec{a} \times \vec{b}/d$ se d é positivo?

60 Um vetor $\vec{d}$ tem módulo 2,5 m e aponta para o norte. Determine (a) o módulo e (b) a orientação de $4{,}0\vec{d}$. Determine (c) o módulo e (d) a orientação de $-3{,}0\vec{d}$.

61 Suponha que $\hat{i}$ aponta para leste, $\hat{j}$ aponta para o norte e $\hat{k}$ aponta para cima. Determine os valores de (a) $\hat{i} \cdot \hat{k}$, (b) $(-\hat{k}) \cdot (-\hat{j})$ e (c) $\hat{j} \cdot (-\hat{j})$. Determine as orientações (como, por exemplo, para leste ou para baixo) dos produtos vetoriais (d) $\hat{k} \times \hat{j}$, (e) $(-\hat{i}) \times (-\hat{j})$ e (f) $(-\hat{k}) \times (-\hat{j})$.

62 Considere dois deslocamentos, um de módulo 3 m e outro de módulo 4 m. Mostre que os vetores deslocamento podem ser combinados para produzir um deslocamento de módulo (a) 7m, (b) 1 m e (c) 5m.

63 Um banco no centro de Boston é assaltado (veja o mapa da Fig. 3-38). Os ladrões fogem de helicóptero, realizando três deslocamentos sucessivos: 32 km, 45° ao sul do leste; 53 km, 26° ao norte do oeste; 26 km, 18° a leste do sul. No final do terceiro vôo, são capturados. Em que cidade os ladrões foram presos?

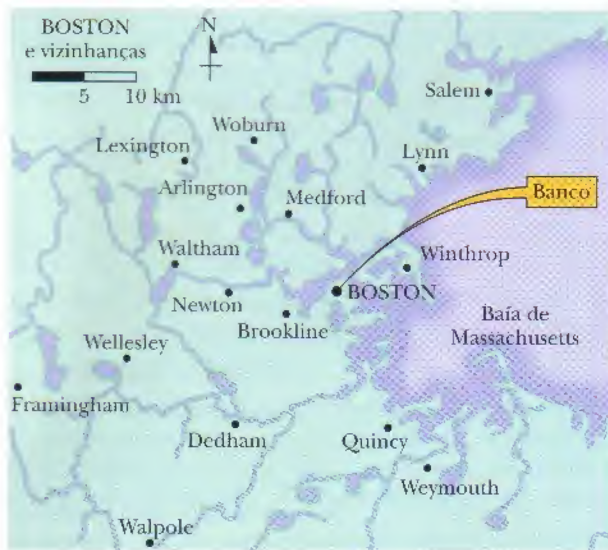


FIG. 3-38 Problema 63.

64 Uma roda com 45,0 cm de raio rola sem escorregar em um piso horizontal (Fig. 3-39). No instante t_1, o ponto P, pintado na borda da roda, está no ponto de contato entre a roda e o piso. Em um instante posterior t_2, a roda descreveu meia revolução. Quais são (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação ao piso) do deslocamento do ponto P?

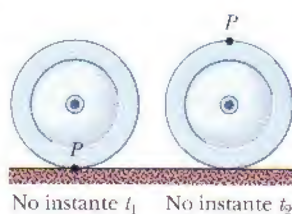


FIG. 3-39 Problema 64.

65 O vetor $\vec{A}$ tem um módulo de 12,0 m e faz um ângulo de 60,0° no sentido anti-horário com o semi-eixo x positivo de um sistema de coordenadas xy. O vetor $\vec{B}$ é dado por $(12{,}0\text{ m})\hat{i} + (8{,}00\text{ m})\hat{j}$ no mesmo sistema de coordenadas. O sistema de coordenadas sofre uma rotação de 20,0° no sentido anti-horário em torno da origem para formar um sistema $x'y'$. Determine os vetores (a) $\vec{A}$ e (b) $\vec{B}$ em termos dos vetores unitários do novo sistema.

66 Uma mulher caminha 250 m na direção 30° a leste do norte e 175 m na direção leste. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo do deslocamento total. (c) Determine a distância percorrida pela mulher. (d) Qual é maior, a distância percorrida ou o módulo do deslocamento?

67 (a) Determine, em termos dos vetores unitários, $\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ para $\vec{a} = 5{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j} - 6{,}0\hat{k}$, $\vec{b} = -2{,}0\hat{i} + 2{,}0\hat{j} + 3{,}0\hat{k}$ e $\vec{c} = 4{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$. (b) Calcule o ângulo entre $\vec{r}$ e o semi-eixo z positivo. (c) Determine a componente de $\vec{a}$ em relação a $\vec{b}$. (d) Determine a componente de $\vec{a}$ em uma direção perpendicular a $\vec{b}$, no plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. (*Sugestão:* para resolver o item (c), veja a Eq. 3-20 e a Fig. 3-20; para resolver o item (d), veja a Eq. 3-27.)

68 Se $\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} = 4\vec{c}$ e $\vec{c} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$, determine (a) $\vec{a}$ e (b) $\vec{b}$.

69 Um manifestante, com sua placa de protesto, parte da origem de um sistema de coordenadas xyz, com o plano xy na horizontal. Ele se desloca 40 m no sentido negativo do eixo x, faz uma curva de noventa graus à esquerda, caminha mais 20 m e sobe até o alto de uma torre com 25 m de altura. (a) Em termos de vetores unitários, qual é o deslocamento da placa do início ao fim? (b) O manifestante deixa cair a placa, que vai parar na base da torre. Qual é o módulo do deslocamento total, do início até este novo fim?

70 Um vetor $\vec{d}$ tem um módulo de 3,0 m e aponta para o sul. Determine (a) o módulo e (b) a orientação do vetor $5{,}0\vec{d}$. Determine (c) o módulo e (d) a orientação do vetor $-2{,}0\vec{d}$.

71 Se $\vec{B}$ é somado a $\vec{A}$, o resultado é $6{,}0\hat{i} + 1{,}0\hat{j}$. Se $\vec{B}$ é subtraído de $\vec{A}$, o resultado é $-4{,}0\hat{i} + 7{,}0\hat{j}$. Qual é o módulo de $\vec{A}$?

72 Uma formiga-de-fogo, em busca de molho picante em uma área de piquenique, executa três deslocamentos sucessivos no nível do solo: $\vec{d}_1$, de 0,40 m para sudoeste (ou seja, 45° entre sul e oeste), $\vec{d}_2$, de 0,50 m para leste, e $\vec{d}_3$, de 0,60 m em uma direção 60° ao norte do leste. Suponha que o sentido positivo do eixo x aponte para leste e o sentido positivo do eixo y para o norte. Quais são (a) a componente x e (b) a componente y de $\vec{d}_1$? Quais são (c) a componente x e (d) a componente y de $\vec{d}_2$? Quais são (e) a componente x e (f) a componente y de $\vec{d}_3$?

Quais são (g) a componente x e (h) a componente y, (i) o módulo e (j) o sentido do deslocamento total da formiga? Para a formiga voltar diretamente ao ponto de partida, (k) que distância deve percorrer e (l) em que direção deve se mover?

Movimento em Duas e Três Dimensões

4



Fonte: Rob Tringali/Sports Chrome Inc.

Quando uma bola de beisebol é rebatida e se aproxima de um jogador, como ele sabe onde deve estar para apanhá-la? Freqüentemente, o jogador caminha ou corre para um certo local do campo, chegando ali ao mesmo tempo que a bola. A experiência de jogo certamente ajuda, mas algum outro fator parece estar envolvido.

O que um jogador faz para saber onde deve estar para apanhar uma bola de beisebol?

A resposta está neste capítulo.

4-1 O QUE É FÍSICA?

Neste capítulo continuaremos a estudar a parte da física que analisa o movimento, mas agora os movimentos podem ser em duas ou três dimensões. Médicos e engenheiros aeronáuticos, por exemplo, precisam conhecer a física das curvas realizadas por pilotos de caça durante os combates aéreos, já que os jatos modernos podem fazer curvas tão rápidas que o piloto perde momentaneamente a consciência. Um engenheiro esportivo pode estar interessado na física do basquetebol. Quando um jogador vai cobrar um *lance livre* (em que o jogador lança a bola em direção à cesta, sem marcação, de uma distância de 4,3 m), pode arremessar a bola da altura dos ombros ou da altura da cintura. A primeira técnica é usada pela maioria esmagadora dos jogadores profissionais, mas o legendário Rick Barry estabeleceu o recorde de aproveitamento de lances livres usando a segunda.

Não é fácil compreender os movimentos em três dimensões. Por exemplo: você provavelmente é capaz de dirigir um carro em uma auto-estrada (movimento em uma dimensão), mas teria muita dificuldade para pousar um avião (movimento em três dimensões) sem um treinamento adequado.

Iniciaremos nosso estudo do movimento em duas e três dimensões com as definições de posição e deslocamento.

4-2 | Posição e Deslocamento

A localização de uma partícula (ou de um objeto que se comporte como uma partícula) pode ser especificada, de forma geral, através do **vetor posição** $\vec{r}$, um vetor que liga um ponto de referência (em geral a origem de um sistema de coordenadas) à partícula. Na notação de vetores unitários da Seção 3-5, $\vec{r}$ pode ser escrito na forma

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}, \tag{4-1}$$

onde $x\hat{\imath}$, $y\hat{\jmath}$ e $z\hat{k}$ são as componentes vetoriais de $\vec{r}$ e x, y e z são as componentes escalares.

Os coeficientes x, y e z fornecem a localização da partícula ao longo dos eixos de coordenadas em relação à origem; ou seja, a partícula possui coordenadas retangulares (x, y, z). A Fig. 4-1, por exemplo, mostra uma partícula cujo vetor posição é

$$\vec{r} = (-3\text{ m})\hat{\imath} + (2\text{ m})\hat{\jmath} + (5\text{ m})\hat{k}$$

e cujas coordenadas retangulares são $(-3\text{ m}, 2\text{ m}, 5\text{ m})$. Ao longo do eixo x a partícula está a 3 m da origem, no sentido contrário ao do vetor unitário $\hat{\imath}$. Ao longo do eixo y ela está a 2 m da origem, no sentido do vetor unitário $\hat{\jmath}$. Ao longo do eixo z ela está a 5 m da origem, no sentido do vetor unitário $\hat{k}$.

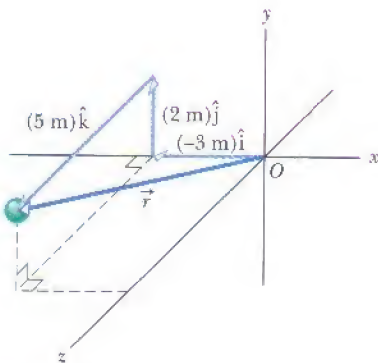


FIG. 4-1 O vetor posição $\vec{r}$ de uma partícula é a soma vetorial de suas componentes vetoriais.

Quando uma partícula se move, seu vetor posição varia de tal forma que sempre liga o ponto de referência (origem) à partícula. Se o vetor posição varia (de $\vec{r}_1$ para $\vec{r}_2$, digamos, durante um certo intervalo de tempo), o **deslocamento** da partícula, $\Delta\vec{r}$, durante esse intervalo de tempo é dado por

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \tag{4-2}$$

Usando a notação de vetores unitários da Eq. 4-1, podemos escrever esse deslocamento como

$$\Delta\vec{r} = (x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath} + z_1\hat{k})$$

ou como

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k}, \tag{4-3}$$

onde as coordenadas (x_1, y_1, z_1) correspondem ao vetor posição $\vec{r}_1$ e as coordenadas (x_2, y_2, z_2) correspondem ao vetor posição $\vec{r}_2$. Podemos também escrever o vetor deslocamento substituindo $(x_2 - x_1)$ por Δx, $(y_2 - y_1)$ por Δy e $(z_2 - z_1)$ por Δz:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{\mathrm{i}} + \Delta y\hat{\mathrm{j}} + \Delta z\hat{\mathrm{k}}. \quad (4\text{-}4)$$

Exemplo 4-1

Na Fig. 4-2 o vetor posição de uma partícula é inicialmente

$$\vec{r}_1 = (-3{,}0\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{i}} + (2{,}0\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{j}} + (5{,}0\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{k}}$$

e depois passa a ser

$$\vec{r}_2 = (9{,}0\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{i}} + (2{,}0\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{j}} + (8{,}0\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{k}}.$$

Qual é o deslocamento da partícula $\Delta\vec{r}$ de $\vec{r}_1$ para $\vec{r}_2$?

IDÉIA-CHAVE O deslocamento $\Delta\vec{r}$ é obtido subtraindo o vetor posição inicial $\vec{r}_1$ do vetor posição final $\vec{r}_2$.

Cálculo: A subtração nos dá

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ &= [9{,}0 - (-3{,}0)]\hat{\mathrm{i}} + [2{,}0 - 2{,}0]\hat{\mathrm{j}} + [8{,}0 - 5{,}0]\hat{\mathrm{k}} \\ &= (12\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{i}} + (3{,}0\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{k}}.\end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

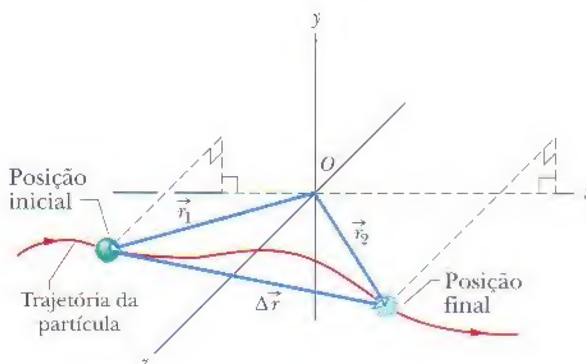


FIG. 4-2 O deslocamento $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ vai da extremidade do vetor correspondente à posição inicial, $\vec{r}_1$, até a extremidade do vetor correspondente à posição final, $\vec{r}_2$.

O vetor deslocamento é paralelo ao plano xz porque a componente y é nula.

Exemplo 4-2

Um coelho atravessa um estacionamento, no qual, por alguma razão, um conjunto de eixos coordenados foi desenhado. As coordenadas da posição do coelho, em metros, em função do tempo t, em segundos, são dadas por

$$x = -0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28 \quad (4\text{-}5)$$

e

$$y = 0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30. \quad (4\text{-}6)$$

(a) No instante $t = 15$ s, qual é o vetor posição $\vec{r}$ do coelho na notação de vetores unitários e na notação módulo-ângulo?

IDÉIA-CHAVE As coordenadas x e y da posição do coelho, dadas pelas Eqs. 4-5 e 4-6, são as componentes escalares do vetor posição $\vec{r}$ do coelho.

Cálculos: Podemos escrever

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\mathrm{i}} + y(t)\hat{\mathrm{j}}. \quad (4\text{-}7)$$

(Escrevemos $\vec{r}\,(t)$ em vez de $\vec{r}$ porque as componentes são funções de t e, portanto, $\vec{r}$ também é função de t.)

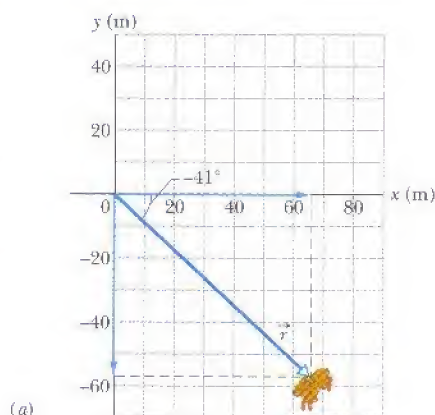
Em $t = 15$ s, as componentes escalares são

$$x = (-0{,}31)(15)^2 + (7{,}2)(15) + 28 = 66\ \mathrm{m}$$

e

$$y = (0{,}22)(15)^2 - (9{,}1)(15) + 30 = -57\ \mathrm{m},$$

e portanto $\vec{r} = (66\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{i}} - (57\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{j}},$ (Resposta)



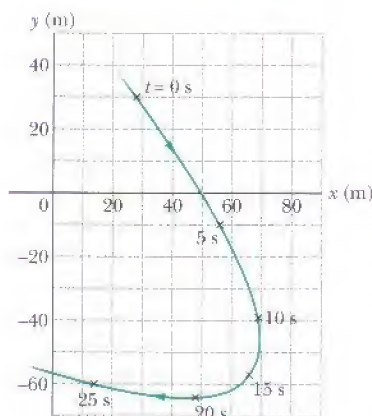


FIG. 4-3 (a) O vetor posição de um coelho, $\vec{r}$, no instante $t = 15$ s. As componentes escalares de $\vec{r}$ são mostradas ao longo dos eixos. (b) A trajetória do coelho e sua posição para cinco valores de t.

que está desenhado na Fig. 4-3*a*. Para obter o módulo e o ângulo de $\vec{r}$, usamos a Eq. 3-6:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(66\text{ m})^2 + (-57\text{ m})^2} = 87\text{ m}, \quad \text{(Resposta)}$$

e
$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\left(\frac{-57\text{ m}}{66\text{ m}}\right) = -41°. \quad \text{(Resposta)}$$

Verificação: Embora $\theta = 139°$ possua a mesma tangente que $-41°$, os sinais das componentes de $\vec{r}$ indicam que o ângulo desejado é $139° - 180° = -41°$.

(b) Trace o gráfico da trajetória do coelho de $t = 0$ a $t = 25$ s.

Plotagem: Podemos repetir a parte (a) para vários valores de t e plotar os resultados. A Fig. 4-3*b* mostra os pontos do gráfico para cinco valores de t e a curva que liga esses pontos. Podemos também plotar a curva em uma calculadora gráfica a partir das Eqs. 4-5 e 4-6.

4-3 | Velocidade Média e Velocidade Instantânea

Se uma partícula se move de um ponto para outro, podemos estar interessados em saber com que rapidez ela se move. Como no Capítulo 2, podemos definir duas grandezas que expressam a "rapidez" de um movimento: *velocidade média* e *velocidade instantânea*. Entretanto, no caso de um movimento bidimensional ou tridimensional devemos considerar essas grandezas como vetores e usar a notação vetorial.

Se uma partícula sofre um deslocamento $\Delta\vec{r}$ em um intervalo de tempo Δt, sua **velocidade média** $\vec{v}_{\text{méd}}$ é dada por

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{intervalo de tempo}},$$

ou

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (4\text{-}8)$$

Esta equação nos diz que a orientação de $\vec{r}_{\text{méd}}$ (o vetor do lado esquerdo da Eq. 4-8) deve ser igual à do deslocamento $\Delta\vec{r}$ (o vetor do lado direito). Usando a Eq. 4-4, podemos escrever a Eq. 4-8 em componentes vetoriais:

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta x\hat{\text{i}} + \Delta y\hat{\text{j}} + \Delta z\hat{\text{k}}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\text{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\text{j}} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{\text{k}}. \quad (4\text{-}9)$$

Assim, por exemplo, se a partícula do Exemplo 4-1 se move da posição inicial para outra posição em 2,0 s, a velocidade média durante esse movimento é

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(12\text{ m})\hat{\text{i}} + (3{,}0\text{ m})\hat{\text{k}}}{2{,}0\text{ s}} = (6{,}0\text{ m/s})\hat{\text{i}} + (1{,}5\text{ m/s})\hat{\text{k}}.$$

Logo, a velocidade média (uma grandeza vetorial) tem uma componente de 6,0 m/s em relação ao eixo x e uma componente de 1,5 m/s em relação ao eixo z.

Quando falamos da **velocidade** de uma partícula em geral estamos nos referindo à **velocidade instantânea** $\vec{v}$ em algum instante. Esta velocidade $\vec{v}$ é o valor para o qual tende a velocidade $\vec{v}_{\text{méd}}$ quando o intervalo de tempo Δt tende a zero. Usando a linguagem do cálculo, podemos escrever $\vec{v}$ como a derivada

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (4\text{-}10)$$

A Fig. 4-4 mostra a trajetória de uma partícula que se move no plano xy. Quando a partícula se desloca para a direita ao longo da curva, o vetor posição gira

para a direita. Durante o intervalo de tempo Δt o vetor posição muda de $\vec{r}_1$ para $\vec{r}_2$ e o deslocamento da partícula é $\Delta\vec{r}$.

Para determinar a velocidade instantânea da partícula no instante t_1 (instante em que a partícula se encontra na posição 1), reduzimos o intervalo de tempo Δt nas vizinhanças de t_1, fazendo-o tender a zero. Ao fazermos isso, três coisas acontecem: (1) o vetor posição $\vec{r}_2$ da Fig. 4-4 se aproxima de $\vec{r}_1$, fazendo $\Delta\vec{r}$ tender a zero. (2) A direção de $\Delta\vec{r}/\Delta t$ (e, portanto, de $\vec{v}_{méd}$) se aproxima da direção da reta tangente à trajetória da partícula na posição 1. (3) A velocidade média $\vec{v}_{méd}$ se aproxima da velocidade instantânea $\vec{v}$ no instante t_1.

No limite $\Delta t \to 0$ temos $\vec{v}_{méd} \to \vec{v}$ e, o que é mais importante neste contexto, aqui $\vec{v}_{méd}$ assume a direção da reta tangente. Assim, $\vec{v}$ também assume essa direção:

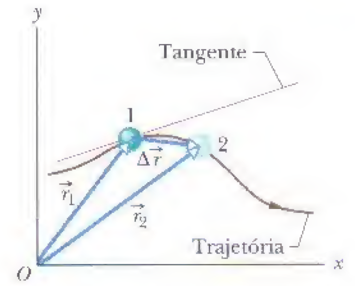


FIG. 4-4 O deslocamento $\Delta\vec{r}$ de uma partícula durante um intervalo de tempo Δt, da posição 1, com vetor posição $\vec{r}_1$ no instante t_1, até a posição 2, com vetor posição $\vec{r}_2$ no instante t_2. A figura mostra também a tangente à trajetória da partícula na posição 1.

A direção da velocidade instantânea $\vec{v}$ de uma partícula é sempre tangente à trajetória da partícula na posição da partícula.

O resultado é o mesmo em três dimensões: $\vec{v}$ é sempre tangente à trajetória da partícula.

Para escrever a Eq. 4-10 na forma de vetores unitários, usamos a expressão para $\vec{r}$ dada pela Eq. 4-1:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\hat{\text{i}} + y\hat{\text{j}} + z\hat{\text{k}}) = \frac{dx}{dt}\hat{\text{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\text{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\text{k}}.$$

Esta equação pode ser simplificada se a escrevermos como

$$\vec{v} = v_x\hat{\text{i}} + v_y\hat{\text{j}} + v_z\hat{\text{k}}, \tag{4-11}$$

onde as componentes escalares de $\vec{v}$ são

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad \text{e} \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{4-12}$$

Assim, por exemplo, dx/dt é a componente escalar de $\vec{v}$ em relação ao eixo x. Isso significa que podemos encontrar as componentes escalares de $\vec{v}$ derivando as componentes de $\vec{r}$.

A Fig. 4-5 mostra o vetor velocidade $\vec{v}$ e suas componentes escalares x e y. Note que $\vec{v}$ é tangente à trajetória da partícula na posição da partícula. *Atenção*: Quando um vetor posição é desenhado, como nas Figs. 4-1 a 4-4, ele é uma seta que se estende de um ponto ("aqui") a outro ("lá"). Entretanto, quando um vetor velocidade é desenhado, como na Fig. 4-5, ele *não* vai de um ponto a outro. Em vez disso, sua orientação coincide com a do movimento instantâneo de uma partícula localizada na sua origem, e seu comprimento (que representa o módulo da velocidade) pode ser desenhado em qualquer escala.

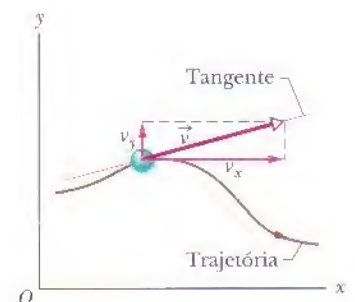
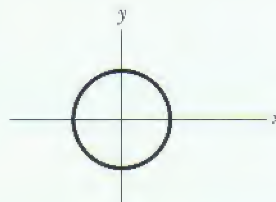


FIG. 4-5 A velocidade $\vec{v}$ de uma partícula e as componentes escalares de $\vec{v}$.

TESTE 1 A figura mostra uma trajetória circular descrita por uma partícula. Se a velocidade da partícula em um certo instante é $\vec{v} = (2 \text{ m/s})\hat{\text{i}} - (2 \text{ m/s})\hat{\text{j}}$, em qual dos quadrantes a partícula está se movendo nesse instante se ela se move (a) no sentido horário e (b) no sentido anti-horário? Desenhe $\vec{v}$ na figura para os dois casos.



Exemplo 4-3

Determine a velocidade $\vec{v}$ do coelho do Exemplo 4-2 no instante $t = 15$ s.

IDÉIA-CHAVE Podemos determinar $\vec{v}$ calculando as derivadas das componentes do vetor posição do coelho.

Cálculos: Aplicando a parte da Eq. 4-12 correspondente a v_x à Eq. 4-5, descobrimos que a componente x de $\vec{v}$ é

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28)$$
$$= -0{,}62t + 7{,}2. \tag{4-13}$$

Em $t = 15$ s, isso nos dá $v_x = -2{,}1$ m/s. Da mesma forma, aplicando a parte da Eq. 4-12 correspondente a v_y à Eq. 4-6, descobrimos que a componente y é

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30)$$
$$= 0{,}44t - 9{,}1. \tag{4-14}$$

Em $t = 15$ s, isso nos dá $v_y = -2{,}5$ m/s. Assim, de acordo com a Eq. 4-11,

$$\vec{v} = (-2{,}1 \text{ m/s})\hat{\mathrm{i}} + (-2{,}5 \text{ m/s})\hat{\mathrm{j}}, \quad \text{(Resposta)}$$

que está desenhada na Fig. 4-6, tangente à trajetória do coelho e no sentido em que ele está se movendo em $t = 15$ s.

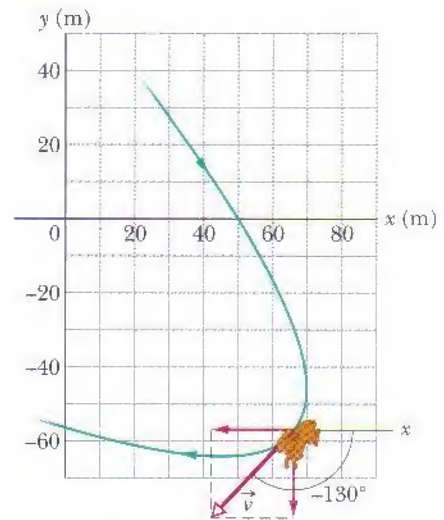


FIG. 4-6 A velocidade $\vec{v}$ do coelho em $t = 15$ s.

Para obter o módulo e o ângulo de $\vec{v}$, podemos usar uma calculadora ou escrever, de acordo com a Eq. 3-6,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2{,}1 \text{ m/s})^2 + (-2{,}5 \text{ m/s})^2}$$
$$= 3{,}3 \text{ m/s} \quad \text{(Resposta)}$$

e

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\left(\frac{-2{,}5 \text{ m/s}}{-2{,}1 \text{ m/s}}\right)$$
$$= \tan^{-1} 1{,}19 = -130°. \quad \text{(Resposta)}$$

Verificação: O ângulo é $-130°$ ou $-130° + 180° = 50°$?

4-4 | Aceleração Média e Aceleração Instantânea

Quando a velocidade de uma partícula varia de $\vec{v}_1$ para $\vec{v}_2$ em um intervalo de tempo Δt, sua **aceleração média** $\vec{a}_{\text{méd}}$ durante o intervalo Δt é

$$\text{aceleração média} = \frac{\text{variação de velocidade}}{\text{intervalo de tempo}},$$

ou

$$\vec{a}_{\text{méd}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{4-15}$$

Quando fazemos Δt tender a zero no entorno de um certo instante, $\vec{a}_{\text{méd}}$ tende para a **aceleração instantânea** (ou, simplesmente, **aceleração**) $\vec{a}$ nesse instante, ou seja,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{4-16}$$

Se o módulo *ou* a orientação da velocidade varia (ou ambos variam), a partícula possui uma aceleração.

Podemos escrever a Eq. 4-16 em termos de vetores unitários substituindo $\vec{v}$ pelo seu valor, dado pela Eq. 4-11, para obter

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v_x\hat{\mathrm{i}} + v_y\hat{\mathrm{j}} + v_z\hat{\mathrm{k}})$$
$$= \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathrm{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathrm{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathrm{k}}.$$

Podemos escrever esta equação na forma

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}, \qquad (4\text{-}17)$$

onde as componentes escalares de $\vec{a}$ são

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad \text{e} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \qquad (4\text{-}18)$$

Assim, podemos obter as componentes escalares de $\vec{a}$ derivando as componentes escalares de $\vec{v}$ em relação ao tempo.

A Fig. 4-7 mostra o vetor aceleração $\vec{a}$ e suas componentes escalares para uma partícula que se move em duas dimensões. *Atenção:* Quando um vetor aceleração é desenhado, como na Fig. 4-7, ele *não vai* de um ponto a outro. Em vez disso, sua orientação coincide com a da variação instantânea do movimento de uma partícula localizada na sua origem, e seu comprimento (que representa o módulo da aceleração) pode ser desenhado em qualquer escala.

TESTE 2 Considere as seguintes descrições da posição (em metros) de uma partícula que se move no plano xy:

(1) $x = -3t^2 + 4t - 2$ e $y = 6t^2 - 4t$ (3) $\vec{r} = 2t^2\hat{\mathrm{i}} - (4t + 3)\hat{\mathrm{j}}$
(2) $x = -3t^3 - 4t$ e $y = -5t^2 + 6$ (4) $\vec{r} = (4t^3 - 2t)\hat{\mathrm{i}} + 3\hat{\mathrm{j}}$

As componentes x e y da aceleração são constantes em todas essas situações? A aceleração $\vec{a}$ é constante?

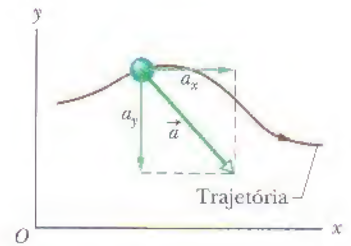


FIG. 4-7 A aceleração $\vec{a}$ de uma partícula e as componentes escalares de $\vec{a}$.

Exemplo 4-4

Para o coelho dos Exemplos 4-2 e 4-3, determine a aceleração $\vec{a}$ no instante $t = 15$ s.

IDÉIA-CHAVE Podemos determinar a aceleração $\vec{a}$ calculando as derivadas das componentes da velocidade do coelho.

Cálculos: Aplicando a parte da Eq. 4-18 correspondente a a_x à Eq. 4-13, descobrimos que a componente x de $\vec{a}$ é

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-0{,}62t + 7{,}2) = -0{,}62 \text{ m/s}^2.$$

Analogamente, aplicando a parte da Eq. 4-18 correspondente a a_y à Eq. 4-14 descobrimos que a componente y é

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}44t - 9{,}1) = 0{,}44 \text{ m/s}^2.$$

Vemos que essa aceleração não varia com o tempo (é constante), pois a variável tempo t não aparece na expressão das componentes da aceleração. De acordo com a Eq. 4-17,

$$\vec{a} = (-0{,}62 \text{ m/s}^2)\hat{\mathrm{i}} + (0{,}44 \text{ m/s}^2)\hat{\mathrm{j}}, \quad \text{(Resposta)}$$

que é mostrada superposta à trajetória do coelho na Fig. 4-8.

Para obter o módulo e o ângulo de $\vec{a}$, novamente podemos usar uma calculadora ou a Eq. 3-6. No caso do módulo, temos:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0{,}62 \text{ m/s}^2)^2 + (0{,}44 \text{ m/s}^2)^2}$$
$$= 0{,}76 \text{ m/s}^2. \quad \text{(Resposta)}$$

No caso do ângulo, temos:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_y}{a_x} = \tan^{-1}\left(\frac{0{,}44 \text{ m/s}^2}{-0{,}62 \text{ m/s}^2}\right) = -35°.$$

Entretanto, esse ângulo, que é o resultado fornecido por uma calculadora, indica que a orientação de $\vec{a}$ é para a direita e para baixo na Fig. 4-8. Porém, sabemos pelas componentes x e y que a orientação de $\vec{a}$ é para a esquerda e para cima. Para determinar o outro ângulo que possui a mesma tangente que $-35°$, mas não é mostrado pela calculadora, somamos 180°:

$$-35° + 180° = 145°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este novo resultado *é* compatível com as componentes de $\vec{a}$. Observe que $\vec{a}$ tem o mesmo módulo e a mesma orientação para qualquer instante de tempo, já que a aceleração do coelho é constante.

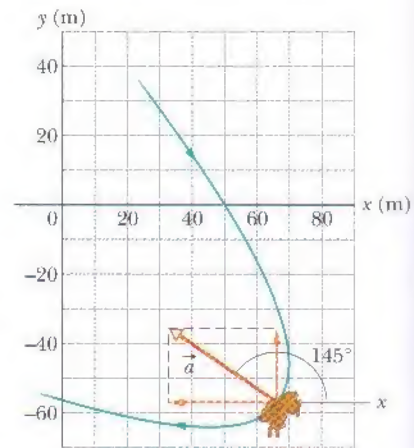


FIG. 4-8 A aceleração $\vec{a}$ do coelho em $t = 15$ s. O coelho possui essa mesma aceleração em todos os pontos de sua trajetória.

Exemplo 4-5

Uma partícula cuja velocidade é $\vec{v}_0 = -2{,}0\hat{\text{i}} + 4{,}0\hat{\text{j}}$ (em metros por segundo) em $t = 0$ sofre uma aceleração constante $\vec{a}$, de módulo $a = 3{,}0$ m/s², que faz um ângulo $\theta = 130°$ com o semi-eixo x positivo. Qual é a velocidade $\vec{v}$ da partícula em $t = 5{,}0$ s?

IDÉIA-CHAVE Como a aceleração é constante, a Eq. 2-11 ($v = v_0 + at$) pode ser usada, mas devemos aplicá-la separadamente ao movimento paralelo ao eixo x e para o movimento paralelo ao eixo y.

Cálculos: Determinamos as componentes da velocidade, v_x e v_y, a partir das equações

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad \text{e} \quad v_y = v_{0y} + a_y t.$$

Nessas equações, v_{0x} (= −2,0 m/s) e v_{0y} (= 4,0 m/s) são as componentes x e y de $\vec{v}_0$ e a_x e a_y são as componentes x e y de $\vec{a}$. Para determinar a_x e a_y podemos decompor $\vec{a}$ usando uma calculadora ou com o auxílio da Eq. 3-5:

$$a_x = a\cos\theta = (3{,}0\ \text{m/s}^2)(\cos 130°) = -1{,}93\ \text{m/s}^2,$$
$$a_y = a\,\text{sen}\,\theta = (3{,}0\ \text{m/s}^2)(\text{sen}\ 130°) = +2{,}30\ \text{m/s}^2.$$

Quando esses valores são inseridos nas equações de v_x e v_y, descobrimos que no instante $t = 5{,}0$ s

$$v_x = -2{,}0\ \text{m/s} + (-1{,}93\ \text{m/s}^2)(5{,}0\ \text{s}) = -11{,}65\ \text{m/s},$$
$$v_y = 4{,}0\ \text{m/s} + (2{,}30\ \text{m/s}^2)(5{,}0\ \text{s}) = 15{,}50\ \text{m/s}.$$

Assim, em $t = 5{,}0$ s temos, depois de arredondar,

$$\vec{v} = (-12\ \text{m/s})\hat{\text{i}} + (16\ \text{m/s})\hat{\text{j}}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Usando uma calculadora ou a Eq. 3-6 descobrimos que o módulo e o ângulo de $\vec{v}$ são:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 19{,}4 \approx 19\ \text{m/s} \qquad \text{(Resposta)}$$

e

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = 127° \approx 130°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Verificação: Que resultado a sua calculadora fornece, 127° ou −53°? Desenhe o vetor $\vec{v}$ com suas componentes para verificar qual dos dois ângulos é mais razoável.

4-5 | Movimento de Projéteis

Consideraremos a seguir um caso especial de movimento bidimensional: Uma partícula que se move em um plano vertical com velocidade inicial $\vec{v}_0$ e com uma aceleração constante, igual à aceleração de queda livre $\vec{g}$, dirigida para baixo. Uma partícula que se move dessa forma é chamada de **projétil** (o que significa que é projetada ou lançada), e seu movimento é chamado de **movimento balístico**. Um projétil pode ser uma bola de tênis (Fig. 4-9) ou de pingue-pongue, mas não um avião ou um pato. Muitos esportes (do golfe e do futebol ao lacrosse e ao raquetebol) envolvem os movimentos balísticos de uma bola; jogadores e técnicos estão sempre procurando controlar esses movimentos para obter o máximo de vantagem. O jogador que descobriu a rebatida em Z no raquetebol na década

de 1970, por exemplo, vencia os jogos com facilidade porque a trajetória peculiar da bola no fundo da quadra surpreendia os adversários.

Nosso objetivo atual é analisar o movimento dos projéteis usando as ferramentas descritas nas Seções 4-2 a 4-4 para o movimento bidimensional, desprezando a influência do ar. A Fig. 4-10, que será discutida na próxima seção, mostra a trajetória de um projétil quando o efeito do ar pode ser ignorado. O projétil é lançado com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$ que pode ser escrita na forma

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{\mathrm{i}} + v_{0y}\hat{\mathrm{j}}. \tag{4-19}$$

As componentes v_{0x} e v_{0y} podem ser calculadas se conhecermos o ângulo θ_0 entre $\vec{v}_0$ e o semi-eixo x positivo:

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 \quad \text{e} \quad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \theta_0. \tag{4-20}$$

Durante o movimento bidimensional, o vetor posição $\vec{r}$ e a velocidade $\vec{v}$ do projétil mudam continuamente, mas o vetor aceleração $\vec{a}$ é constante e está *sempre* dirigido verticalmente para baixo. O projétil *não possui* aceleração horizontal.

O movimento de projéteis, como os das Figs. 4-9 e 4-10, parece complicado, mas temos a seguinte propriedade simplificadora (demonstrada experimentalmente):

> No movimento de projéteis, o movimento horizontal e o movimento vertical são independentes, ou seja, um não afeta o outro.

Esta propriedade permite decompor um problema que envolve um movimento bidimensional em dois problemas unidimensionais independentes e mais fáceis de serem resolvidos, um para o movimento horizontal (com *aceleração nula*) e outro para o movimento vertical (com *aceleração constante para baixo*). Apresentamos a seguir dois experimentos que mostram que o movimento horizontal e o movimento vertical são realmente independentes.



FIG. 4-9 Fotografia estroboscópica de uma bola de tênis amarela quicando em uma superfície dura. Entre os impactos, a trajetória da bola é balística. *Fonte:* Richard Megna/Fundamental Photographs.

Duas Bolas de Golfe

A Fig. 4-11 é uma fotografia estroboscópica de duas bolas de golfe, uma que simplesmente se deixou cair e outra que é lançada horizontalmente por uma mola. As bolas de golfe têm o mesmo movimento vertical; ambas percorrem a mesma distância vertical no mesmo intervalo de tempo. *O fato de uma bola estar se movendo horizontalmente enquanto está caindo não afeta o seu movimento vertical*, ou seja, os movimentos horizontal e vertical são independentes.

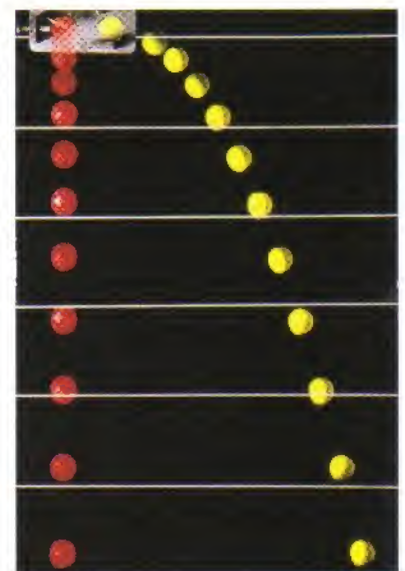


FIG. 4-11 Uma bola é deixada cair a partir do repouso no mesmo instante que outra bola é lançada horizontalmente para a direita. Os movimentos verticais das duas bolas são iguais. *Fonte:* Richard Megna/Fundamental Photographs.

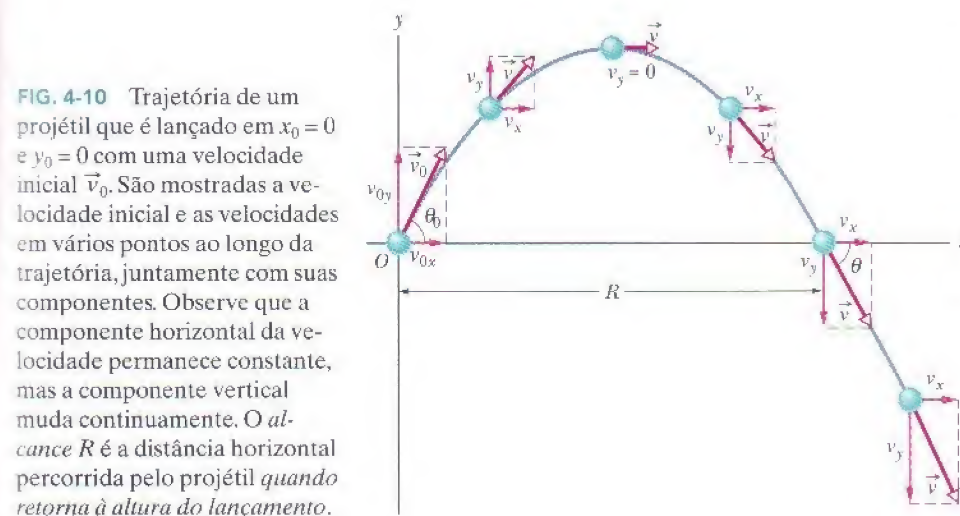


FIG. 4-10 Trajetória de um projétil que é lançado em $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$. São mostradas a velocidade inicial e as velocidades em vários pontos ao longo da trajetória, juntamente com suas componentes. Observe que a componente horizontal da velocidade permanece constante, mas a componente vertical muda continuamente. O *alcance* R é a distância horizontal percorrida pelo projétil *quando retorna à altura do lançamento*.

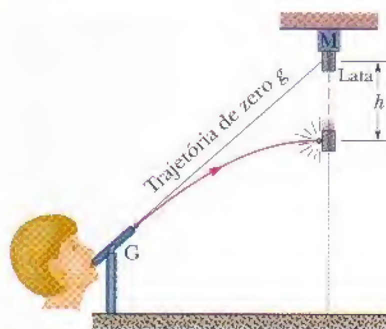


FIG. 4-12 A bola sempre acerta na lata que está caindo, já que as duas percorrem a mesma distância h em queda livre.

Uma Demonstração Interessante

A Fig. 4-12 mostra uma demonstração que tem animado muitas aulas de física. Ela envolve um canudo G, através do qual se pode soprar pequenas bolas que se comportam como projéteis. O alvo é uma lata suspensa por um eletroímã M, e o tubo é apontado para a lata. O experimento é arranjado de tal forma que o ímã solta a lata no mesmo instante em que a bola deixa o tubo.

Se g (o módulo da aceleração de queda livre) fosse zero, a bola seguiria a trajetória em linha reta mostrada na Fig. 4-12 e a lata continuaria no mesmo lugar após ter sido solta pelo eletroímã. Assim, a bola certamente atingiria a lata.

Na verdade, g *não é* zero, mas a bola *atinge* a lata! Como mostra a Fig. 4-12, a aceleração da gravidade faz com que a bola e a lata sofram o mesmo deslocamento para baixo, h, em relação à posição que teriam, a cada instante, se a gravidade fosse nula. Quanto maior a força do sopro, maior a velocidade inicial da bola, menor o tempo que a bola leva para se chocar com a lata e menor o valor de h.



TESTE 3 Em um certo instante, uma bola que descreve um movimento balístico tem uma velocidade $\vec{v} = 25\hat{i} - 4{,}9\hat{j}$ (o eixo x é horizontal, o eixo y é para cima e $\vec{v}$ está em metros por segundo). A bola já passou pelo ponto mais alto da trajetória?

4-6 | Análise do Movimento de um Projétil

Agora estamos preparados para analisar o movimento horizontal e vertical de um projétil.

Movimento Horizontal

Como *não existe aceleração* na direção horizontal, a componente horizontal v_x da velocidade de um projétil permanece inalterada e igual ao seu valor inicial v_{0x} durante toda a trajetória, como mostra a Fig. 4-13. Em qualquer instante t, o deslocamento horizontal do projétil em relação à posição inicial, $x - x_0$, é dado por

$$x - x_0 = v_{0x}t.$$

Como $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$, temos:

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t. \qquad (4\text{-}21)$$



FIG. 4-13 A componente vertical da velocidade deste skatista está variando, mas não a componente horizontal, que é igual à velocidade do skate. Em conseqüência, o skate permanece abaixo do atleta, permitindo que ele pouse no skate após o salto. *Fonte:* Jamie Budge/Liaison/Getty Images, Inc.

Movimento Vertical

O movimento vertical é o movimento que discutimos na Seção 2-9 para uma partícula em queda livre. O mais importante é que a aceleração é constante. Assim, as equações da Tabela 2-1 podem ser usadas, desde que a seja substituído por $-g$ e o eixo x seja substituído pelo eixo y. Assim, por exemplo, a Eq. 2-15 se torna

$$\begin{aligned} y - y_0 &= v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \\ &= (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2, \end{aligned} \qquad (4\text{-}22)$$

onde a componente vertical da velocidade inicial, v_{0y}, é substituída pela expressão equivalente $v_0 \operatorname{sen} \theta_0$. Da mesma forma, as Eqs. 2-11 e 2-16 se tornam

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt \qquad (4\text{-}23)$$

$$v_y^2 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \qquad (4\text{-}24)$$

Como mostram a Fig. 4-10 e a Eq. 4-23, a componente vertical da velocidade se comporta exatamente como a de uma bola lançada verticalmente para cima.

Inicialmente ela está dirigida para cima e seu módulo diminui continuamente até se anular, *o que determina a altura máxima da trajetória*. Em seguida, a componente vertical da velocidade muda de sentido e seu módulo passa a aumentar com o tempo.

Equação da Trajetória

Podemos obter a equação do caminho percorrido pelo projétil (sua **trajetória**) eliminando o tempo t nas Eqs. 4-21 e 4-22. Explicitando t na Eq. 4-21 e substituindo o resultado na Eq. 4-22, obtemos, após algumas manipulações algébricas,

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2} \quad \text{(trajetória).} \tag{4-25}$$

Esta é a equação da trajetória mostrada na Fig. 4-10. Ao deduzi-la, para simplificar, fizemos $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ nas Eqs. 4-21 e 4-22, respectivamente. Como g, θ_0 e v_0 são constantes, a Eq. 4-25 é da forma $y = ax + bx^2$, onde a e b são constantes. Como esta é a equação de uma parábola, a trajetória é *parabólica*.

Alcance Horizontal

O *alcance horizontal* R de um projétil, como mostra a Fig. 4-10, é a distância *horizontal* percorrida pelo projétil até voltar à sua altura inicial (altura de lançamento). Para determinar o alcance R, fazemos $x = x_0 = R$ na Eq. 4-21 e $y - y_0 = 0$ na Eq. 4-22, obtendo

$$R = (v_0\cos\theta_0)t$$

e

$$0 = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Eliminando t nessas duas equações, obtemos

$$R = \frac{2v_0^2}{g}\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0.$$

Usando a identidade $\operatorname{sen} 2\theta_0 = 2\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0$ (veja o Apêndice E), obtemos

$$R = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen} 2\theta_0. \tag{4-26}$$

Atenção: Esta equação *não* fornece a distância horizontal percorrida pelo projétil quando a altura final é diferente da altura de lançamento.

Observe que R na Eq. 4-26 atinge o valor máximo para $\operatorname{sen} 2\theta_0 = 1$, que corresponde a $2\theta_0 = 90°$ ou $\theta_0 = 45°$.

O alcance horizontal R é máximo para um ângulo de lançamento de 45°.

Quando a altura final é diferente da altura de lançamento, como acontece no arremesso de peso, lançamento de disco e basquetebol, a distância horizontal máxima não é atingida para um ângulo de lançamento de 45°.

Efeito do Ar

Até agora, supusemos que o ar não exerce efeito algum sobre o movimento de um projétil. Entretanto, em muitas situações a diferença entre a trajetória calculada dessa forma e a trajetória real do projétil pode ser muito grande, já que o ar resiste (se opõe) ao movimento. A Fig. 4-14, por exemplo, mostra as trajetórias de duas bolas de beisebol que deixam o bastão fazendo um ângulo de 60° com a horizontal, com uma velocidade inicial de 44,7 m/s. A trajetória I (de uma bola de verdade) foi calculada para as condi-

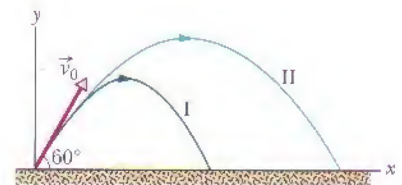


FIG. 4-14 (I) Trajetória teórica de uma bola, levando em conta a resistência do ar. (II) Trajetória que a bola seguiria no vácuo, calculada usando as equações deste capítulo. Os dados correspondentes estão na Tabela 4-1. (Adaptada de "The Trajectory of a Fly Ball," Peter J. Brancazio, *The Physics Teacher*, January 1985.)

TABELA 4-1

Trajetórias de Duas Bolas de Beisebol*

	Trajetória I (Ar)	Trajetória II (Vácuo)
Alcance	98,5 m	177 m
Altura máxima	53,0 m	76,8 m
Tempo de percurso	6,6 s	7,9 s

*Veja a Fig. 4-14. O ângulo de lançamento é de 60° e a velocidade de lançamento é de 44,7 m/s.

ções normais de jogo, levando em conta a resistência do ar. A trajetória II (de uma bola em condições ideais) é a trajetória que a bola seguiria no vácuo.



TESTE 4 Uma bola de beisebol é rebatida em direção ao campo de jogo. Durante o percurso (ignorando o efeito do ar), o que acontece com as componentes (a) horizontal e (b) vertical da velocidade? Quais são as componentes (c) horizontal e (d) vertical da aceleração durante a subida, durante a descida e no ponto mais alto da trajetória da bola?

Exemplo 4-6 Aumente sua capacidade

Na Fig. 4-15 um avião de salvamento voa a 198 km/h (= 55,0 m/s), a uma altura constante de 500 m, rumo a um ponto diretamente acima da vítima de um naufrágio, para deixar cair uma balsa.

(a) Qual deve ser o ângulo ϕ da linha de visada do piloto para a vítima no instante em que o piloto deixa cair a balsa?

IDÉIAS-CHAVE Depois de liberada, a balsa é um projétil; assim, seus movimentos horizontal e vertical podem ser examinados separadamente (não é preciso levar em conta a forma da trajetória).

Cálculos: Na Fig. 4-15 vemos que ϕ é dado por

$$\phi = \tan^{-1}\frac{x}{h}, \tag{4-27}$$

onde x é a coordenada horizontal da vítima (e da balsa ao chegar à água) e $h = 500$ m. Podemos calcular x com o auxílio da Eq. 4-21:

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t. \tag{4-28}$$

Sabemos que $x_0 = 0$ porque a origem foi colocada no ponto de lançamento. Como a balsa é *deixada cair* e não lançada do avião, sua velocidade inicial $\vec{v}_0$ é igual à velocidade do avião. Assim, sabemos também que a velocidade inicial tem módulo $v_0 = 55{,}0$ m/s e ângulo $\theta_0 = 0°$ (medido em relação ao semi-eixo x positivo). Entretanto, não conhecemos o tempo t que a balsa leva para percorrer a distância do avião até a vítima.

Para determinar o valor de t, temos que considerar o movimento *vertical* e, mais especificamente, a Eq. 4-22:

$$y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2. \tag{4-29}$$

onde o deslocamento vertical $y - y_0$ da balsa é -500 m (o valor negativo indica que a balsa se move *para baixo*). Assim,

$$-500 \text{ m} = (55{,}0 \text{ m/s})(\operatorname{sen} 0°)t - \tfrac{1}{2}(9{,}8 \text{ m/s}^2)t^2.$$

Resolvendo esta equação, obtemos $t = 10{,}1$. Substituindo este valor na Eq. 4-28, temos:

$$x - 0 = (55{,}0 \text{ m/s})(\cos 0°)(10{,}1 \text{ s}),$$

ou $$x = 555{,}5 \text{ m}.$$

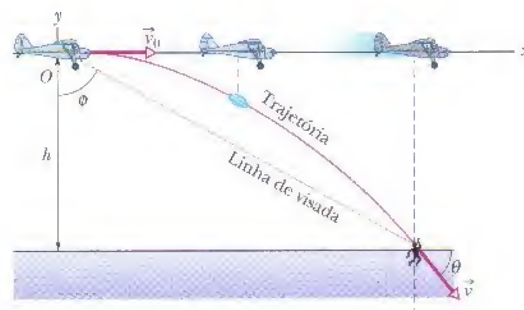


FIG. 4-15 Um avião lança uma balsa enquanto se desloca com velocidade constante em um vôo horizontal. Durante a queda a velocidade horizontal da balsa permanece igual à velocidade do avião.

Nesse caso, a Eq. 4-27 nos dá

$$\phi = \tan^{-1}\frac{555{,}5 \text{ m}}{500 \text{ m}} = 48{,}0°. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) No momento em que a balsa atinge a água, qual é sua velocidade $\vec{v}$ em termos dos vetores unitários e na notação módulo-ângulo?

IDÉIAS-CHAVE (1) As componentes horizontal e vertical da velocidade da balsa são independentes. (2) A componente v_x não muda em relação ao valor inicial $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$, pois não existe uma aceleração horizontal. (3) A componente v_y muda em relação ao valor inicial $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \theta_0$, pois existe uma aceleração vertical.

Cálculos: Quando a balsa atinge a água,

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = (55{,}0 \text{ m/s})(\cos 0°) = 55{,}0 \text{ m/s}.$$

Usando a Eq. 4-23 e o tempo de queda da balsa $t = 10{,}1$ s, descobrimos que quando a balsa atinge a água

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt \qquad (4\text{-}30) \\ &= (55{,}0 \text{ m/s})(\operatorname{sen} 0°) - (9{,}8 \text{ m/s}^2)(10{,}1 \text{ s}) \\ &= -99{,}0 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Assim, no momento em que a balsa atinge a água, sua velocidade é

$$\vec{v} = (55{,}0 \text{ m/s})\hat{\text{i}} - (99{,}0 \text{ m/s})\hat{\text{j}}. \quad \text{(Resposta)}$$

Usando a Eq. 3-6 como guia, descobrimos que o módulo e o ângulo de $\vec{v}$ são

$$v = 113 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad \theta = -60{,}9°. \quad \text{(Resposta)}$$

Exemplo 4-7

A Fig. 4-16 mostra um navio pirata a 560 m de um forte que protege a entrada de um porto. Um canhão de defesa, situado ao nível do mar, dispara balas com uma velocidade inicial $v_0 = 82$ m/s.

(a) Com que ângulo θ_0 em relação à horizontal as balas devem ser disparadas para acertar o navio?

IDÉIAS-CHAVE (1) Uma bala disparada pelo canhão é um projétil. Estamos interessados em uma equação que relacione o ângulo de lançamento θ_0 ao deslocamento horizontal da bala entre o canhão e o navio. (2) Como o canhão e o navio estão na mesma altura, o deslocamento horizontal é igual ao alcance.

Cálculos: Podemos relacionar o ângulo de lançamento θ_0 ao alcance R através da Eq. 4-26, $R = (v_0^2/g)$ sen $2\theta_0$, que pode ser escrita na forma

$$\theta_0 = \frac{1}{2}\text{sen}^{-1}\frac{gR}{v_0^2} = \frac{1}{2}\text{sen}^{-1}\frac{(9{,}8\text{ m/s}^2)(560\text{ m})}{(82\text{ m/s})^2} = \frac{1}{2}\text{sen}^{-1}\,0{,}816. \qquad (4\text{-}31)$$

Uma solução de sen^{-1} 0,816 (54,7°) é a fornecida pelas calculadoras; subtraindo-a de 180°, obtemos a outra solução (125,3°). Assim, a Eq. 4-31 nos dá

$$\theta_0 = 27° \quad \text{e} \quad \theta_0 = 63°. \qquad \text{(Resposta)}$$

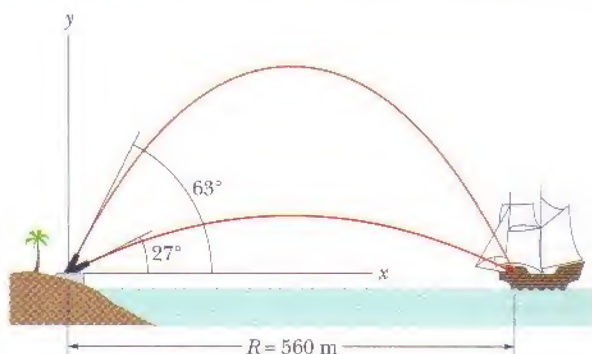


FIG. 4-16 Um navio pirata sendo atacado.

(b) Qual é o alcance máximo das balas de canhão?

Cálculos: Como vimos anteriormente, o alcance máximo corresponde a um ângulo de elevação θ_0 de 45°. Assim,

$$R = \frac{v_0^2}{g}\text{sen }2\theta_0 = \frac{(82\text{ m/s})^2}{9{,}8\text{ m/s}^2}\text{sen }(2\times 45°) = 686\text{ m} \approx 690\text{ m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Quando o navio pirata se afasta do porto, a diferença entre os dois ângulos de elevação que permitem acertar o navio diminui até que eles se tornam iguais entre si e iguais a $\theta = 45°$ quando o navio está a 690 m de distância. Para distâncias maiores é impossível acertar o navio.

Exemplo 4-8

Suponha que um jogador de beisebol B rebata uma bola na direção de um jogador F com uma velocidade inicial $v_0 = 40$ m/s e um ângulo inicial $\theta_0 = 35°$. Durante o trajeto da bola uma reta ligando o jogador F à posição da bola faz um ângulo ϕ com o solo. Faça um gráfico do ângulo de visada ϕ em função do tempo t, supondo (a) que o jogador F está na posição correta para apanhar a bola; (b) que o jogador está a 6,0 m de distância da posição correta, mais perto do jogador B; (c) está a 6,0 m de distância da posição correta, mais longe do batedor B.

IDÉIAS-CHAVE (1) Desprezando a resistência do ar, a bola é um projétil para o qual o movimento vertical e o movimento horizontal podem ser analisados separadamente. (2) Supondo que a bola é apanhada aproximadamente na mesma altura em que é rebatida, a distância horizontal percorrida pela bola é o alcance R, dado pela Eq. 4-26, $R = (v_0^2/g)$ sen $2\theta_0$.

Cálculos: A bola será apanhada se a distância entre o jogador F e o jogador B for igual ao alcance R da bola. De acordo com a Eq. 4-26, temos:

$$R = \frac{v_0^2}{g}\text{sen }2\theta_0 = \frac{(40\text{ m/s})^2}{9{,}8\text{ m/s}^2}\text{sen }(70°) = 153{,}42\text{ m}. \qquad (4\text{-}32)$$

A Fig. 4-17a mostra um instantâneo da bola quando ela se encontra a altura y e a uma distância horizontal x do jogador B (que está na origem). A distância horizontal entre a bola e o jogador F é $R - x$, e o ângulo de visada da bola, ϕ, do ponto de vista do jogador F, é dado por tan $\phi = y/(R - x)$. Para calcular a altura y usamos a Eq. 4-22, $y - y_0 = (v_0 \text{ sen } \theta_0)t - gt^2/2$, fazendo $y_0 = 0$. Para calcular a distância horizontal x usamos a Eq. 4-21, $x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t$, fazendo $x_0 = 0$. Nesse caso, para $v_0 = 40$ m/s e $\theta_0 = 35°$, temos:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{(40\text{ sen }35°)t - 4{,}9t^2}{153{,}42 - (40\cos 35°)t}. \qquad (4\text{-}33)$$

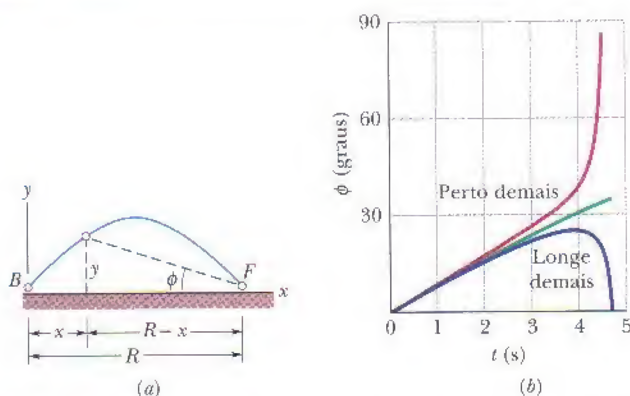


FIG. 4-17 (*a*) Ângulo de elevação ϕ de uma bola em relação a um jogador. (*b*) Gráfico de ϕ em função do tempo t.

A curva do meio da Fig. 4-17*b* é o gráfico desta função. Vemos que o ângulo de visada aumenta de forma quase linear durante todo o percurso da bola.

Se o jogador F está a 6,0 m de distância da posição correta, mais perto do jogador B, substituímos a distância de 153,42 m da Eq. 4-33 por 153,42 m − 6,0 m = 147,42 m. O gráfico da nova função é a curva "perto demais" da Fig. 4-17*b*. Nesse caso, o ângulo de visada da bola aumenta rapidamente na parte final do percurso, quando a bola passa sobre a cabeça do jogador. Se o jogador F está a 6,0 m de distância da posição correta, mais longe do jogador B, substituímos a distância de 153,42 m da Eq. 4-33 por 153,42 + 6,0 m = 159,42 m. O gráfico da nova função é a curva "longe demais" da Fig. 4-17*b*. Nesse caso, o ângulo de visada primeiro aumenta e depois diminui rapidamente. Assim, se a bola é rebatida na direção do jogador F, este é capaz de avaliar, pelo modo como o ângulo de visada ϕ varia com o tempo, se deve permanecer onde está, correr na direção do jogador B ou correr na direção oposta.

Exemplo 4-9 Aumente sua capacidade

Uma bola de golfe é lançada no instante $t = 0$, como mostra a Fig. 4-18*a*. A Fig. 4-18*b* mostra o ângulo θ entre a direção do movimento da bola e o semi-eixo x positivo em função do tempo t. A bola se choca com o solo no instante $t = 6{,}00$ s. Determine o módulo v_0 da velocidade de lançamento da bola, a altura $(y - y_0)$ do ponto em que a bola atinge o solo em relação ao ponto de lançamento e a direção do movimento da bola no momento em que atinge o solo.

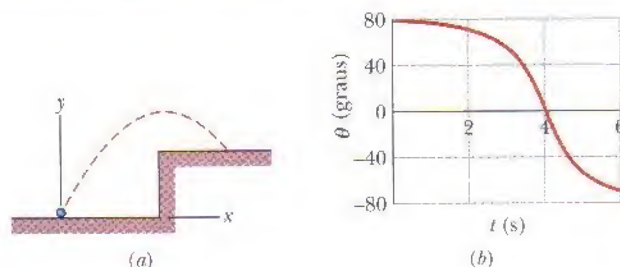


FIG. 4-18 (*a*) Trajetória de uma bola de golfe lançada em um terreno mais elevado. (*b*) Gráfico do ângulo θ entre a direção do movimento da bola e o semi-eixo x positivo em função do tempo t.

IDÉIAS-CHAVE (1) Como a bala se comporta como um projétil, as componentes horizontal e vertical do movimento podem ser analisadas separadamente. (2) A componente horizontal do movimento da bola, $v_x = v_0 \cos \theta_0$, não varia com o tempo. (3) A componente vertical do movimento da bola, v_y, *varia* com o tempo e se anula quando a bola atinge a altura máxima. (4) A direção do movimento da bola em qualquer instante é o ângulo do vetor velocidade $\vec{v}$ nesse instante. Esse ângulo é dado por $\tan \theta = v_x/v_y$, com as componentes da velocidade calculadas para esse instante.

Cálculos: Quando a bola atinge a altura máxima, $v_y = 0$. Assim, a direção da velocidade $\vec{v}$ é horizontal, ou seja, $\theta = 0°$. Observando o gráfico, vemos que isso acontece no instante $t = 0{,}4$ s. Vemos também que o ângulo de lançamento θ_0 (o ângulo no instante $t = 0$) é 80°. Usando a Eq. 4-23, $v_y = v_0 \text{ sen } \theta_0 - gt$, com $t = 4{,}0$ s, $g = 9{,}8$ m/s² e $v_y = 0$, obtemos

$$v_0 = 39{,}80 \approx 40 \text{ m/s.} \qquad \text{(Resposta)}$$

A bola se choca com o solo no instante $t = 6{,}00$ s. Usando a Eq. 4-22, $y - y_0 = (v_0 \text{ sen } \theta_0)t - gt^2/2$, com $t = 6{,}00$ s, obtemos

$$y - y_0 = 58{,}77 \text{ m} \approx 59 \text{ m.} \qquad \text{(Resposta)}$$

No momento em que a bola se choca com o solo, sua velocidade horizontal v_x ainda é $v_0 \cos \theta_0$; substituindo v_0 e θ_0 por seus valores, obtemos $v_x = 6{,}911$ m/s. Para determinar a velocidade vertical nesse instante usamos a Eq. 4-23, $v_y = v_0 \text{ sen } \theta_0 - gt$, com $t = 6{,}00$ s, o que nos dá $v_y = -19{,}60$ m/s. Assim, o ângulo da direção do movimento da bola com a horizontal no momento em que se choca com o solo é

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1} \frac{-19{,}60 \text{ m/s}}{6{,}911 \text{ m/s}} \approx -71°. \qquad \text{(Resposta)}$$

4-7 | Movimento Circular Uniforme

Uma partícula está em **movimento circular uniforme** se descreve uma circunferência ou um arco de circunferência com velocidade escalar constante (*uniforme*). Embora a velocidade escalar não varie, *o movimento é acelerado* porque a velocidade muda de direção.

A Fig. 4-19 mostra a relação entre os vetores velocidade e aceleração em várias posições durante o movimento circular uniforme. O módulo dos dois vetores permanece constante durante o movimento, mas a orientação varia continuamente. A velocidade está sempre na direção tangente à circunferência e tem o mesmo sentido que o movimento. A aceleração está sempre na direção *radial* e aponta para o centro do círculo. Por essa razão, a aceleração associada ao movimento circular uniforme é chamada de **aceleração centrípeta** ("que busca o centro"). Como será demonstrado a seguir, o módulo dessa aceleração $\vec{a}$ é

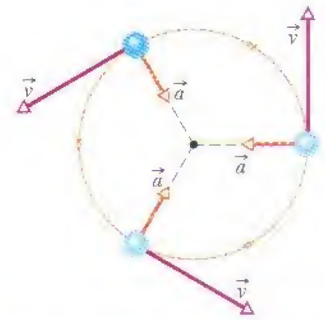


FIG. 4-19 Os vetores velocidade e aceleração de uma partícula em movimento circular uniforme.

$$a = \frac{v^2}{r} \quad \text{(aceleração centrípeta),} \tag{4-34}$$

onde r é o raio da circunferência e v é a velocidade da partícula.

Durante essa aceleração com velocidade escalar constante a partícula percorre a circunferência completa (uma distância igual a $2\pi r$) em um intervalo de tempo dado por

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad \text{(período).} \tag{4-35}$$

O parâmetro T é chamado de *período de revolução* ou, simplesmente, *período*. No caso mais geral o período é o tempo que uma partícula leva para completar uma volta em uma trajetória fechada.

Demonstração da Eq. 4-34

Para determinar o módulo e a orientação da aceleração no caso do movimento circular uniforme, considere a Fig. 4-20. Na Fig. 4-20*a* a partícula p se move com velocidade escalar constante v enquanto percorre uma circunferência de raio r. No instante mostrado, p possui coordenadas x_p e y_p.

Como vimos na Seção 4-3, a velocidade $\vec{v}$ de uma partícula em movimento é sempre tangente à trajetória da partícula na posição considerada. Na Fig. 4-20*a* isso significa que $\vec{v}$ é perpendicular a uma reta r que liga o centro da circunferência à posição da partícula. Nesse caso, o ângulo θ que $\vec{v}$ faz com uma reta vertical passando pelo ponto p é igual ao ângulo θ que o raio r faz com o eixo x.

As componentes escalares de $\vec{v}$ aparecem na Fig. 4-20*b*. Em termos dessas componentes, a velocidade $\vec{v}$ pode ser escrita na forma

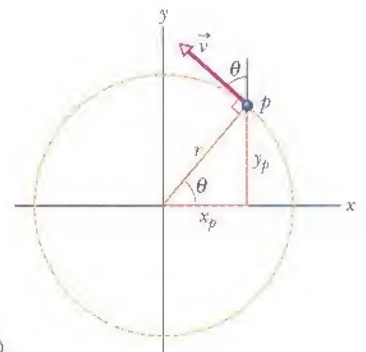
$$\vec{v} = v_x\hat{\mathrm{i}} + v_y\hat{\mathrm{j}} = (-v \operatorname{sen} \theta)\hat{\mathrm{i}} + (v \cos \theta)\hat{\mathrm{j}}. \tag{4-36}$$

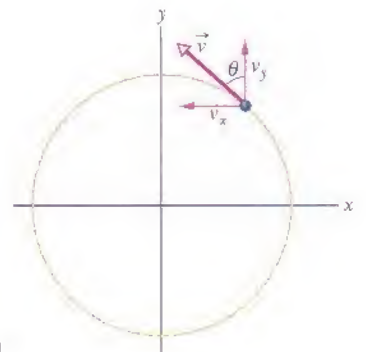
Usando o triângulo retângulo da Fig. 4-20*a*, podemos substituir sen θ por y_p/r e cos θ por x_p/r e escrever

$$\vec{v} = \left(-\frac{v y_p}{r}\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(\frac{v x_p}{r}\right)\hat{\mathrm{j}}. \tag{4-37}$$

Para determinar a aceleração $\vec{a}$ da partícula p devemos calcular a derivada dessa equação em relação ao tempo. Observando que a velocidade escalar v e o raio r não variam com o tempo, obtemos

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r}\frac{dy_p}{dt}\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(\frac{v}{r}\frac{dx_p}{dt}\right)\hat{\mathrm{j}}. \tag{4-38}$$





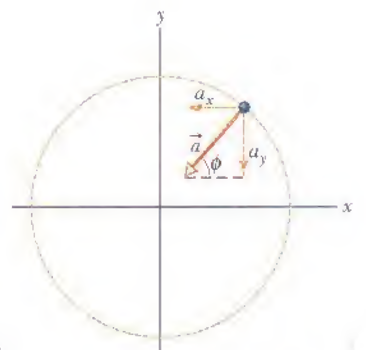


FIG. 4-20 Uma partícula p em movimento circular uniforme no sentido anti-horário. (*a*) Posição e velocidade $\vec{v}$ da partícula em um certo instante de tempo. (*b*) Velocidade $\vec{v}$. (*c*) Aceleração $\vec{a}$.

Note que a taxa de variação com o tempo de y_p, dy_p/dt, é igual à componente y da velocidade, v_y. Analogamente, $dx_p/dt = v_x$, e, novamente de acordo com a Fig. 4-20*b*, $v_x = -v \text{ sen } \theta$ e $v_y = v \cos \theta$. Fazendo essas substituições na Eq. 4-38, encontramos

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right)\hat{\text{i}} + \left(-\frac{v^2}{r}\text{sen }\theta\right)\hat{\text{j}}. \tag{4-39}$$

Este vetor e suas componentes aparecem na Fig. 4-20*c*. De acordo com a Eq. 3-6, temos:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{(\cos\theta)^2 + (\text{sen }\theta)^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{1} = \frac{v^2}{r},$$

como queríamos demonstrar. Para determinar a orientação de $\vec{a}$, calculamos o ângulo ϕ da Fig. 4-20*c*:

$$\tan\phi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-(v^2/r)\text{ sen }\theta}{-(v^2/r)\cos\theta} = \tan\theta.$$

Assim, $\phi = \theta$, o que significa que $\vec{a}$ aponta na direção do raio r da Fig. 4-20*a*, no sentido do cento da circunferência, como queríamos demonstrar.



TESTE 5 Um objeto se move com velocidade escalar constante, ao longo de uma trajetória circular, em um plano xy horizontal com centro na origem. Quando o objeto está em $x = -2$ m sua velocidade é $-(4 \text{ m/s})\hat{\text{j}}$. Determine (a) a velocidade e (b) a aceleração do objeto em $y = 2$ m.

Exemplo 4-10

Os pilotos de caça se preocupam quando têm que fazer curvas muito fechadas. Como o corpo do piloto fica submetido à aceleração centrípeta, com a cabeça mais próxima do centro de curvatura, a pressão sanguínea no cérebro diminui, o que pode levar à perda das funções cerebrais.

Os sinais de perigo são vários. Quando a aceleração centrípeta é de $2g$ ou $3g$, o piloto se sente pesado. Por volta de $4g$ a visão do piloto passa para preto e branco e se reduz à "visão de túnel". Se a aceleração é mantida ou aumentada o piloto deixa de enxergar e, logo depois, perde a consciência, uma situação conhecida como *g*-LOC, da expressão em inglês "*g*-induced loss of consciousness", ou seja, "perda de consciência induzida por *g*".

Qual é o módulo da aceleração, em unidades de g, para um piloto cuja aeronave inicia uma curva horizontal com uma velocidade $\vec{v}_i = (400\hat{\text{i}} + 500\hat{\text{j}})$ m/s e, 24,0 s mais tarde, termina a curva com uma velocidade $\vec{v}_f = (400\hat{\text{i}} + 500\hat{\text{j}})$ m/s?

IDÉIAS-CHAVE Supomos que o avião executa a curva com um movimento circular uniforme. Nesse caso, o módulo da aceleração centrípeta é dado pela Eq. 4-34 ($a = v^2/R$), onde R é o raio da curva. O tempo necessário para descrever uma circunferência completa é o período dado pela Eq. 4-35 ($T = 2\pi R/v$).

Cálculos: Como não conhecemos o raio R, vamos explicitar R na Eq. 4-35 e substituí-lo pelo seu valor na Eq. 4-34. O resultado é o seguinte:

$$a = \frac{2\pi v}{T}.$$

Nesta equação, v é o módulo (constante) da velocidade durante a curva. Vamos substituir as componentes da velocidade inicial na Eq. 3-6:

$$v = \sqrt{(400 \text{ m/s})^2 + (500 \text{ m/s})^2} = 640{,}31 \text{ m/s}.$$

Para determinar o período T do movimento, observamos que a velocidade final é igual ao negativo da velocidade inicial. Isso significa que a aeronave termina a curva no lado oposto da circunferência e completou metade de uma circunferência em 24,0 s. Assim, levaria $T = 48{,}0$ s para descrever uma circunferência completa. Substituindo esses valores na equação de a, obtemos

$$a = \frac{2\pi(640{,}31 \text{ m/s})}{48{,}0 \text{ s}} = 83{,}81 \text{ m/s}^2 \approx 8{,}6g. \text{ (Resposta)}$$

4-8 | Movimento Relativo em Uma Dimensão

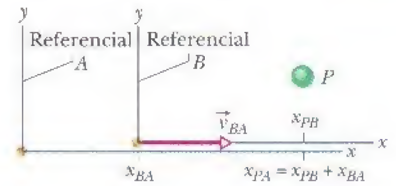


FIG. 4-21 Alexandre (referencial A) e Bárbara (referencial B) observam o carro P, enquanto B e P se movem com velocidades diferentes ao longo do eixo x comum aos dois referenciais. No instante mostrado, x_{BA} é a coordenada de B no referencial A. A coordenada de P é x_{PB} no referencial B e $x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}$ no referencial A.

Suponha que você veja um pato voando para o norte a 30 km/h. Para um outro pato voando ao lado do primeiro este parece estar parado. Em outras palavras, a velocidade de uma partícula depende do **referencial** de quem está observando ou medindo a velocidade. Para os nossos propósitos um referencial é um objeto físico ao qual fixamos nosso sistema de coordenadas. No dia-a-dia esse objeto é freqüentemente o solo. Assim, por exemplo, a velocidade que aparece em uma multa de trânsito é a velocidade em relação ao solo. A velocidade em relação ao guarda de trânsito será diferente se o guarda estiver em movimento enquanto mede a velocidade.

Suponha que Alexandre (situado na origem do referencial A da Fig. 4-21) está estacionado no acostamento de uma auto-estrada, observando o carro P (a "partícula") passar. Bárbara (situada na origem do referencial B) está dirigindo um carro na auto-estrada com velocidade constante e também observa o carro P. Suponha que os dois meçam a posição do carro em um dado momento. De acordo com a Fig. 4-21, temos:

$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}. \qquad (4\text{-}40)$$

Essa equação significa o seguinte: "A coordenada x_{PA} de P medida por A é *igual* à coordenada x_{PB} de P medida por B *mais* a coordenada x_{BA} de B medida por A". Observe que esta leitura está de acordo com a ordem em que os índices foram usados.

Derivando a Eq. 4-40 em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d}{dt}(x_{PA}) = \frac{d}{dt}(x_{PB}) + \frac{d}{dt}(x_{BA}).$$

Assim, as componentes da velocidade estão relacionadas através da equação

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}. \qquad (4\text{-}41)$$

Esta equação significa o seguinte: "A velocidade v_{PA} de P medida por A é *igual* à velocidade v_{PB} de P medida por B *mais* a velocidade v_{BA} de B medida por A". O termo v_{BA} é a velocidade do referencial B em relação ao referencial A.

Neste capítulo estamos considerando apenas referenciais que se movem com velocidade constante uns em relação aos outros. Em nosso exemplo isso significa que Bárbara (referencial B) dirige sempre com velocidade constante v_{BA} em relação a Alexandre (referencial A). Esta restrição não vale para o carro P (a partícula em movimento), cuja velocidade pode mudar de módulo e direção (ou seja, a partícula pode sofrer uma aceleração).

Para relacionar as acelerações de P medidas por Bárbara e por Alexandre em um mesmo instante, calculamos a derivada da Eq. 4-41 em relação ao tempo:

$$\frac{d}{dt}(v_{PA}) = \frac{d}{dt}(v_{PB}) + \frac{d}{dt}(v_{BA}).$$

Como v_{BA} é constante, o último termo é zero e temos

$$a_{PA} = a_{PB}. \qquad (4\text{-}42)$$

Em outras palavras,

> A aceleração de uma partícula medida por observadores em diferentes referenciais que se movem com velocidade constante uns em relação aos outros é sempre a mesma.

Exemplo 4-11

Na Fig. 4-21, suponha que a velocidade de Bárbara em relação a Alexandre é v_{BA} = 52 km/h (constante) e que o carro P está se movendo no sentido negativo do eixo x.

(a) Se Alexandre mede uma velocidade constante v_{PA} = −78 km/h para o carro P, qual é a velocidade v_{PB} medida por Bárbara?

IDÉIAS-CHAVE Podemos associar um referencial A a Alexandre e um referencial B a Bárbara. Como os dois referenciais se movem com velocidade constante um em relação ao outro ao longo do eixo x, podemos usar a Eq. 4-41 ($v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}$) para relacionar v_{PB} a v_{PA} e v_{BA}.

Cálculo: Temos

$$-78 \text{ km/h} = v_{PB} + 52 \text{ km/h}.$$

Assim,

$$v_{PB} = -130 \text{ km/h}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Comentário: Se o carro P estivesse ligado ao carro de Bárbara por um fio flexível enrolado em uma bobina, o fio se desenrolaria a uma velocidade de 130 km/h enquanto os dois carros estivessem se separando.

(b) Se o carro P freia até parar em relação a Alexandre (e, portanto, em relação ao solo) no instante t = 10 s, com uma aceleração constante, qual é a sua aceleração a_{PA} em relação a Alexandre?

IDÉIAS-CHAVE Para calcular a aceleração do carro P *em relação a Alexandre* devemos usar as velocidades do carro *em relação a Alexandre*. Como a aceleração é constante, podemos usar a Eq. 2-11 ($v = v_0 + at$) para relacionar a aceleração às velocidades inicial e final de P.

Cálculo: A velocidade inicial de P em relação a Alexandre é v_{PA} = −78 km/h, enquanto a velocidade final é 0. Assim,

$$a_{PA} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - (-78 \text{ km/h})}{10 \text{ s}} \frac{1 \text{ m/s}}{3{,}6 \text{ km/h}}$$
$$= 2{,}2 \text{ m/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

(c) Qual é a aceleração a_{PB} do carro P em relação a Bárbara durante a frenagem?

IDÉIA-CHAVE Para calcular a aceleração do carro P *em relação a Bárbara* devemos usar as velocidades do carro *em relação a Bárbara*.

Cálculo: A velocidade inicial de P em relação a Bárbara foi determinada no item (a) (v_{PB} = −130 km/h). A velocidade final de P em relação a Bárbara é −52 km/h (esta é a velocidade do carro parado em relação ao carro de Bárbara). Assim,

$$a_{PB} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{-52 \text{ km/h} - (-130 \text{ km/h})}{10 \text{ s}} \frac{1 \text{ m/s}}{3{,}6 \text{ km/h}}$$
$$= 2{,}2 \text{ m/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Comentário: Poderíamos prever este resultado. Como Alexandre e Bárbara estão se movendo com velocidade constante um em relação ao outro, a aceleração do carro P medida pelos dois deve ser a mesma.

4-9 | Movimento Relativo em Duas Dimensões

Nossos dois amigos estão novamente observando o movimento de uma partícula P a partir da origem dos referenciais A e B, enquanto B se move com velocidade constante $\vec{v}_{BA}$ em relação a A. (Os eixos correspondentes destes dois sistemas de coordenadas permanecem paralelos.) A Fig. 4-22 mostra um certo instante durante o movimento. Nesse instante o vetor posição da origem de B em relação à origem de A é $\vec{r}_{BA}$. Os vetores posição da partícula P são $\vec{r}_{PA}$ em relação à origem de A e $\vec{r}_{PB}$ em relação à origem de B. A posição das origens e extremidades desses três vetores mostra que estão relacionados através da equação

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}. \qquad (4\text{-}43)$$

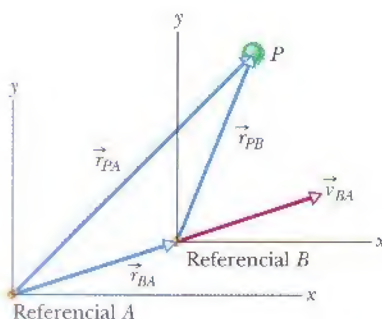


FIG. 4-22 O referencial B possui uma velocidade bidimensional constante $\vec{v}_{BA}$ em relação ao referencial A. O vetor posição de B em relação a A é $\vec{r}_{BA}$. Os vetores posições da partícula P são $\vec{r}_{PA}$ em relação a A e $\vec{r}_{PB}$ em relação a B.

Derivando essa equação em relação ao tempo, encontramos uma equação que envolve as velocidades $\vec{v}_{PA}$ e $\vec{v}_{PB}$ da partícula P em relação aos nossos observadores:

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}. \qquad (4\text{-}44)$$

Derivando essa equação em relação ao tempo, obtemos uma equação que envolve as acelerações $\vec{a}_{PA}$ e $\vec{a}_{PB}$ da partícula P em relação aos nossos observadores. Note, porém, que, como $\vec{v}_{BA}$ é constante, sua derivada é zero. Assim, obtemos

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}. \qquad (4\text{-}45)$$

Como para o movimento unidimensional, temos a seguinte regra: A aceleração de uma partícula medida por observadores em diferentes referenciais que se movem com velocidade constante uns em relação aos outros é sempre a mesma.

Exemplo 4-12

Na Fig. 4-23*a* um avião se move para leste enquanto o piloto direciona o avião ligeiramente ao sul do leste, para compensar um vento constante que sopra para nordeste. O avião tem uma velocidade $\vec{v}_{AV}$ em relação ao vento, com uma velocidade do ar (velocidade escalar em relação ao vento) de 215 km/h e uma orientação que faz um ângulo θ ao sul do leste. O vento tem uma velocidade $\vec{v}_{VS}$ em relação ao solo, com uma velocidade escalar de 65,0 km/h e uma orientação que faz um ângulo de 20° a leste do norte. Qual é o módulo da velocidade $\vec{v}_{AS}$ do avião em relação ao solo e qual é o valor de θ?

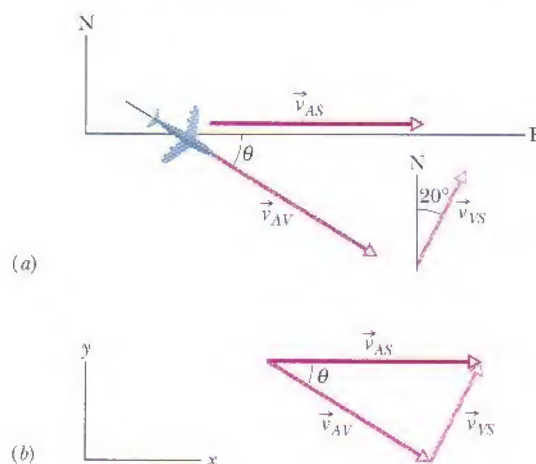


FIG. 4-23 Efeito do vento sobre um avião.

IDÉIAS-CHAVE A situação é semelhante à da Fig. 4-22. Neste caso, a partícula P é o avião, o referencial A está associado ao solo (que chamaremos de S) e o referencial B está associado ao vento (que chamaremos de V). Precisamos construir um diagrama vetorial semelhante ao da Fig. 4-22, mas dessa vez usando os três vetores velocidade.

Cálculos: Primeiro, escrevemos uma frase que expressa uma relação entre os três vetores da Fig. 4-23*b*:

velocidade do avião em relação ao solo (*AS*)	=	velocidade do avião em relação ao vento (*AV*)	+	velocidade do vento em relação ao solo (*VS*)

Em notação vetorial, essa relação se torna

$$\vec{v}_{AS} = \vec{v}_{AV} + \vec{v}_{VS}. \qquad (4\text{-}46)$$

Podemos determinar as componentes dos vetores no sistema de coordenadas da Fig. 4-23*b* e resolver a Eq. 4-46 eixo por eixo. No caso das componentes y, temos:

$$v_{AS,y} = v_{AV,y} + v_{VS,y}$$

ou $0 = -(215 \text{ km/h}) \text{ sen } \theta + (65{,}0 \text{ km/h})(\cos 20{,}0°)$.

Explicitando θ, obtemos

$$\theta = \text{sen}^{-1} \frac{(65{,}0 \text{ km/h})(\cos 20{,}0°)}{215 \text{ km/h}} = 16{,}5°. \quad \text{(Resposta)}$$

No caso das componentes x, temos:

$$v_{AS,x} = v_{AV,x} + v_{VS,x}.$$

Como $\vec{v}_{AS}$ é paralela ao eixo x, a componente $v_{AS,x}$ é igual ao módulo v_{AS} do vetor. Substituindo $v_{AS,x}$ por v_{AS} e fazendo $\theta = 16{,}5°$, obtemos

$$v_{AS} = (215 \text{ km/h})(\cos 16{,}5°) + (65{,}0 \text{ km/h})(\text{sen } 20{,}0°)$$
$$= 228 \text{ km/h}. \quad \text{(Resposta)}$$

REVISÃO E RESUMO

Vetor Posição A localização de uma partícula em relação à origem de um sistema de coordenadas é dada por um *vetor posição* $\vec{r}$, que em termos dos vetores unitários assume a forma

$$\vec{r} = x\hat{\text{i}} + y\hat{\text{j}} + z\hat{\text{k}}. \quad (4\text{-}1)$$

onde $x\hat{\text{i}}, y\hat{\text{j}}$ e $z\hat{\text{k}}$ são as componentes vetoriais do vetor posição $\vec{r}$ e x, y e z são as componentes escalares (e também as coordenadas da partícula). Um vetor posição pode ser descrito por um módulo e um ou dois ângulos, pelas componentes vetoriais ou pelas componentes escalares.

Deslocamento Se uma partícula se move de tal forma que seu vetor posição muda de $\vec{r}_1$ para $\vec{r}_2$, o deslocamento $\Delta\vec{r}$ da partícula é dado por

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (4\text{-}2)$$

O deslocamento também pode ser escrito na forma

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{\text{i}} + (y_2 - y_1)\hat{\text{j}} + (z_2 - z_1)\hat{\text{k}} \quad (4\text{-}3)$$
$$= \Delta x\hat{\text{i}} + \Delta y\hat{\text{j}} + \Delta z\hat{\text{k}}. \quad (4\text{-}4)$$

Velocidade Média e Velocidade Instantânea Se uma partícula sofre um deslocamento $\Delta\vec{r}$ em um intervalo de tempo Δt, sua velocidade média $\vec{v}_{\text{méd}}$ nesse intervalo de tempo é dada por

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (4\text{-}8)$$

Quando Δt na Eq. 4-8 tende a 0, $\vec{v}_{\text{méd}}$ tende para um limite $\vec{v}$ que é chamado de *velocidade instantânea* ou, simplesmente, *velocidade*:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (4\text{-}10)$$

Em termos dos vetores unitários, a velocidade instantânea assume a forma

$$\vec{v} = v_x\hat{\text{i}} + v_y\hat{\text{j}} + v_z\hat{\text{k}}, \quad (4\text{-}11)$$

onde $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$ e $v_z = dz/dt$. A velocidade instantânea $\vec{v}$ de uma partícula é sempre tangente à trajetória da partícula na posição da partícula.

Aceleração Média e Aceleração Instantânea Se a velocidade de uma partícula varia de $\vec{v}_1$ para $\vec{v}_2$ no intervalo de tempo Δt, sua *aceleração média* durante o intervalo Δt é

$$\vec{a}_{\text{méd}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \quad (4\text{-}15)$$

Quando Δt na Eq. 4-15 tende a zero, $\vec{a}_{\text{méd}}$ tende para um limite $\vec{a}$ que é chamado de *aceleração instantânea* ou, simplesmente, *aceleração*:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (4\text{-}16)$$

Na notação de vetores unitários,

$$\vec{a} = a_x\hat{\text{i}} + a_y\hat{\text{j}} + a_z\hat{\text{k}}, \quad (4\text{-}17)$$

onde $a_x = dv_x/dt$, $a_y = dv_y/dt$ e $a_z = dv_z/dt$.

Movimento de Projéteis *Movimento balístico* é o movimento de uma partícula que é lançada com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$. Durante o percurso a aceleração horizontal da partícula é zero e a aceleração vertical é a aceleração de queda livre, $-g$. (A orientação para cima é escolhida como sentido positivo.) Se $\vec{v}_0$ é expressa através de um módulo (a velocidade escalar v_0) e um ângulo θ_0 (medido em relação à horizontal), as equações de movimento da partícula ao longo do eixo horizontal x e do eixo vertical y são

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t, \quad (4\text{-}21)$$
$$y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2, \quad (4\text{-}22)$$
$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt, \quad (4\text{-}23)$$
$$v_y^2 = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \quad (4\text{-}24)$$

A **trajetória** de uma partícula em movimento balístico é parabólica e é dada por

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2}, \quad (4\text{-}25)$$

se x_0 e y_0 das Eqs. (4-21), (4-22) e (4-24) forem nulos. O **alcance horizontal** R da partícula, que é a distância horizontal do ponto de lançamento ao ponto em que a partícula retorna à altura do ponto de lançamento, é dado por

$$R = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen} 2\theta_0. \quad (4\text{-}26)$$

Movimento Circular Uniforme Se uma partícula descreve uma circunferência ou arco de circunferência de raio r com velocidade constante v, dizemos que está em *movimento circular uniforme*. Nesse caso, a partícula possui uma aceleração $\vec{a}$ cujo módulo é dado por

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (4\text{-}34)$$

O vetor $\vec{a}$ aponta sempre para o centro da circunferência ou arco de circunferência, e é chamado de *aceleração centrípeta*. O tempo que a partícula leva para descrever uma circunferência completa é dado por

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \quad (4\text{-}35)$$

O parâmetro T é chamado de *período de revolução* ou, simplesmente, *período*.

Movimento Relativo Quando dois referenciais A e B estão se movendo um em relação ao outro com velocidade constante, a velocidade de uma partícula P, medida por um observador do referencial A, é em geral diferente da velocidade medida por um observador do referencial B. As duas velocidades medidas estão relacionadas através da equação

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}, \quad (4\text{-}44)$$

onde $\vec{v}_{BA}$ é a velocidade de B em relação a A. Os dois observadores medem a mesma aceleração:

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}. \quad (4\text{-}45)$$

PERGUNTAS

1 A Fig. 4-24 mostra a posição inicial i e a posição final f de uma partícula. Determine (a) o vetor posição inicial $\vec{r}_i$ e (b) o vetor posição final $\vec{r}_f$ da partícula, ambos na notação de vetores unitários. (c) Qual é a componente x do deslocamento $\Delta\vec{r}$?

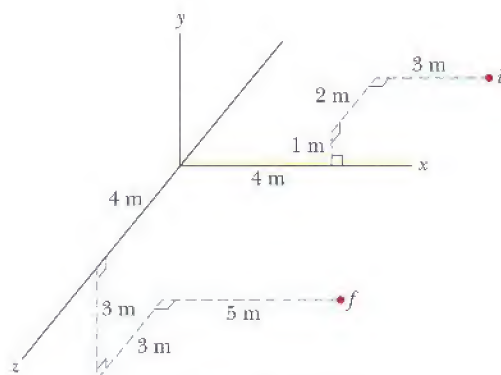


FIG. 4-24 Pergunta 1.

2 A Fig. 4-25 mostra o caminho seguido por um gambá à procura de comida no lixo, a partir do ponto inicial i. O gambá levou o mesmo tempo T para ir de cada um dos pontos marcados até o ponto seguinte. Ordene os pontos a, b e c de acordo com o módulo da velocidade média do gambá para alcançá-los a partir do ponto inicial i, começando pelo maior.

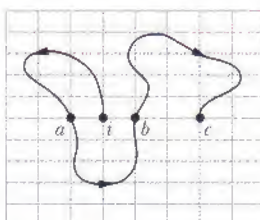


FIG. 4-25 Pergunta 2.

3 Você tem que lançar um foguete, praticamente do nível do solo, com uma das velocidades iniciais especificadas pelos seguintes vetores: (1) $\vec{v}_0 = 20\hat{i} + 70\hat{j}$; (2) $\vec{v}_0 = -20\hat{i} + 70\hat{j}$; (3) $\vec{v}_0 = 20\hat{i} - 70\hat{j}$; (4) $\vec{v}_0 = -20\hat{i} - 70\hat{j}$. No seu sistema de coordenadas, x varia ao longo do nível do solo e y cresce para cima. (a) Ordene os vetores de acordo com o módulo da velocidade de lançamento do projétil, começando pelo maior. (b) Ordene os vetores de acordo com o tempo de vôo do projétil, começando pelo maior.

4 A Fig. 4-26 mostra três situações nas quais projéteis idênticos são lançados do solo (a partir do mesmo nível) com velocidades escalares e ângulos iguais. Entretanto, os projéteis não caem no mesmo terreno. Ordene as situações de acordo com as velocidades escalares finais dos projéteis imediatamente antes de aterrissarem, começando pela maior.

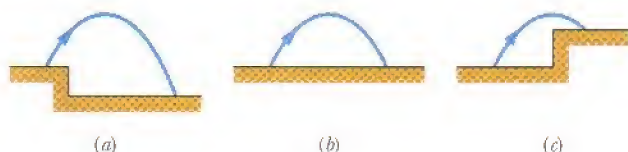


FIG. 4-26 Pergunta 4.

5 Quando Paris foi bombardeada a mais de 100 km de distância na Primeira Guerra Mundial por um canhão apelidado de "Big Bertha", os projéteis foram lançados com um ângulo maior que 45° para atingirem uma distância maior, possivelmente até duas vezes maior que a 45°. Este resultado significa que a densidade do ar em grandes altitudes aumenta ou diminui com a altitude?

6 Na Fig. 4-27, uma tangerina é arremessada para cima e passa pelas janelas 1, 2 e 3, que têm o mesmo tamanho e estão regularmente espaçadas na vertical. Ordene essas três janelas de acordo (a) com o tempo que a tangerina leva para passar e (b) com a velocidade média da tangerina durante a passagem, em ordem decrescente.

Na descida a tangerina passa pelas janelas 4, 5 e 6, que têm o mesmo tamanho e não estão regularmente espaçadas na horizontal. Ordene essas três janelas de acordo (c) com o tempo que a tangerina leva para passar por elas e (d) com a velocidade média da tangerina durante a passagem, em ordem decrescente.

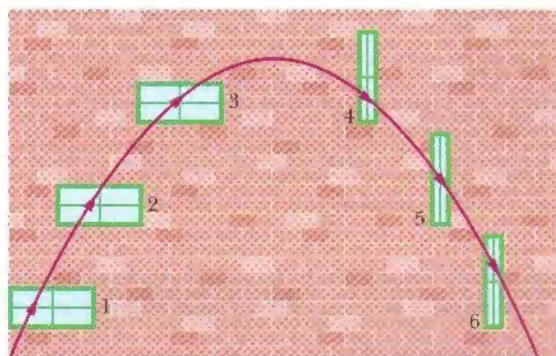


FIG. 4-27 Pergunta 6.

7 A Fig. 4-28 mostra três trajetórias de uma bola de futebol chutada a partir do chão. Ignorando os efeitos do ar, ordene as trajetórias de acordo (a) com o tempo de percurso, (b) com a componente vertical da velocidade inicial, (c) com a componente horizontal da velocidade inicial e (d) com a velocidade escalar inicial, em ordem decrescente.

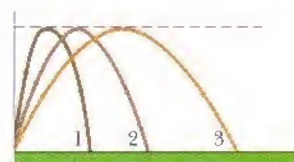


FIG. 4-28 Pergunta 7.

8 O único uso decente de um bolo de frutas é na prática da catapulta. A curva 1 na Fig. 4-29 mostra a altura y de um bolo de frutas arremessado por uma catapulta em função do ângulo θ entre o vetor velocidade e o vetor aceleração durante o percurso. (a) Qual dos pontos assinalados por letras nessa curva corresponde ao choque do bolo de frutas com o solo? (b) A curva 2 é um gráfico semelhante para a mesma velocidade escalar inicial, mas um ângulo de lançamento diferente. Nesse caso, o bolo de frutas vai cair em um ponto mais distante ou mais próximo do ponto de lançamento?

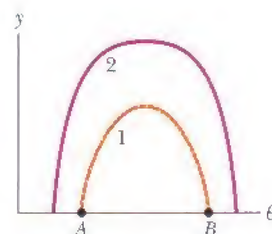


FIG. 4-29 Pergunta 8.

9 Um avião que está voando horizontalmente com uma velocidade constante de 350 km/h, sobrevoando um terreno plano, deixa cair um fardo com suprimentos. Ignore o efeito do ar sobre o fardo. Quais são as componentes iniciais (a) vertical e (b) horizontal da velocidade inicial do fardo? (c) Qual é a componente horizontal da velocidade imediatamente antes de o fardo se chocar com o solo? (d) Se a velocidade do avião fosse de 450 km/h, o tempo de queda seria maior, menor ou igual?

10 Uma bola é chutada a partir do chão, em um terreno plano, com uma certa velocidade inicial. A Fig. 4-30 mostra o alcance R da bola em função do ângulo de lançamento θ_0. Ordene os três pontos identificados no gráfico por letras de acordo (a) com o tempo que a bola permanece no ar e (b) com a velocidade da bola na altura máxima, em ordem decrescente.

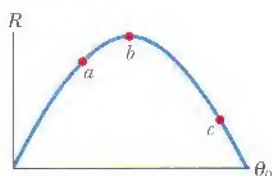


FIG. 4-30 Pergunta 10.

11 Na Fig. 4-31 a partícula P está em movimento circular uniforme em torno da origem de um sistema de coordenadas xy. (a) Para que valores de θ a componente vertical r_y do vetor posição possui maior módulo? (b) Para que valores de θ a componente vertical v_y da velocidade da partícula possui maior módulo? (c) Para que valores de θ a componente vertical a_y da aceleração da partícula possui maior módulo?

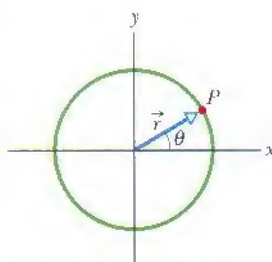


FIG. 4-31 Pergunta 11.

12 (a) É possível estar acelerando enquanto se viaja com velocidade escalar constante? É possível fazer uma curva (b) com aceleração nula e (c) com uma aceleração de módulo constante?

13 A Fig. 4-32 mostra quatro trilhos (semicírculos ou quartos de círculo) que podem ser usados por um trem que se move com velocidade escalar constante. Ordene os trilhos de acordo com o módulo da aceleração do trem no trecho curvo, em ordem decrescente.

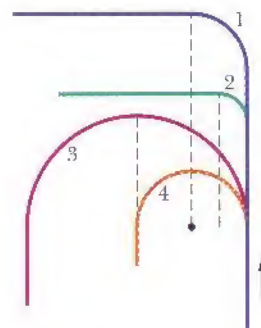


FIG. 4-32 Pergunta 13.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

 Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 4-2 Posição e Deslocamento

•1 Um pósitron sofre um deslocamento $\Delta\vec{r} = 2{,}0\hat{i} - 3{,}0\hat{j} + 6{,}0\hat{k}$ e termina com o vetor posição $\vec{r} = 3{,}0\hat{j} - 4{,}0\hat{k}$, em metros. Qual era o vetor posição inicial do pósitron?

•2 Uma semente de melancia possui as seguintes coordenadas: $x = -5{,}0$ m, $y = 8{,}0$ m e $z = 0$ m. Determine o vetor posição da semente (a) na notação de vetores unitários e como (b) um módulo e (c) um ângulo em relação ao sentido positivo do eixo x. (d) Desenhe o vetor em um sistema de coordenadas dextrogiro. Se a semente é transportada até as coordenadas (3,00 m, 0 m, 0 m), determine seu deslocamento (e) na notação de vetores unitários e como (f) um módulo e (g) um ângulo em relação ao sentido positivo do eixo x.

•3 O vetor posição de um elétron é $\vec{r} = (5{,}0\text{ m})\hat{i} - (3{,}0\text{ m})\hat{j} + (2{,}0\text{ m})\hat{k}$. (a) Determine o módulo de $\vec{r}$. (b) Desenhe o vetor em um sistema de coordenadas dextrogiro.

••4 O ponteiro dos minutos de um relógio de parede mede 10 cm da ponta até o eixo de rotação. O módulo e o ângulo do vetor deslocamento da sua ponta devem ser determinados para três intervalos de tempo. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo associado ao deslocamento da ponta entre as posições correspondentes a quinze e trinta minutos depois da hora, (c) o módulo e (d) o ângulo correspondente à meia hora seguinte e (e) o módulo e (f) o ângulo correspondente à hora seguinte.

seção 4-3 Velocidade Média e Velocidade Instantânea

•5 O vetor posição de um íon é inicialmente $\vec{r} = 5{,}0\hat{i} - 6{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$ e 10 s depois passa a ser $\vec{r} = 2{,}0\hat{i} + 8{,}0\hat{j} - 2{,}0\hat{k}$, com todos os valores em metros. Na notação de vetores unitários, qual é a velocidade média $\vec{v}_{\text{méd}}$ durante os 10 s?

•6 A posição de um elétron é dada por $\vec{r} = 3{,}00t\hat{i} - 4{,}00t^2\hat{j} + 2{,}00\hat{k}$, com t em segundos e $\vec{r}$ em metros. (a) Qual é a velocidade $\vec{v}(t)$ do elétron na notação de vetores unitários? Quanto vale $\vec{v}(t)$ no instante $t = 2{,}00$ s (b) na notação de vetores unitários e como (c) um módulo e (d) um ângulo em relação ao sentido positivo do eixo x?

•7 Um trem com uma velocidade constante de 60,0 km/h se move na direção leste por 40,0 min, depois em uma direção que faz um ângulo de 50,0° a leste com a direção norte por 20,0 min e, finalmente, na direção oeste por mais 50,0 min. Quais são (a) o módulo e (b) o ângulo da velocidade média do trem durante essa viagem?

••8 Um avião voa 483 km para leste, da cidade A para a cidade B, em 45,0 min, e depois 966 km para o sul, da cidade B para uma cidade C, em 1,5 h. Para a viagem inteira, determine (a) o módulo e (b) a direção do deslocamento do avião, (c) o módulo e (d) a direção da velocidade média e (e) a velocidade escalar média.

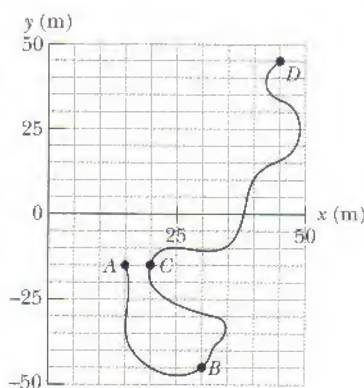


FIG. 4-33 Problema 9.

••9 A Fig. 4-33 mostra os movimentos de um esquilo em um terreno plano, do ponto A (no instante t = 0) para os pontos B (em t = 5,00 min), C (em t = 10,0 min) e, finalmente, D (em t = 15,0 min). Considere as velocidades médias do esquilo do ponto A para cada um dos outros três pontos. Entre essas velocidades médias determine (a) o módulo e (b) o ângulo da que possui o menor módulo e (c) o módulo e (d) o ângulo da que possui o maior módulo.

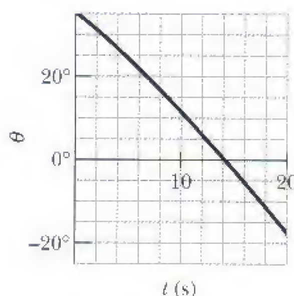


FIG. 4-34 Problema 10.

•••10 O vetor $\vec{r} = 5{,}00t\hat{i} + (et + ft^2)\hat{j}$ mostra a posição de uma partícula em função do tempo t. O vetor $\vec{r}$ está em metros, t está em segundos e os fatores e e f são constantes. A Fig. 4-34 mostra o ângulo θ da direção do movimento da partícula em função de t (θ é medido a partir do semi-eixo x positivo). Determine (a) e e (b) f, indicando suas unidades.

seção 4-4 Aceleração Média e Aceleração Instantânea

•11 Uma partícula se move de tal forma que sua posição (em metros) em função do tempo (em segundos) é dada por $\vec{r} = \hat{i} + 4t^2\hat{j} + t\hat{k}$. Escreva expressões para (a) sua velocidade e (b) sua aceleração em função do tempo.

•12 A velocidade inicial de um próton é $\vec{v} = 4{,}0\hat{i} - 2{,}0\hat{j} + 3{,}0\hat{k}$; 4,0 s mais tarde, passa a ser $\vec{v} = -2{,}0\hat{i} - 2{,}0\hat{j} + 5{,}0\hat{k}$ (em metros por segundo). Para esses 4,0 s, determine quais são (a) a aceleração média do próton $\vec{a}_{méd}$ na notação de vetores unitários, (b) o módulo de $\vec{a}_{méd}$ e (c) o ângulo entre $\vec{a}_{méd}$ e o semi-eixo x positivo.

•13 A posição $\vec{r}$ de uma partícula que se move em um plano xy é dada por $\vec{r} = (2{,}00t^3 - 5{,}00t)\hat{i} + (6{,}00 - 7{,}00t^4)\hat{j}$ com $\vec{r}$ em metros e t em segundos. Na notação de vetores unitários, calcule (a) $\vec{r}$, (b) $\vec{v}$ e (c) $\vec{a}$ para t = 2,00 s. (d) Qual é o ângulo entre o sentido positivo do eixo x e uma reta tangente à trajetória da partícula em t = 2,00 s?

•14 Em um certo instante um ciclista está 40,0 m a leste do mastro de um parque, indo para o sul com uma velocidade de 10,0 m/s. Após 30,0 s o ciclista está 40,0 m ao norte do mastro, dirigindo-se para o leste com uma velocidade de 10,0 m/s. Para o ciclista, durante esse intervalo de 30,0 s quais são (a) o módulo e (b) a direção do deslocamento, (c) o módulo e (d) a direção da velocidade média e (e) o módulo e (f) a direção da aceleração média?

••15 Um carro se move sobre um plano xy com componentes da aceleração a_x = 4,0 m/s² e a_y = −2,0 m/s². A velocidade inicial tem componentes v_{0x} = 8,0 m/s e v_{0y} = 12 m/s. Na notação de vetores unitários, qual é a velocidade do carro quando atinge a maior coordenada y?

••16 Um vento moderado acelera um seixo sobre um plano horizontal xy com uma aceleração constante $\vec{a} = (5{,}00\ \text{m/s}^2)\hat{i} + (7{,}00\ \text{m/s}^2)\hat{j}$. No instante t = 0, a velocidade é $(4{,}00\ \text{m/s})\hat{i}$. Quais são (a) o módulo e (b) o ângulo da velocidade do seixo após ter se deslocado 12,0 m paralelamente ao eixo x?

••17 Uma partícula deixa a origem com uma velocidade inicial $\vec{v} = (3{,}00\hat{i})$ m/s e uma aceleração constante $\vec{a} = (-1{,}00\hat{i} - 0{,}500\hat{j})$ m/s². Quando ela atinge o máximo valor de sua coordenada x, quais são (a) a sua velocidade e (b) o seu vetor posição?

••18 A velocidade $\vec{v}$ de uma partícula que se move no plano xy é dada por $\vec{v} = (6{,}0t - 4{,}0t^2)\hat{i} + 8{,}0\hat{j}$, com $\vec{v}$ em metros por segundo e t (> 0) em segundos. (a) Qual é a aceleração no instante t = 3,0 s? (b) Em que instante (se isso é possível) a aceleração é nula? (c) Em que instante (se isso é possível) a velocidade é nula? (d) Em que instante (se isso é possível) a velocidade escalar da partícula é igual a 10 m/s?

•••19 A aceleração de uma partícula que se move apenas em um plano horizontal xy é dada por $\vec{a} = 3t\hat{i} + 4t\hat{j}$, onde $\vec{a}$ está em metros por segundo ao quadrado e t em segundos. Em t = 0, o vetor posição $\vec{r} = (20{,}0\ \text{m})\hat{i} + (40{,}0\ \text{m})\hat{j}$ indica a localização da partícula, que nesse instante tem uma velocidade $\vec{v} = (5{,}00\ \text{m/s})\hat{i} + (2{,}00\ \text{m/s})\hat{j}$. Em t = 4,00 s, determine (a) o vetor posição em termos dos vetores unitários e (b) o ângulo entre a direção do movimento e o semi-eixo x positivo.

•••20 Na Fig. 4-35 a partícula A se move ao longo da reta y = 30 m com uma velocidade constante $\vec{v}$ de módulo 3,0 m/s e paralela ao eixo x. No instante em que a partícula A passa pelo eixo y a partícula B deixa a origem com velocidade inicial zero e aceleração constante $\vec{a}$ de módulo 0,40 m/s². Para que valor do ângulo θ entre $\vec{a}$ e o semi-eixo y positivo acontece uma colisão?

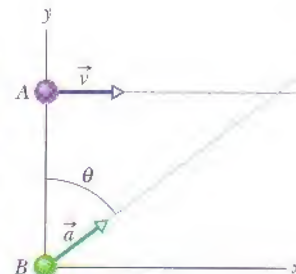


FIG. 4-35 Problema 20.

seção 4-6 Análise do Movimento de um Projétil

•21 Um projétil é disparado horizontalmente de uma arma que está 45,0 m acima de um terreno plano, emergindo da arma com uma velocidade de 250 m/s. (a) Por quanto tempo o projétil permanece no ar? (b) A que distância horizontal do ponto de disparo ele se choca com o solo? (c) Qual é o módulo da componente vertical da velocidade quando o projétil se choca com o solo?

•22 No Campeonato Mundial de Atletismo de 1991, em Tóquio, Mike Powell saltou 8,95 m, batendo por 5 cm um recorde de 23 anos para o salto em distância estabelecido por Bob Beamon. Suponha que a velocidade de Powell no início do salto era de 9,5 m/s (aproximadamente igual à de um velocista) e que g = 9,8 m/s² em Tóquio. Calcule a diferença entre o alcance de Powell e o máximo alcance possível para uma partícula lançada com a mesma velocidade.

•23 O recorde atual de salto de motocicleta é de 77,0 m, estabelecido por Jason Renie. Suponha que ele parta da rampa fazendo

um ângulo de 12° com a horizontal e que as alturas no início e no final do salto sejam iguais. Determine a velocidade inicial, desprezando a resistência do ar.

•24 Uma pequena bola rola horizontalmente até a borda de uma mesa de 1,20 m de altura e cai no chão. A bola chega ao chão a uma distância horizontal de 1,52 m da borda da mesa. (a) Por quanto tempo a bola fica no ar? (b) Qual é a velocidade da bola no instante em que chega à borda da mesa?

•25 Um dardo é arremessado horizontalmente com uma velocidade inicial de 10 m/s em direção a um ponto P, o centro de um alvo de parede. Ele atinge um ponto Q do alvo, verticalmente abaixo de P, 0,19 s depois do arremesso. (a) Qual é a distância PQ? (b) A que distância do alvo foi arremessado o dardo?

•26 Na Fig. 4-36, uma pedra é lançada em um rochedo de altura h com uma velocidade inicial de 42,0 m/s e um ângulo $\theta_0 = 60,0°$ com a horizontal. A pedra cai em um ponto A, 5,50 s após o lançamento. Determine (a) a altura h do rochedo, (b) a velocidade da pedra imediatamente antes do impacto em A e (c) a máxima altura H alcançada acima do solo.

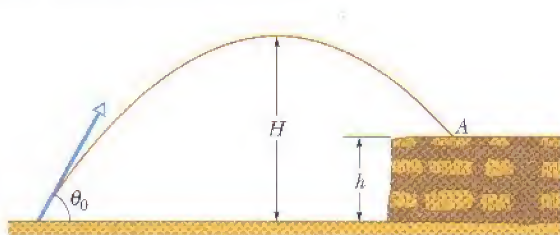


FIG. 4-36 Problema 26.

•27 Um certo avião tem uma velocidade de 290,0 km/h e está mergulhando com um ângulo $\theta = 30,0°$ abaixo da horizontal quando o piloto libera um chamariz (Fig. 4-37). A distância horizontal entre o ponto de lançamento e o ponto onde o chamariz se choca com o solo é $d = 700$ m. (a) Quanto tempo o chamariz passou no ar? (b) De que altura foi lançado?

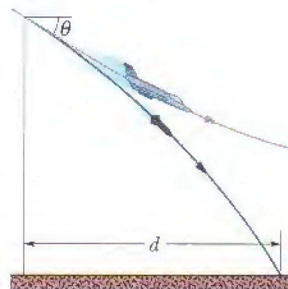


FIG. 4-37 Problema 27.

•28 Uma pedra é lançada de uma catapulta no instante $t = 0$, com uma velocidade inicial de módulo 20,0 m/s e um ângulo de 40,0° acima da horizontal. Quais são os módulos das componentes (a) horizontal e (b) vertical do deslocamento da pedra em relação à catapulta em $t = 1,10$ s? Repita os cálculos para as componentes (c) horizontal e (d) vertical em $t = 1,80$ s e para as componentes (e) horizontal e (f) vertical em $t = 5,00$ s.

••29 Um mergulhador salta com uma velocidade horizontal de 2,00 m/s de uma plataforma que está 10,0 m acima da superfície da água. (a) A que distância horizontal da borda da plataforma está o mergulhador 0,800 s após o início do salto? (b) A que distância vertical acima da superfície da água está o mergulhador nesse instante? (c) A que distância horizontal da borda da plataforma o mergulhador atinge a água?

••30 O trebuchet era uma máquina de arremesso construída para atacar as muralhas de um castelo durante um cerco. Uma grande pedra podia ser arremessada contra uma muralha para derrubá-la. A máquina não era instalada perto da muralha, porque os operadores seriam um alvo fácil para as flechas disparadas do alto das muralhas do castelo. Em vez disso, o trebuchet era posicionado de tal forma que a pedra atingia a muralha na parte descendente de sua trajetória. Suponha que uma pedra seja lançada com uma velocidade $v_0 = 28,0$ m/s e um ângulo $\theta_0 = 40,0°$. Qual é a velocidade da pedra se ela atinge a muralha (a) no momento em que chega à altura máxima de sua trajetória parabólica e (b) depois de cair metade da altura máxima? (c) Qual é a diferença percentual entre as respostas dos itens (b) e (a)?

••31 Um avião, mergulhando com velocidade constante em um ângulo de 53,0° com a vertical, lança um projétil a uma altitude de 730 m. O projétil chega ao solo 5,00 s após o lançamento. (a) Qual é a velocidade do avião? (b) Que distância o projétil percorre horizontalmente durante o percurso? Quais são as componentes (c) horizontal e (d) vertical da velocidade do projétil no momento em que chega ao solo?

••32 Durante uma partida de tênis, um jogador saca a 23,6 m/s, com o centro da bola deixando a raquete horizontalmente a 2,37 m de altura em relação à quadra. A rede está a 12 m de distância e tem 0,90 m de altura. (a) A bola passa para o outro lado da quadra? (b) Quando a bola chega à rede, qual é a distância entre o centro da bola e o alto da rede? Suponha que, nas mesmas condições, a bola deixe a raquete fazendo um ângulo 5,00° abaixo da horizontal. Nesse caso, (c) a bola passa para o outro lado da quadra? (d) Quando a bola chega à rede, qual é a distância entre o centro da bola e o alto da rede?

••33 Em uma cortada, um jogador de voleibol golpeia a bola com força, de cima para baixo, em direção à quadra adversária. É difícil controlar o ângulo de uma cortada. Suponha que uma bola seja cortada de uma altura de 2,30 m, com uma velocidade inicial de 20,0 m/s e um ângulo para baixo de 18,00°. Se o ângulo para baixo diminuir para 8,00°, a que distância adicional a bola atingirá a quadra adversária?

••34 Uma bola de futebol é chutada a partir do chão com uma velocidade inicial de 19,5 m/s e um ângulo para cima de 45°. No mesmo instante um jogador a 55 m de distância, na direção do chute, começa a correr para receber a bola. Qual deve ser sua velocidade média para que alcance a bola imediatamente antes que toque o gramado?

••35 A velocidade de lançamento de um projétil é cinco vezes maior que a velocidade na altura máxima. Determine o ângulo de lançamento θ_0.

••36 Um arremessador de peso de nível olímpico é capaz de lançar o peso com uma velocidade inicial $v_0 = 15,00$ m/s de uma altura de 2,160 m. Que distância horizontal é coberta pelo peso se o ângulo de lançamento θ_0 é (a) 45,00° e (b) 42,00°? As respostas mostram que o ângulo de 45°, que maximiza o alcance dos projéteis, não maximiza a distância horizontal quando a altura inicial e a altura final são diferentes.

••37 Uma bola é lançada a partir do solo. Quando ela atinge uma altura de 9,1 m sua velocidade é $\vec{v} = (7,6\hat{i} + 6,1\hat{j})$ m/s, com $\hat{i}$ horizontal e $\hat{j}$ para cima. (a) Qual é a altura máxima atingida pela bola? (b) Qual é a distância horizontal coberta pela bola? Quais são (c) o módulo e (d) o ângulo (abaixo da horizontal) da velocidade da bola no instante em que atinge o solo?

••38 Você lança uma bola em direção a uma parede com uma velocidade de 25,0 m/s e um ângulo $\theta_0 = 40,0°$ acima da horizon-

tal (Fig. 4-38). A parede está a uma distância d = 22,0 m do ponto de lançamento da bola. (a) A que distância acima do ponto de lançamento a bola atinge a parede? Quais são as componentes (b) horizontal e (c) vertical da velocidade da bola ao atingir a parede? (d) Ao atingir a parede, ela já passou pelo ponto mais alto da trajetória?

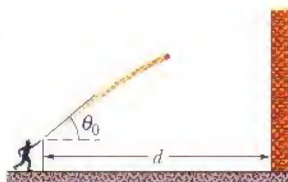


FIG. 4-38 Problema 38.

••39 Um rifle que atira balas a 460 m/s é apontado para um alvo situado a 45,7 m de distância. Se o centro do alvo está na mesma altura do rifle, para que altura acima do alvo o cano do rifle deve ser apontado para que a bala atinja o centro do alvo?

••40 Uma bola de beisebol deixa a mão do lançador horizontalmente com uma velocidade de 161 km/h. A distância até o rebatedor é 18,3 m. (a) Quanto tempo a bola leva para percorrer a primeira metade da distância? (b) E a segunda metade? (c) Que distância a bola cai livremente durante a primeira metade? (d) E durante a segunda metade? (e) Por que as respostas dos itens (c) e (d) não são iguais?

••41 Na Fig. 4-39 uma bola é jogada para a esquerda a partir da extremidade esquerda de um terraço, situado a uma altura h acima do solo. A bola chega ao solo 1,50 s depois, a uma distância d = 25,0 m do edifício e fazendo um ângulo θ = 60,0° com a horizontal. (a) Determine o valor de h. (*Sugestão:* Uma forma de resolver o problema é inverter o movimento, como se você estivesse vendo um filme de trás para a frente.) Quais são (b) o módulo e (c) o ângulo em relação à horizontal com o qual a bola foi jogada?

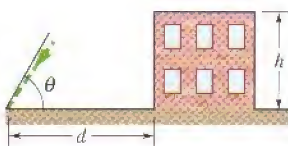


FIG. 4-39 Problema 41.

••42 Uma bola de golfe recebe uma tacada no chão. A velocidade da bola em função do tempo é mostrada na Fig. 4-40, onde t = 0 é o instante em que a bola foi golpeada. (a) Que distância a bola de golfe percorre na horizontal antes de voltar ao nível do solo? (b) Qual é a altura máxima atingida pela bola acima do solo?

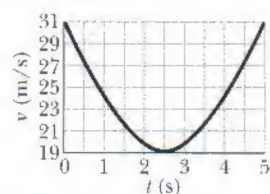


FIG. 4-40 Problema 42.

••43 Na Fig. 4-41 uma bola é lançada com uma velocidade de 10,0 m/s e um ângulo de 50,0° com a horizontal. O ponto de lançamento fica na base de uma rampa de comprimento horizontal d_1 = 6,00 m e altura d_2 = 3,60 m. No topo da rampa está localizado um platô. (a) A bola aterrissa na rampa ou no platô? No momento em que a bola aterrissa, quais são (b) o módulo e (c) o ângulo do deslocamento da bola em relação ao ponto de lançamento?

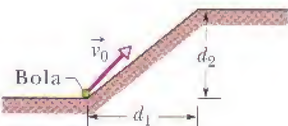


FIG. 4-41 Problema 43.

••44 Em 1939 ou 1940 Emanuel Zacchini levou seu número de bala humana a novas alturas. Depois de ser disparado por um canhão, passou por cima de três rodas-gigantes antes de cair em uma rede (Fig. 4-42). (a) Tratando Zacchini como uma partícula, determine a que distância vertical ele passou da primeira roda-gigante. (b) Se ele atingiu a altura máxima ao passar pela roda-gigante do meio, a que distância vertical passou dessa roda-gigante? (c) A que distância do canhão devia estar posicionado o centro da rede (desprezando a resistência do ar)?

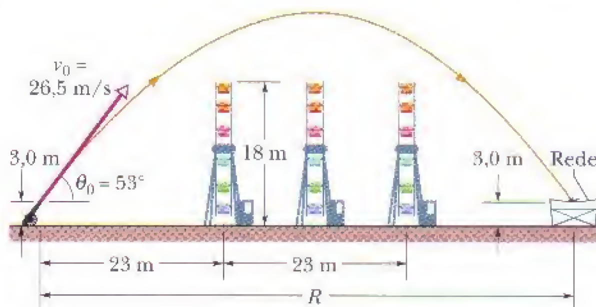


FIG. 4-42 Problema 44.

••45 Quando vê um inseto pousado em uma planta perto da superfície da água, o peixe-arqueiro coloca o focinho para fora e lança um jato de água na direção do inseto para derrubá-lo na água (Fig. 4-43). Embora o peixe veja o inseto na extremidade de um segmento de reta de comprimento d, que faz um ângulo ϕ com a superfície da água, o jato deve ser lançado com um ângulo diferente, θ_0, para que sua trajetória parabólica intercepte o inseto. Se ϕ = 36,0°, d = 0,900 m e a velocidade de lançamento é 3,56 m/s, qual deve ser o valor de θ_0 para que o jato esteja no ponto mais alto da trajetória quando atinge o inseto?

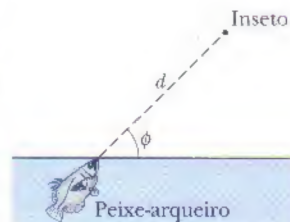


FIG. 4-43 Problema 45.

••46 Na Fig. 4-44 uma bola é arremessada para o alto de um edifício, caindo 4,00 s depois a uma altura h = 20,0 m acima da altura de lançamento. A trajetória da bola no final tem uma inclinação θ = 60° em relação à horizontal. (a) Determine a distância horizontal d coberta pela bola. (Veja a sugestão do Problema 41.) Quais são (b) o módulo e (c) o ângulo (em relação à horizontal) da velocidade inicial da bola?

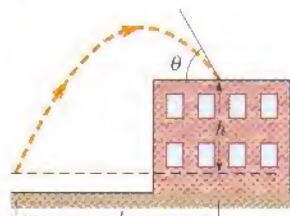


FIG. 4-44 Problema 46.

••47 Um rebatedor golpeia uma bola quando o centro da bola está a 1,22 m acima do solo. A bola deixa o taco do rebatedor fazendo um ângulo de 45° com o solo. Nesse lançamento a bola tem um alcance horizontal (distância até voltar à *altura de lançamento*) de 107 m. (a) A bola conseguirá passar por um alambrado de 7,32 m de altura que está a uma distância horizontal de 97,5 m do ponto de lançamento? (b) Qual é a distância entre o alto do alambrado e o centro da bola quando a mesma chega ao alambrado?

••48 Alguns jogadores de basquetebol parecem *flutuar* no ar durante um salto em direção à cesta. A ilusão depende em boa parte da capacidade de um jogador experiente de trocar rapidamente a bola de mão durante o salto, mas pode ser acentuada pelo fato de que o jogador percorre uma distância horizontal maior na parte superior do salto do que na parte inferior. Se um jogador salta com uma velocidade inicial v_0 = 7,00 m/s e um ângulo θ_0 = 35,0°, que porcentagem do alcance do salto o jogador

passa na parte superior do salto (entre a altura máxima e metade da altura máxima)?

••49 Os esquiadores experientes costumam dar um pequeno salto antes de chegar a uma encosta. Considere um salto no qual a velocidade inicial é $v_0 = 10$ m/s, o ângulo é $\theta_0 = 9{,}0°$, a pista antes do salto é aproximadamente plana e a encosta tem uma inclinação de 11,3°. A Fig. 4-45*a* mostra um *pré-salto* no qual o esquiador desce no início da encosta. A Fig. 4-45*b* mostra um salto que começa no momento em que o esquiador está chegando à encosta. Na Fig. 4-45*a* o esquiador desce aproximadamente na mesma altura em que começou o salto. (a) Qual é o ângulo ϕ entre a trajetória do esquiador e a encosta na situação da Fig. 4-45*a*? Na situação da Fig. 4-45*b* (b) o esquiador desce quantos metros abaixo da altura em que começou o salto e (c) qual é o valor de ϕ? (A queda maior e o maior valor de ϕ podem fazer o esquiador perder o equilíbrio.)



FIG. 4-45 Problema 49.

•••50 Uma bola é lançada a partir do solo em direção a uma parede situada a uma distância x (Fig. 4-46*a*). A Fig. 4-46*b* mostra a componente v_y da velocidade da bola ao chegar à parede em função da distância x. Qual é o ângulo de lançamento?

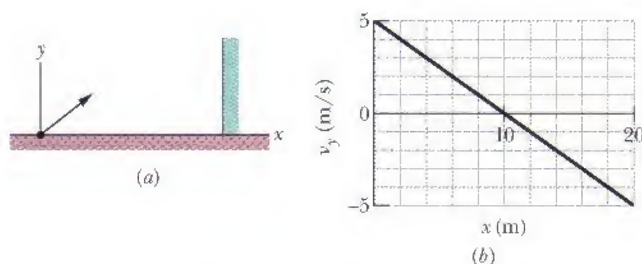


FIG. 4-46 Problema 50.

•••51 O chute de um jogador de futebol americano imprime à bola uma velocidade inicial de 25 m/s. Quais são (a) o menor e (b) o maior ângulo de elevação que ele pode imprimir à bola para marcar um *field goal** a partir de um ponto situado a 50 m da meta, cujo travessão está 3,44 m acima do gramado?

•••52 Uma bola é lançada a partir do solo com uma certa velocidade. A Fig. 4-47 mostra o alcance R em função ao ângulo de lançamento θ_0. O tempo de percurso depende do valor de θ_0; seja $t_{máx}$ o maior valor possível desse tempo. Qual é a menor velocidade que a bola possui durante o percurso se θ_0 é escolhido de tal forma que o tempo de percurso é $0{,}5t_{máx}$?

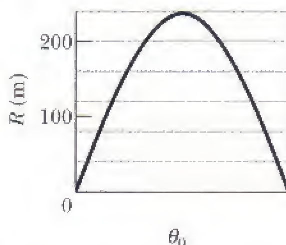


FIG. 4-47 Problema 52.

* Para marcar um *field goal* no futebol americano um jogador tem que fazer a bola passar por cima do travessão e entre as duas traves laterais. (N.T.)

•••53 Uma bola rola horizontalmente do alto de uma escada com uma velocidade de 1,52 m/s. Os degraus têm 20,3 cm de altura e 20,3 cm de largura. Em que degrau a bola bate primeiro?

•••54 Dois segundos após ter sido lançado a partir do solo, um projétil deslocou-se 40 m horizontalmente e 53 m verticalmente em relação ao ponto de lançamento. Quais são as componentes (a) horizontal e (b) vertical da velocidade inicial do projétil? (c) Qual é o deslocamento horizontal em relação ao ponto de lançamento no instante em que o projétil atinge a altura máxima em relação ao solo?

•••55 Na Fig. 4-48 uma bola de beisebol é golpeada a uma altura $h = 1{,}00$ m e apanhada na mesma altura. Deslocando-se paralelamente a um muro, ela passa pelo alto do muro 1,00 s após ter sido golpeada e, novamente, 4,00 s depois, quando está descendo, em posições separadas por uma distância $D = 50{,}0$ m. (a) Qual é a distância horizontal percorrida pela bola do instante em que foi golpeada até ser apanhada? Quais são (b) o módulo e (c) o ângulo (em relação à horizontal) da velocidade da bola imediatamente após ter sido golpeada? (d) Qual é a altura do muro?

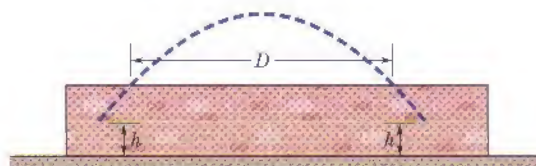


FIG. 4-48 Problema 55.

seção 4-7 Movimento Circular Uniforme

•56 Um viciado em aceleração centrípeta executa um movimento circular uniforme de período $T = 2{,}0$ s e raio $r = 3{,}00$ m. No instante t_1 sua aceleração é $\vec{a} = (6{,}00 \text{ m/s}^2)\hat{i} + (-4{,}00 \text{ m/s}^2)\hat{j}$. Nesse instante, quais são os valores de (a) $\vec{v}\cdot\vec{a}$ e (b) $\vec{r}\times\vec{a}$?

•57 Em um parque de diversões uma mulher passeia em uma roda-gigante com 15 m de raio, completando cinco voltas em torno do eixo horizontal a cada minuto. Quais são (a) o período do movimento, (b) o módulo e (c) o sentido de sua aceleração centrípeta no ponto mais alto, e (d) o módulo e (e) o sentido de sua aceleração centrípeta no ponto mais baixo?

•58 Qual é o módulo da aceleração de um velocista que corre a 10 m/s ao fazer uma curva com 25 m de raio?

•59 Quando uma grande estrela se torna uma *supernova* seu núcleo pode ser tão comprimido que ela se transforma em uma *estrela de nêutrons*, com um raio de cerca de 20 km. Se uma estrela de nêutrons completa uma revolução a cada segundo, (a) qual é o módulo da velocidade de uma partícula situada no equador da estrela e (b) qual é o módulo da aceleração centrípeta da partícula? (c) Se a estrela de nêutrons gira mais depressa, as respostas dos itens (a) e (b) aumentam, diminuem ou permanecem as mesmas?

•60 Um satélite se move em uma órbita circular, 640 km acima da superfície da Terra, com um período de 98,0 min. Quais são (a) a velocidade e (b) o módulo da aceleração centrípeta do satélite?

•61 Um carrossel de um parque de diversões gira em torno de um eixo vertical com velocidade angular constante. Um homem em pé na borda do carrossel tem uma velocidade escalar constante de 3,66 m/s e uma aceleração centrípeta $\vec{a}$ de módulo 1,83 m/s². O vetor posição $\vec{r}$ indica sua posição em relação ao

eixo do carrossel. (a) Qual é o módulo de $\vec{r}$? Qual é o sentido de $\vec{r}$ quando $\vec{a}$ aponta (b) para leste e (c) para o sul?

•62 Um ventilador realiza 1200 revoluções por minuto. Considere um ponto situado na extremidade de uma das pás, que descreve uma circunferência com 0,15 m de raio. (a) Que distância este ponto percorre em uma revolução? Quais são (b) a velocidade do ponto e (c) o módulo de sua aceleração? (d) Qual é o período do movimento?

••63 Uma bolsa a 2,00 m do centro e uma carteira a 3,00 m do centro descrevem um movimento circular uniforme no piso de um carrossel. Elas estão na mesma linha radial. Em um certo instante, a aceleração da bolsa é $(2{,}00\ \text{m/s}^2)\hat{\text{i}} + (4{,}00\ \text{m/s}^2)\hat{\text{j}}$. Qual é a aceleração da carteira nesse instante, em termos dos vetores unitários?

••64 Uma partícula se move em uma trajetória circular em um sistema de coordenadas xy horizontal, com velocidade escalar constante. No instante $t_1 = 4{,}00$ s ela está no ponto (5,00 m, 6,00 m) com velocidade $(3{,}00\ \text{m/s})\hat{\text{j}}$ e aceleração no sentido positivo de x. No instante $t_2 = 10{,}0$ s ela tem uma velocidade $(-3{,}00\ \text{m/s})\hat{\text{i}}$ e uma aceleração no sentido positivo de y. Quais são as coordenadas (a) x e (b) y do centro da trajetória circular se a diferença $t_2 - t_1$ é menor que um período?

••65 Em $t_1 = 2{,}00$ s, a aceleração de uma partícula em movimento circular no sentido anti-horário é $(6{,}00\ \text{m/s}^2)\hat{\text{i}} + (4{,}00\ \text{m/s}^2)\hat{\text{j}}$. Ela se move com velocidade escalar constante. Em $t_2 = 5{,}00$ s, sua aceleração é $(4{,}00\ \text{m/s}^2)\hat{\text{i}} + (-6{,}00\ \text{m/s})\hat{\text{j}}$. Qual é o raio da trajetória da partícula se a diferença $t_2 - t_1$ é menor que um período?

••66 Uma partícula descreve um movimento circular uniforme em um plano horizontal xy. Em um certo instante ela passa pelo ponto de coordenadas (4,00 m, 4,00 m) com uma velocidade de $-5{,}00\hat{\text{i}}$ m/s e uma aceleração de $+12{,}5\hat{\text{j}}$ m/s. Quais são as coordenadas (a) x e (b) y do centro da trajetória circular?

•••67 Um menino faz uma pedra descrever uma circunferência horizontal com 1,5 m de raio 2,0 m acima do chão. A corda se parte e a pedra é arremessada horizontalmente, chegando ao solo depois de percorrer uma distância horizontal de 10 m. Qual era o módulo da aceleração centrípeta da pedra durante o movimento circular?

•••68 Um gato pula em um carrossel que está descrevendo um movimento circular uniforme. No instante $t_1 = 2{,}00$ s a velocidade do gato é $\vec{v}_1 = (3{,}00\ \text{m/s})\hat{\text{i}} + (4{,}00\ \text{m/s})\hat{\text{j}}$, medida em um sistema de coordenadas horizontal xy. No instante $t_2 = 5{,}00$ s, a velocidade é $\vec{v}_2 = (-3{,}00\ \text{m/s})\hat{\text{i}} + (-4{,}00\ \text{m/s})\hat{\text{j}}$. Quais são (a) o módulo da aceleração centrípeta do gato e (b) a aceleração média do gato no intervalo de tempo $t_2 - t_1$, que é menor que um período?

seção 4-8 Movimento Relativo em Uma Dimensão

•69 Um cinegrafista está em uma picape que se move para oeste a 20 km/h enquanto filma um guepardo que também está se movendo para oeste 30 km/h mais depressa que a picape. De repente, o guepardo pára, dá meia-volta e passa a correr a 45 km/h para leste, de acordo com a estimativa de um membro da equipe, agora nervoso, de pé na margem da estrada, no caminho do guepardo. A mudança de velocidade do animal leva 2,0 s. Quais são (a) o módulo e (b) a orientação da aceleração do animal em relação ao cinegrafista e (c) o módulo e (d) a orientação da aceleração do animal em relação ao membro nervoso da equipe?

•70 Um barco está navegando rio acima, no sentido positivo de um eixo x, a 14 km/h em relação à água do rio. A água do rio está correndo a 9,0 km/h em relação à margem. Quais são (a) o módulo e (b) a orientação da velocidade do barco em relação à margem? Uma criança no barco caminha da popa para a proa a 6,0 km/h em relação ao barco. Quais são (c) o módulo e (d) a orientação da velocidade da criança em relação à margem?

••71 Um homem de aparência suspeita corre o mais rápido que pode por uma esteira rolante, levando 2,5 s para ir de uma extremidade a outra. Os seguranças aparecem e o homem volta ao ponto de partida, correndo o mais rápido que pode, levando 10,0 s. Qual é a razão entre a velocidade do homem e a velocidade da esteira?

seção 4-9 Movimento Relativo em Duas Dimensões

•72 Um jogador de rúgbi corre com a bola em direção à meta do adversário no sentido positivo de um eixo x. De acordo com as regras do jogo, ele pode passar a bola a um companheiro de equipe desde que a velocidade da bola em relação ao campo não possua uma componente x positiva. Suponha que o jogador esteja correndo com uma velocidade de 4,0 m/s em relação ao campo quando passa a bola com uma velocidade $\vec{v}_{BJ}$ em relação a ele mesmo. Se o módulo de $\vec{v}_{BJ}$ é 6,0 m/s, qual é o menor ângulo que ela deve fazer com a direção x para que o passe seja válido?

••73 Dois navios, A e B, deixam o porto ao mesmo tempo. O navio A navega para noroeste a 24 nós e o navio B navega a 28 nós em uma direção 40° a oeste do sul. (1 nó = 1 milha marítima por hora; veja o Apêndice D.) Quais são (a) o módulo e (b) a orientação da velocidade do navio A em relação ao navio B? (c) Após quanto tempo os navios estarão separados por 160 milhas marítimas? (d) Qual será o curso de B (orientação do vetor posição de B) em relação a A nesse instante?

••74 Um avião leve atinge uma velocidade do ar de 500 km/h. O piloto pretende chegar a um ponto 800 km ao norte, mas descobre que deve direcionar o avião 20,0° a leste do norte para atingir seu destino. O avião chega em 2,00 h. Quais eram (a) o módulo e (b) a orientação da velocidade do vento?

••75 A neve está caindo verticalmente com uma velocidade constante de 8,0 m/s. Com que ângulo, em relação à vertical, os flocos de neve parecem estar caindo do ponto de vista do motorista de um carro que viaja em uma estrada plana e retilínea a uma velocidade de 50 km/h?

••76 Depois de voar por 15 min em um vento de 42 km/h a um ângulo 20° ao sul do leste, o piloto de um avião sobrevoa uma cidade que está a 55 km ao norte do ponto de partida. Qual é a velocidade escalar do avião em relação ao ar?

••77 Um trem viaja para o sul a 30 m/s (em relação ao solo) em meio a uma chuva que é soprada para o sul pelo vento. As trajetórias das gotas de chuva fazem um ângulo de 70° com a vertical quando medidas por um observador estacionário no solo. Um observador no trem, entretanto, vê as gotas caírem exatamente na vertical. Determine a velocidade escalar das gotas de chuva em relação ao solo.

••78 Um rio de 200 m de largura corre para leste com uma velocidade constante de 2,0 m/s. Um barco com uma velocidade de 8,0 m/s em relação à água parte da margem sul em uma direção 30° a oeste do norte. Determine (a) o módulo e (b) a orientação da velocidade do barco em relação à margem. (c) Quanto tempo o barco leva para atravessar o rio?

••79 Duas rodovias se cruzam, como mostra a Fig. 4-49. No instante indicado, um carro de polícia P está a uma distância $d_P = 800$ m do cruzamento, movendo-se com uma velocidade es-

calar $v_P = 80$ km/h. O motorista M está a uma distância $d_M = 600$ m do cruzamento, movendo-se com uma velocidade escalar $v_M = 60$ km/h. (a) Qual é a velocidade do motorista em relação ao carro da polícia na notação de vetores unitários? (b) No instante mostrado na Fig. 4-49, qual é o ângulo entre a velocidade calculada no item (a) e a reta que liga os dois carros? (c) Se os carros mantêm suas velocidades, as respostas dos itens (a) e (b) mudam quando os carros se aproximam da interseção?

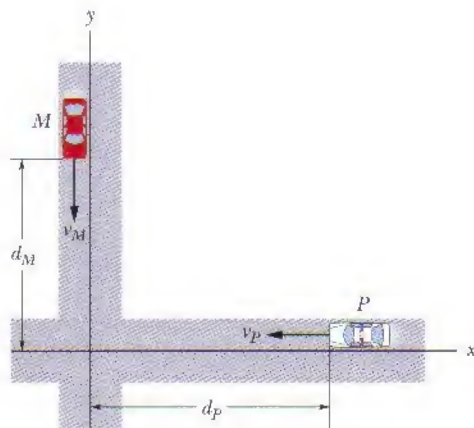


FIG. 4-49 Problema 79.

••80 Na vista superior da Fig. 4-50 os jipes P e B se movem em linha reta em um terreno plano e passam ao lado de um guarda de fronteira estacionário A. Em relação ao guarda, o jipe B se move com uma velocidade escalar constante de 20,0 m/s e um ângulo $\theta_2 = 30{,}0°$. Também em relação ao guarda, P acelerou a partir do repouso a uma taxa constante de 0,400 m/s² e um ângulo $\theta_1 = 60{,}0°$. Em um certo instante durante a aceleração, P possui uma velocidade escalar de 40,0 m/s. Nesse instante, quais são (a) o módulo e (b) a orientação da velocidade de P em relação a B e (c) o módulo e a orientação da aceleração de P em relação a B?

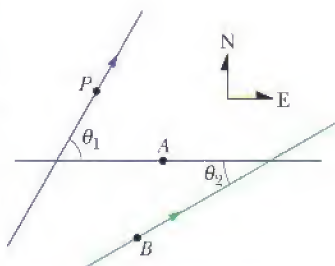


FIG. 4-50 Problema 80.

•••81 O navio A está 4,0 km ao norte e 2,5 km a leste do navio B. O navio A está viajando com uma velocidade de 22 km/h na direção sul; o navio B, com uma velocidade de 40,0 km/h em uma direção 37° ao norte do leste. (a) Qual é a velocidade de A em relação a B em termos dos vetores unitários, com $\hat{\imath}$ apontando para o leste? (b) Escreva uma expressão (em termos de $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$) para a posição de A em relação a B em função do tempo t, tomando $t = 0$ como o instante em que os dois navios estão nas posições aqui descritas. (c) Em que instante a separação entre os navios é mínima? (d) Qual é essa separação mínima?

•••82 Um rio de 200 m de largura corre com uma velocidade uniforme de 1,1 m/s através de uma floresta, na direção leste. Um explorador deseja sair de uma pequena clareira na margem sul e atravessar o rio em um barco a motor que se move com uma velocidade escalar constante de 4,0 m/s em relação à água. Existe uma outra clareira na margem norte, 82 m rio acima a partir de um ponto da margem sul, exatamente em frente à clareira. (a) Em que direção o barco deve ser apontado para viajar em linha reta e chegar à clareira da margem norte? (b) Quanto tempo o barco leva para atravessar o rio e chegar à clareira?

Problemas Adicionais

83 Você é seqüestrado por estudantes de ciência política (que estão aborrecidos porque você disse a eles que a ciência política não é uma ciência de verdade). Embora esteja vendado, você pode estimar a velocidade do carro dos seqüestradores (pelo ronco do motor), o tempo de viagem (contando mentalmente os segundos) e a orientação da viagem (pelas curvas que o carro fez). A partir dessas pistas você sabe que foi conduzido ao longo do seguinte percurso: 50 km/h por 2,0 min, curva de 90° para a direita, 20 km/h por 4,0 min, curva de 90° para a direita, 20 km/h por 60 s, curva de 90° para a esquerda, 50 km/h por 60 s, curva 90° para a direita, 20,0 km/h por 2,0 min, curva de 90° para a esquerda, 50 km/h por 30 s. Nesse ponto, (a) a que distância você se encontra do ponto de partida e (b) em que direção em relação à direção inicial você está?

84 *Cortina da morte.* Um grande asteróide metálico colide com a Terra e abre uma cratera no material rochoso abaixo do solo, lançando pedras para o alto. A tabela a seguir mostra cinco pares de velocidades e ângulos (em relação à horizontal) para essas pedras, com base em um modelo de formação de crateras. (Outras pedras, com velocidades e ângulos intermediários, também são lançadas.) Suponha que você está em $x = 20$ km quando o asteróide chega ao solo no instante $t = 0$ e na posição $x = 0$ (Fig. 4-51). (a) Em $t = 20$ s, quais são as coordenadas x e y das pedras, de A a E, que foram lançadas em sua direção? (b) Plote essas coordenadas em um gráfico e desenhe uma curva passando pelos pontos para incluir pedras com velocidades e ângulos intermediários. A curva deve dar uma idéia do que você veria ao olhar na direção das pedras e do que os dinossauros devem ter visto durante as colisões de asteróides com a Terra, no passado remoto.

Pedra	Velocidade (m/s)	Ângulo (graus)
A	520	14,0
B	630	16,0
C	750	18,0
D	870	20,0
E	1000	22,0



FIG. 4-51 Problema 84.

85 Na Fig. 4-52 uma bola de massa de modelar descreve um movimento circular uniforme, com um raio de 20,0 cm, na borda de uma roda que está girando no sentido anti-horário com um período de 5,00 ms. A bola se desprende da borda na posição correspondente a 5 horas (como se estivesse no mos-

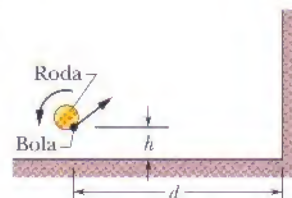


FIG. 4-52 Problema 85.

trador de um relógio). Ela deixa a borda a uma altura $h = 1{,}20$ m acima do chão e a uma distância $d = 2{,}50$ m de uma parede. Em que altura a bola bate na parede?

86 Uma partícula descreve um movimento circular uniforme em torno da origem de um sistema de coordenadas xy, movendo-se no sentido horário com um período de 7,00 s. Em um certo instante o vetor posição da partícula (em relação à origem) é $\vec{r} = (2{,}00\text{ m})\hat{\mathrm{i}} - (3{,}00\text{ m})\hat{\mathrm{j}}$. Qual é a velocidade da partícula nesse instante, em termos dos vetores unitários?

87 Na Fig. 4-53, uma bola é lançada verticalmente para cima, a partir do solo, com uma velocidade inicial $v_0 = 7{,}00$ m/s. Ao mesmo tempo um elevador de serviço começa a subir, a partir do solo, com uma velocidade constante $v_c = 3{,}00$ m/s. Qual é a altura máxima atingida pela bola (a) em relação ao solo e (b) em relação ao piso do elevador? Qual é a taxa de variação da velocidade da bola (c) em relação ao solo e (d) em relação ao piso do elevador?

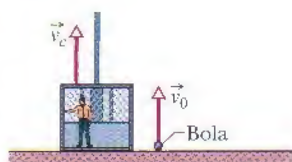


FIG. 4-53 Problema 87.

88 Na Fig. 4-54a, um trenó se move no sentido negativo do eixo x com uma velocidade escalar constante v_t, enquanto uma bola de gelo é atirada do trenó com uma velocidade $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{\mathrm{i}} + v_{0y}\hat{\mathrm{j}}$ em relação ao trenó. Quando a bola chega ao solo, seu deslocamento horizontal Δx_{bs} em relação ao solo (da posição inicial à posição final) é medido. A Fig. 4-54b mostra a variação de Δx_{bs} com v_t. Suponha que a bola chega ao solo na altura aproximada em que foi lançada. Quais são os valores (a) de v_{0x} e (b) de v_{0y}? O deslocamento da bola em relação ao trenó, Δx_{bt}, também pode ser medido. Suponha que a velocidade do trenó não muda depois que a bola é atirada. Quanto é Δx_{bt} para v_t igual a (c) 5,0 m/s e (d) 15 m/s?

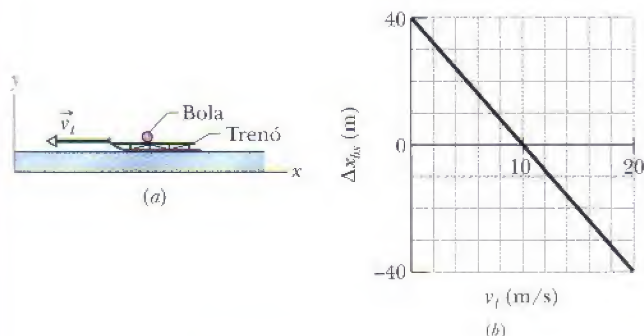


FIG. 4-54 Problema 88.

89 Uma mulher que é capaz de remar um barco a 6,4 km/h em águas paradas se prepara para atravessar um rio longo e retilíneo com 6,4 km de largura e uma correnteza de 3,2 km/h. Tome $\hat{\mathrm{i}}$ perpendicular ao rio e $\hat{\mathrm{j}}$ apontando rio abaixo. Se a mulher pretende remar até um ponto na outra margem diametralmente oposto ao ponto de partida, (a) para que ângulo em relação a $\hat{\mathrm{i}}$ deve apontar o barco e (b) quanto tempo leva para fazer a travessia? (c) Quanto tempo gastaria se, em vez disso, remasse 3,2 km *rio abaixo* e depois voltasse ao ponto de partida? (d) Quanto tempo gastaria se remasse 3,2 km *rio acima* e depois voltasse ao ponto de partida? (e) Para que ângulo deveria direcionar o barco para atravessar o rio no menor tempo possível? (f) Qual seria esse tempo?

90 Na Fig. 4-55, uma estação de radar detecta um avião que se aproxima, vindo do leste. Quando é observado pela primeira vez o avião está a uma distância $d_1 = 360$ m da estação e $\theta_1 = 40°$ acima do horizonte. O avião é rastreado durante uma variação angular $\Delta\theta = 123°$ no plano vertical leste-oeste; sua distância no final dessa variação é $d_2 = 790$ m. Determine (a) o módulo e (b) a orientação do deslocamento do avião durante este período.

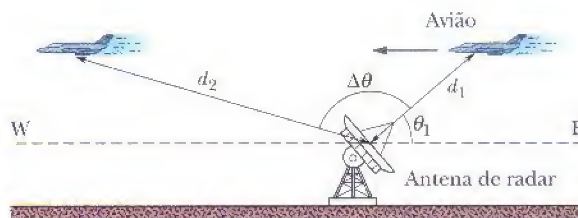


FIG. 4-55 Problema 90.

91 Um rifle é apontado horizontalmente para um alvo a 30 m de distância. A bala atinge o alvo 1,9 cm abaixo do ponto para onde o rifle foi apontado. Determine (a) o tempo de percurso da bala e (b) a velocidade escalar da bala ao sair do rifle.

92 Um trem francês de alta velocidade, conhecido como TGV (Train à Grande Vitesse), viaja a uma velocidade média de 216 km/h. (a) Se o trem faz uma curva a essa velocidade e o módulo da aceleração sentida pelos passageiros pode ser no máximo de $0{,}050g$, qual é o menor raio de curvatura dos trilhos que pode ser tolerado? (b) Com que velocidade o trem deve fazer uma curva com 1,00 km de raio para que a aceleração esteja no limite permitido?

93 Um campo magnético pode forçar uma partícula a descrever uma trajetória circular. Suponha que um elétron que está descrevendo uma circunferência sofra uma aceleração radial de módulo $3{,}0 \times 10^{14}$ m/s² sob o efeito de um certo campo magnético. (a) Qual é o módulo da velocidade do elétron se o raio da trajetória circular é de 15 cm? (b) Qual é o período do movimento?

94 O vetor posição de um próton é inicialmente $\vec{r} = 5{,}0\hat{\mathrm{i}} - 6{,}0\hat{\mathrm{j}} + 2{,}0\hat{\mathrm{k}}$ e depois se torna $\vec{r} = -2{,}0\hat{\mathrm{i}} + 6{,}0\hat{\mathrm{j}} + 2{,}0\hat{\mathrm{k}}$, com todos os valores em metros. (a) Qual é o vetor deslocamento do próton? (b) Esse vetor é paralelo a que plano?

95 Uma partícula P se move com velocidade escalar constante sobre uma circunferência de raio $r = 3{,}00$ m (Fig. 4-56) e completa uma revolução a cada 20,0 s. A partícula passa pelo ponto O no instante $t = 0$. Expresse os vetores a seguir na notação módulo-ângulo (ângulo em relação ao sentido positivo de x). Determine o vetor posição da partícula, em relação a O, nos instantes (a) $t = 5{,}00$ s, (b) $t = 7{,}50$ s e (c) $t = 10{,}0$ s. (d) Determine o deslocamento da partícula no intervalo de 5,00 s entre o fim do quinto segundo e o fim do décimo segundo. Para esse mesmo intervalo, determine (e) a velocidade média e a velocidade (f) no início e (g) no fim do intervalo. Em seguida, determine a aceleração (h) no início e (i) no fim do intervalo.

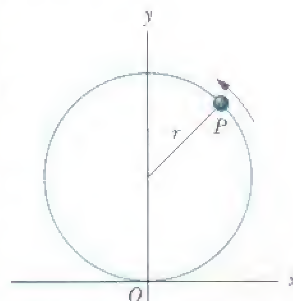


FIG. 4-56 Problema 95.

96 Um trenó a vela se move na superfície de um lago congelado com uma aceleração constante produzida pelo vento. Em um certo instante a velocidade do trenó é $6{,}30\hat{i} - 8{,}42\hat{j}$. Três segundos depois, devido a uma mudança do vento, o trenó se encontra momentaneamente em repouso. Qual é a aceleração média do trenó nesse intervalo de 3 s?

97 Em 3,50 h um balão se desloca 21,5 km para o norte, 9,70 km para leste e 2,88 km para cima em relação ao ponto de lançamento. Determine (a) o módulo da velocidade média do balão e (b) o ângulo que a velocidade média faz com a horizontal.

98 Uma bola é lançada horizontalmente de uma altura de 20 m e chega ao solo com uma velocidade três vezes maior que a inicial. Determine a velocidade inicial.

99 Um projétil é lançado com uma velocidade inicial de 30 m/s e um ângulo de 60° acima da horizontal. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo da velocidade 2,0 s após o lançamento. (c) O ângulo do item (b) é acima ou abaixo da horizontal? Determine (d) o módulo e (e) o ângulo da velocidade 5,0 s após o lançamento. (f) O ângulo do item (e) é acima ou abaixo da horizontal?

100 Um aeroporto dispõe de uma esteira rolante para ajudar os passageiros a atravessar um longo corredor. Lauro não usa a esteira rolante e leva 150 s para atravessar o corredor. Cora, que fica parada na esteira rolante, cobre a mesma distância em 70 s. Marta prefere andar na esteira rolante. Quanto tempo leva Marta para atravessar o corredor? Suponha que Lauro e Marta caminhem com a mesma velocidade.

101 Um jogador de futebol americano chuta uma bola de tal forma que ela passa 4,5 s no ar e chega ao solo a 46 m do ponto de onde foi lançada. Se a bola deixa o pé do jogador 150 cm acima do solo, qual deve ser (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação à horizontal) da velocidade inicial da bola?

102 No voleibol feminino o alto da rede está 2,24 m acima do piso e a quadra mede 9,0 m por 9,0 m de cada lado da rede. Ao dar um saque viagem, uma jogadora bate na bola quando ela está 3,0 m acima do piso e a uma distância horizontal de 8,0 m da rede. Se a velocidade inicial da bola é horizontal, determine (a) a menor velocidade escalar que a bola deve ter para ultrapassar a rede e (b) a máxima velocidade que ela pode ter para atingir o piso dentro dos limites da quadra do outro lado da rede.

103 A Fig. 4-57 mostra a trajetória retilínea de uma partícula em um sistema de coordenadas xy quando a partícula é acelerada a partir do repouso em um intervalo de tempo Δt_1. A aceleração é constante. As coordenadas do ponto A são (4,00 m, 6,00 m) e as do ponto B são (12,0 m, 18,0 m). (a) Qual é a razão a_y/a_x entre as componentes da aceleração? (b) Quais são as coordenadas da partícula se o movimento continua durante outro intervalo igual a Δt_1?

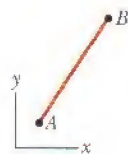


FIG. 4-57 Problema 103.

104 Um astronauta é posto em rotação em uma centrífuga horizontal com um raio de 5,0 m. (a) Qual é a velocidade escalar do astronauta se a aceleração centrípeta tem um módulo de $7{,}0g$? (b) Quantas revoluções por minuto são necessárias para produzir essa aceleração? (c) Qual é o período do movimento?

105 (a) Qual é o módulo da aceleração centrípeta de um objeto no equador da Terra devido à rotação da Terra? (b) Qual deveria ser o período de rotação da Terra para que um objeto no equador tivesse uma aceleração centrípeta com um módulo de 9,8 m/s²?

106 Uma pessoa sobe uma escada rolante enguiçada, de 15 m de comprimento, em 90 s. Ficando parada na mesma escada rolante, depois de consertada, a pessoa sobe em 60 s. Quanto tempo a pessoa leva se subir a escada e ela estiver em movimento? A resposta depende do comprimento da escada?

107 Uma bola de beisebol é golpeada junto ao chão. A bola atinge a altura máxima 3,0 s após ter sido golpeada. Em seguida, 2,5 s após ter atingido a altura máxima, a bola passa rente a um alambrado que está a 97,5 m do ponto onde foi golpeada. Suponha que o solo é plano. (a) Qual é a altura máxima atingida pela bola? (b) Qual é a altura do alambrado? (c) A que distância do alambrado a bola atinge o chão?

108 O alcance de um projétil depende não só de v_0 e θ_0, mas também do valor g da aceleração em queda livre, que varia de lugar para lugar. Em 1936 Jesse Owens estabeleceu o recorde mundial de salto em distância de 8,09 m nos Jogos Olímpicos de Berlim, onde $g = 9{,}8128$ m/s². Supondo os mesmos valores de v_0 e θ_0, que distância o atleta teria pulado em 1956, nos Jogos Olímpicos de Melbourne, onde $g = 9{,}7999$ m/s²?

109 Durante as erupções vulcânicas, grandes pedaços de pedra podem ser lançados para fora do vulcão; esses projéteis são conhecidos como *bombas vulcânicas*. A Fig. 4-58 mostra uma seção transversal do monte Fuji, no Japão. (a) Com que velocidade inicial uma bomba teria que ser lançada, com um ângulo $\theta_0 = 35°$ em relação à horizontal, a partir da cratera A, para cair no ponto B, a uma distância vertical $h = 3{,}30$ km e a uma distância horizontal $d = 9{,}40$ km? Ignore o efeito do ar sobre o movimento da bomba. (b) Qual seria o tempo de percurso? (c) O efeito do ar aumentaria ou diminuiria a resposta do item (a)?

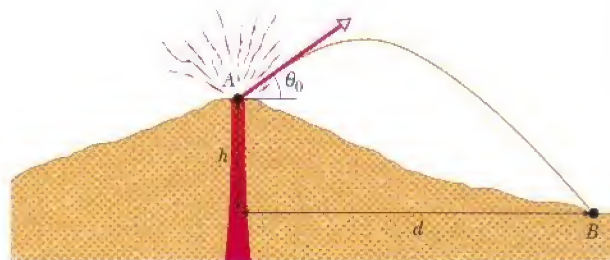


FIG. 4-58 Problema 109.

110 Vôos longos em latitudes médias no hemisfério norte encontram a chamada corrente de jato, um fluxo de ar para leste que pode afetar a velocidade do avião em relação à superfície da Terra. Se um piloto mantém uma certa velocidade em relação ao ar (a chamada *velocidade do ar*), a velocidade em relação ao solo é maior quando o vôo é na direção da corrente de jato e menor quando o vôo é na direção oposta. Suponha que um vôo de ida e volta esteja previsto entre duas cidades separadas por 4000 km, com o vôo de ida no sentido da corrente de jato e o vôo de volta no sentido oposto. O computador da empresa aérea recomenda uma velocidade do ar de 1000 km/h, para a qual a diferença entre as durações dos vôos de ida e de volta é de 70,0 min. Qual é a velocidade da corrente de jato que o computador usou nos cálculos?

111 Uma partícula parte da origem no instante $t = 0$ com uma velocidade de $8{,}0\hat{j}$ m/s e se move no plano xy com uma aceleração constante igual a $(4{,}0\hat{i} + 2{,}0\hat{j})$ m/s². Quando a coordenada x da partícula é 29 m, quais são (a) a coordenada y e (b) a velocidade escalar?

112 Um velocista correndo em uma pista circular possui uma velocidade escalar constante de 9,2 m/s e uma aceleração centrípeta de módulo 3,8 m/s^2. Quais são (a) o raio da pista e (b) o período do movimento circular?

113 Um elétron com uma velocidade horizontal inicial de módulo $1{,}00 \times 10^9$ cm/s penetra na região entre duas placas de metal horizontais eletricamente carregadas. Nessa região o elétron percorre uma distância horizontal de 2,00 cm e sofre uma aceleração constante para baixo de módulo $1{,}00 \times 10^{17}$ cm/s^2 devido às placas carregadas. Determine (a) o tempo que o elétron leva para percorrer os 2,00 cm; (b) a distância vertical que o elétron percorre durante esse tempo; os módulos da componente (c) horizontal e (d) vertical da velocidade quando o elétron sai da região entre as placas.

114 Um elevador sem teto está subindo com uma velocidade constante de 10 m/s. Um menino que está no elevador arremessa uma bola para cima, na vertical, de uma altura 2,0 m acima do piso do elevador, no instante em que o piso do elevador se encontra 28 m acima do solo. A velocidade inicial da bola em relação ao elevador é de 20 m/s. (a) Qual é a altura máxima acima do solo atingida pela bola? (b) Quanto tempo a bola leva para cair de volta no piso do elevador?

115 Suponha que uma sonda espacial seja capaz de suportar uma aceleração de no máximo 20*g*. (a) Qual é o menor raio de curvatura que a nave pode suportar quando está se movendo a um décimo da velocidade da luz? (b) Quanto tempo a sonda levaria para completar uma curva de 90° nessas condições?

116 Com que velocidade inicial o jogador de basquetebol da Fig. 4-59 deve arremessar a bola, com um ângulo θ_0 = 55° acima da horizontal, para converter o lance livre? As distâncias horizontais são d_1 = 1,0 ft e d_2 = 14 ft e as alturas são h_1 = 7,0 ft e h_2 = 10 ft.

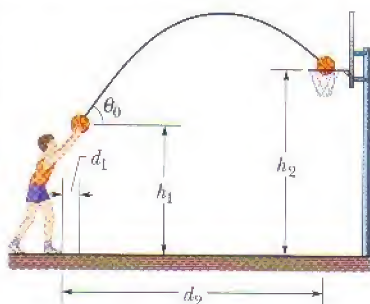


FIG. 4-59 Problema 116.

117 Um vagão de madeira está se movendo em uma linha férrea retilínea com velocidade v_1. Um franco-atirador dispara uma bala (com velocidade inicial v_2) contra o vagão, usando um rifle de alta potência. A bala atravessa as duas paredes laterais, e os furos de entrada e saída ficam à mesma distância das extremidades do vagão. De que direção, em relação à linha férrea, a bala foi disparada? Suponha que a bala não foi desviada ao penetrar no vagão, mas a velocidade diminuiu de 20%. Suponha ainda que v_1 = 85 km/h e v_2 = 650 m/s. (Por que não é preciso conhecer a largura do vagão?)

118 Você pretende atirar uma bola com uma velocidade escalar de 12,0 m/s em um alvo que está a uma altura *h* = 5,00 m acima do nível do qual você vai lançar a bola (Fig. 4-60). Você quer que a velocidade da bola seja horizontal no instante em que ela atinge o alvo. (a) Com que ângulo θ acima da horizontal você deve atirar a bola? (b) Qual é a distância horizontal do ponto de lançamento até o alvo? (c) Qual é a velocidade escalar da bola no momento em que atinge o alvo?

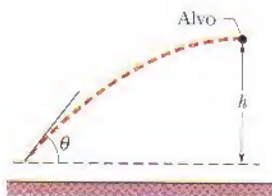


FIG. 4-60 Problema 118.

119 A Fig. 4-61 mostra a trajetória seguida por um bêbado em um terreno plano, de um ponto inicial *i* até um ponto final *f*. Os ângulos são θ_1 = 30,0°, θ_2 = 50,0° e θ_3 = 80,0°; as distâncias são d_1 = 5,00 m, d_2 = 8,00 m e d_3 = 12,0 m. Quais são (a) o módulo e (b) o ângulo do deslocamento do bêbado de *i* até *f*?

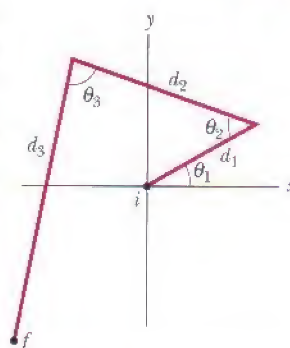


FIG. 4-61 Problema 119.

120 Um projétil é disparado com uma velocidade inicial v_0 = 30,0 m/s, a partir do solo, com o objetivo de atingir um alvo que está no solo a uma distância *R* = 20,0 m, como mostra a Fig. 4-62. Quais são (a) o menor e (b) o maior ângulo de lançamento que permitem que o projétil atinja o alvo?

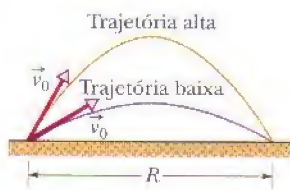


FIG. 4-62 Problema 120.

121 O oásis *A* está 90 km a oeste do oásis *B*. Um camelo parte de *A* e leva 50 h para caminhar 75 km 37° ao norte do leste. Em seguida, leva 35 h para caminhar 65 km para o sul e descansa por 5,0 h. Quais são (a) o módulo e (b) o sentido do deslocamento do camelo em relação a *A* até o ponto em que ele pára para descansar? Do instante em que o camelo parte do ponto *A* até o final do período de descanso, quais são (c) o módulo e (d) o sentido da velocidade média do camelo e (e) sua velocidade escalar média? A última vez que o camelo bebeu água foi em *A*; ele deve estar em *B* não mais do que 120 h após a partida para beber água novamente. Para que chegue a *B* no último momento, quais devem ser (f) o módulo e (g) o sentido da velocidade média após o período de descanso?

122 *Uma surpresa gráfica.* No instante t = 0, um burrito é lançado a partir de um terreno plano, com uma velocidade inicial de 16,0 m/s e um ângulo de lançamento θ_0. Imagine um vetor posição $\vec{r}$ que ligue o ponto de lançamento ao burrito durante toda a trajetória. Plote o módulo *r* do vetor posição em função do tempo para (a) θ_0 = 40,0° e (b) θ_0 = 80,0°. Para θ_0 = 40,0°, (c) em que instante *r* atinge o valor máximo, (d) qual é esse valor e a que distância (e) horizontal e (f) vertical está o burrito em relação ao ponto de lançamento? Para θ_0 = 80,0°, (g) em que instante *r* atinge o valor máximo, (h) qual é esse valor e a que distância (i) horizontal e (j) vertical está o burrito em relação ao ponto de lançamento?

123 No Exemplo 4-7*b* uma bala é disparada por um canhão situado ao nível do mar com um ângulo de 45° com a horizontal e atinge uma distância de 686 m. Qual seria o aumento da distância atingida pela bala se o canhão estivesse a uma altura de 30 m?

124 (a) Se um elétron é lançado horizontalmente com uma velocidade de $3{,}0 \times 10^6$ m/s, qual a distância vertical percorrida pelo elétron ao percorrer uma distância horizontal de 1,0 m? (b) A distância calculada no item (a) aumenta, diminui ou permanece a mesma quando a velocidade inicial aumenta?

125 O módulo da velocidade de um projétil quando atinge a altura máxima é de 10 m/s. (a) Qual é o módulo da velocidade do projétil 1,0 s antes de atingir a altura máxima? (b) Qual é o módulo da velocidade do projétil 1,0 s depois de atingir a altura máxima? Se tomamos x = 0 e y = 0 como o ponto de altura máxima e consideramos como sentido positivo do eixo *x* o sentido da velocidade do projétil nesse ponto, quais são (c) a coordenada

x e (d) a coordenada y do projétil 1,0 s antes de atingir a altura máxima e (e) a coordenada x e (f) a coordenada y do projétil 1,0 s depois de atingir a altura máxima?

126 Um coelho assustado, que está se movendo a 6,0 m/s na direção leste, penetra em uma grande área plana de gelo com atrito desprezível. Enquanto o coelho desliza no gelo a força do vento faz com que ele adquira uma aceleração constante de 1,4 m/s^2 na direção norte. Escolha um sistema de coordenadas com a origem na posição inicial do coelho sobre o gelo e o sentido positivo do eixo x apontando para leste. Em termos dos vetores unitários, quais são (a) a velocidade e (b) a posição do coelho após ter deslizado por 3,0 s?

127 O piloto de um avião voa para leste em relação ao solo enquanto um vento sopra a 20 km/h na direção sul. Se a velocidade do avião na ausência de vento é 70 km/h, qual é a velocidade do avião em relação ao solo?

128 O lançador em uma partida de softball arremessa a bola de um ponto situado 3,0 pés acima do solo. Um gráfico estroboscópico da posição da bola é mostrado na Fig. 4-63, onde as leituras estão separadas por 0,25 s e a bola foi lançada em $t = 0$. (a) Qual é o módulo da velocidade inicial da bola? (b) Qual é o módulo da velocidade da bola no instante que atinge a altura máxima em relação ao solo? (c) Qual é essa altura máxima?

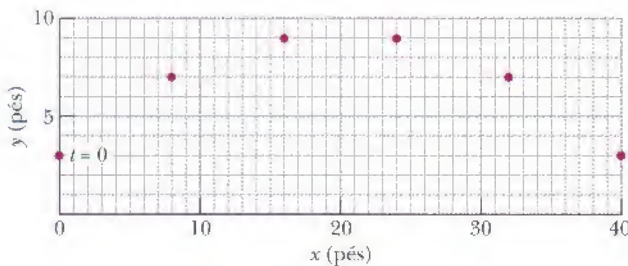


FIG. 4-63 Problema 128.

129 A polícia do estado americano de New Hampshire usa aviões para verificar se o limite de velocidade está sendo respeitado nas rodovias. Suponha que um dos aviões possui uma velocidade de cruzeiro de 135 mi/h no ar em repouso. Ele está voando para o norte, mantendo-se diretamente acima de uma rodovia norte-sul. Pelo rádio, um observador no solo informa ao piloto que está soprando um vento de 70,0 mi/h, mas se esquece de informar a direção e o sentido do vento. O piloto observa que, apesar do vento, o avião consegue voar 135 mi ao longo da rodovia em 1,00 h. Em outras palavras, a velocidade em relação ao solo é a mesma se não houvesse vento. (a) Qual é a direção do vento? (b) Qual é o curso do avião, ou seja, para que direção seu nariz está apontado?

130 A posição $\vec{r}$ de uma partícula que se move no plano xy é dada por $\vec{r} = 2t\hat{\mathrm{i}} + 2\,\mathrm{sen}[(\pi/4 \text{ rad/s})t]\hat{\mathrm{j}}$, onde $\vec{r}$ está em metros e t em segundos. (a) Calcule os valores das componentes x e y da posição da partícula para $t = 0$; 1,0; 2,0; 3,0 e 4,0 s e plote a trajetória da partícula no plano xy para o intervalo $0 \le t \le 4{,}0$ s. (b) Calcule os valores das componentes da velocidade da partícula para $t = 1{,}0$; 2,0 e 3,0 s. Mostre que a velocidade é tangente à trajetória da partícula e tem o mesmo sentido que o movimento da partícula em todos esses instantes traçando os vetores velocidade no gráfico da trajetória da partícula, plotado no item (a). (c) Calcule as componentes da aceleração da partícula nos instantes $t = 1{,}0$; 2,0 e 3,0 s.

131 Um golfista arremessa uma bola a partir de uma elevação, imprimindo à bola uma velocidade inicial de 43 m/s e um ângulo de 30° acima da horizontal. A bola atinge o campo a uma distância horizontal de 180 m do local do lançamento. Suponha que o campo seja plano. (a) Qual era a altura da elevação de onde foi arremessada a bola? (b) Qual era a velocidade da bola ao chegar ao campo?

132 Uma competição de atletismo é realizada em um planeta de um sistema solar distante. Um arremessador de peso lança o peso de um ponto 2,0 m acima do nível do solo. Um gráfico estroboscópico da posição do peso aparece na Fig. 4-64, onde as leituras foram tomadas a cada 0,50 s e o peso foi arremessado no instante $t = 0$. (a) Qual é a velocidade inicial do peso, em termos dos vetores unitários? (b) Qual é o módulo da aceleração em queda livre no planeta? (c) Quanto tempo após ter sido arremessado o peso toca o solo? (d) Se um arremesso de peso for feito na Terra nas mesmas condições, quanto tempo após o lançamento o peso tocará o solo?

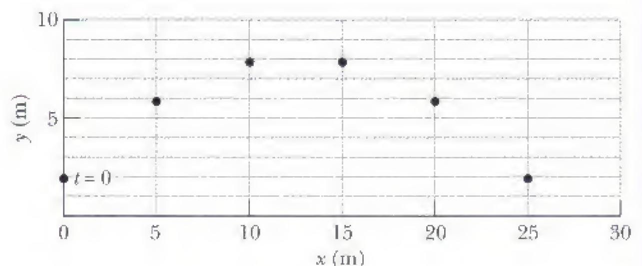


FIG. 4-64 Problema 132.

Força e Movimento — I

5



Blue Water Photo/Index Stock

Muitos entusiastas de montanhas-russas viajam no carro da frente porque querem ser os primeiros a "mergulhar no abismo". Outros, porém, garantem que viajar no último carro é muito mais emocionante. O brinquedo certamente está se movendo mais depressa quando o último carro começa a descer, puxado pelos carros da frente. Entretanto, parece haver um elemento mais sutil que aumenta a sensação de perigo quando o último carro está prestes a iniciar a descida.

Qual é o fator responsável pela sensação de perigo para alguém que está no último carro de uma montanha-russa?

A resposta está neste capítulo.

5-1 O QUE É FÍSICA?

Vimos que a física envolve o estudo dos movimentos dos objetos, como as acelerações, que são variações de velocidade. A física também envolve o estudo do que *causa* a aceleração dos objetos. A causa é sempre uma **força**, que pode ser definida, em termos coloquiais, como um empurrão ou um puxão exercido sobre um objeto. Dizemos que a força *age* sobre o objeto mudando sua velocidade. Por exemplo: na largada de um grande prêmio de Fórmula 1, uma força exercida pela pista sobre os pneus traseiros provoca a aceleração dos veículos. Quando um zagueiro segura o centroavante do time adversário, uma força exercida pelo defensor provoca a desaceleração do atacante. Quando um carro colide com um poste, uma força exercida pelo poste faz com que o carro pare bruscamente. As revistas de ciência, engenharia, direito e medicina estão repletas de artigos sobre as forças a que estão sujeitos os objetos, entre eles os seres humanos.

5-2 | Mecânica Newtoniana

A relação que existe entre uma força e a aceleração produzida por ela foi descoberta por Isaac Newton (1642–1727), e é o assunto deste capítulo. O estudo dessa relação, da forma como foi apresentada por Newton, é chamado de *mecânica newtoniana*. Vamos nos concentrar inicialmente nas três leis básicas de movimento da mecânica newtoniana.

A mecânica newtoniana não pode ser aplicada a todas as situações. Se as velocidades dos corpos envolvidos são muito altas, comparáveis com a velocidade da luz, a mecânica newtoniana deve ser substituída pela teoria da relatividade restrita de Einstein, que é válida para qualquer velocidade. Se as dimensões dos corpos envolvidos são muito pequenas, da ordem das dimensões atômicas (como, por exemplo, acontece com os elétrons de um átomo), a mecânica newtoniana deve ser substituída pela mecânica quântica. Atualmente, os físicos consideram a mecânica newtoniana como um caso especial dessas duas teorias mais abrangentes. Ainda assim, ela é um caso especial muito importante, já que pode ser aplicada ao estudo do movimento dos mais diversos objetos, desde objetos muito pequenos (quase de dimensões atômicas) até objetos muito grandes (galáxias e aglomerados de galáxias).

5-3 | A Primeira Lei de Newton

Antes de Newton formular sua mecânica pensava-se que uma certa influência, uma "força", era necessária para manter um corpo em movimento com velocidade constante, e que um corpo estava em seu "estado natural" apenas quando se encontrava em repouso. Para que um corpo se movesse com velocidade constante tinha que ser impulsionado de alguma forma, puxado ou empurrado; se não fosse assim, pararia "naturalmente".

Essas idéias pareciam razoáveis. Se você faz um disco de metal deslizar em uma superfície de madeira, ele realmente diminui de velocidade até parar. Para que continue a deslizar indefinidamente com velocidade constante deve ser empurrado ou puxado continuamente.

Por outro lado, se o disco for lançado em um rinque de patinação, percorrerá uma distância bem maior antes de parar. É possível imaginar superfícies mais escorregadias, nas quais o disco percorreria distâncias ainda maiores. No limite, podemos pensar em uma superfície extremamente escorregadia (conhecida como **superfície sem atrito**), na qual o disco não diminuiria de velocidade. (Podemos, de fato, chegar muito perto dessa situação fazendo o disco deslizar em uma mesa de ar, na qual é sustentado por uma corrente de ar.)

A partir dessas observações, podemos concluir que um corpo manterá seu estado de movimento com velocidade constante se nenhuma força agir sobre ele. Isso nos leva à primeira das três leis de Newton.

Primeira Lei de Newton Se nenhuma força atua sobre um corpo, sua velocidade não pode mudar, ou seja, o corpo não pode sofrer uma aceleração.

Em outras palavras, se o corpo está em repouso ele permanece em repouso. Se ele está em movimento, continua com a mesma velocidade (mesmo módulo *e* mesma orientação).

5-4 | Força

Vamos agora definir a unidade de força. Sabemos que uma força pode causar a aceleração de um corpo. Assim, definimos a unidade de força em termos da aceleração que uma força imprime a um corpo de referência, que tomamos como sendo o quilograma-padrão da Fig. 1-3. A esse corpo foi atribuída, exatamente e por definição, uma massa de 1 kg.

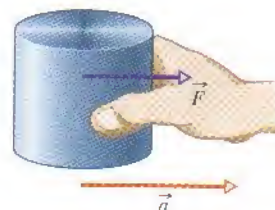


FIG. 5-1 Uma força $\vec{F}$ aplicada ao quilograma-padrão provoca uma aceleração $\vec{a}$.

Colocamos o corpo-padrão sobre uma mesa horizontal sem atrito e o puxamos para a direita (Fig. 5-1) até que, por tentativa e erro, ele adquira uma aceleração de 1 m/s^2. Declaramos então, a título de definição, que a força que estamos exercendo sobre o corpo-padrão tem um módulo de 1 newton (1 N).

Podemos exercer uma força de 2 N sobre nosso corpo-padrão, puxando-o até que a aceleração medida seja de 2 m/s^2, e assim por diante. Assim, em geral, se nosso corpo-padrão de massa igual a 1 kg tem uma aceleração de módulo a, sabemos que uma força F deve estar agindo sobre ele e que o módulo da força (em newtons) é igual ao módulo da aceleração (em metros por segundo quadrado).

Assim, uma força é medida pela aceleração que produz. Entretanto, a aceleração é uma grandeza vetorial, pois possui um módulo e uma orientação. A força também é uma grandeza vetorial? Podemos facilmente atribuir uma orientação a uma força (basta atribuir-lhe a orientação da aceleração), mas isso não é suficiente. Devemos provar experimentalmente que forças são grandezas vetoriais. Na realidade, isso foi feito: as forças são realmente grandezas vetoriais; elas têm um módulo e uma orientação, e se combinam de acordo com as regras vetoriais do Capítulo 3.

Isso significa que quando duas ou mais forças atuam sobre um corpo podemos calcular a **força total**, ou **força resultante**, somando vetorialmente as forças. Uma única força com o módulo e a orientação da força resultante tem o mesmo efeito sobre um corpo que todas as forças agindo simultaneamente. Esse fato é chamado de **princípio de superposição para forças**. O mundo seria muito estranho se, por exemplo, você e outra pessoa puxassem o corpo-padrão na mesma orientação, cada um com uma força de 1 N, e a força resultante fosse 14 N.

Neste livro as forças são quase sempre representadas por um símbolo como $\vec{F}$, e as forças resultantes por um símbolo como $\vec{F}_{res}$. Assim como acontece com outros vetores, uma força ou uma força resultante pode ter componentes em relação a um sistema de coordenadas. Quando as forças atuam apenas em uma direção, possuem apenas uma componente. Nesse caso, podemos dispensar a seta sobre os símbolos das forças e usar apenas sinais para indicar os sentidos das forças ao longo do único eixo.

Um enunciado mais rigoroso da Primeira Lei de Newton da Seção 5-3, baseado na idéia de força *resultante*, é o seguinte:

Primeira Lei de Newton: Se nenhuma força *resultante* atua sobre um corpo ($\vec{F}_{res} = 0$), sua velocidade não pode mudar, ou seja, o corpo não pode sofrer uma aceleração.

Assim, um corpo pode estar submetido a várias forças, mas se a resultante dessas forças for zero o corpo não sofre uma aceleração.

Referenciais Inerciais

A primeira lei de Newton não se aplica a todos os referenciais, mas podemos sempre encontrar referenciais nos quais essa lei (assim como o resto da mecânica

newtoniana) é verdadeira. Esses referenciais são chamados de **referenciais inerciais**.

Referencial inercial é um referencial para o qual as leis de Newton são válidas.

Assim, por exemplo, podemos supor que o solo é um referencial inercial, desde que possamos desprezar os movimentos astronômicos da Terra (como sua rotação).

Esta hipótese é válida se, digamos, fazemos deslizar um disco metálico em uma pista *curta* de gelo (supondo que a resistência que o gelo oferece ao movimento é tão pequena que pode ser desprezada); descobrimos que o movimento do disco obedece às leis de Newton. Suponha, porém, que o disco deslize sobre uma *longa* pista de gelo a partir do pólo norte (Fig. 5-2*a*). Se observarmos o disco a partir de um referencial estacionário no espaço, constataremos que o disco se move para o sul ao longo de uma trajetória retilínea, já que a rotação da Terra em torno do pólo norte simplesmente faz o gelo escorregar por baixo do disco. Entretanto, se observamos o disco de um ponto do solo, que acompanha a rotação da Terra, a trajetória do disco não é uma reta. Como a velocidade do solo sob o disco, dirigida para leste, aumenta com a distância entre o disco e o pólo, do nosso ponto de observação fixo no solo o disco parece sofrer um desvio para oeste (Fig. 5-2*b*). Esta deflexão aparente não é causada por uma força, como exigem as leis de Newton, mas pelo fato de que observamos o disco a partir de um referencial em rotação. Nesta situação, o solo é um **referencial não-inercial**.

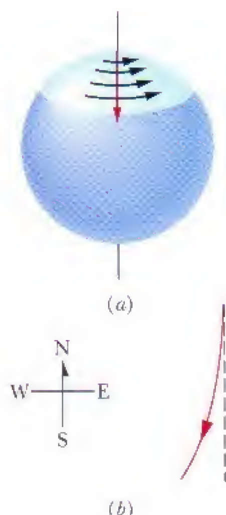
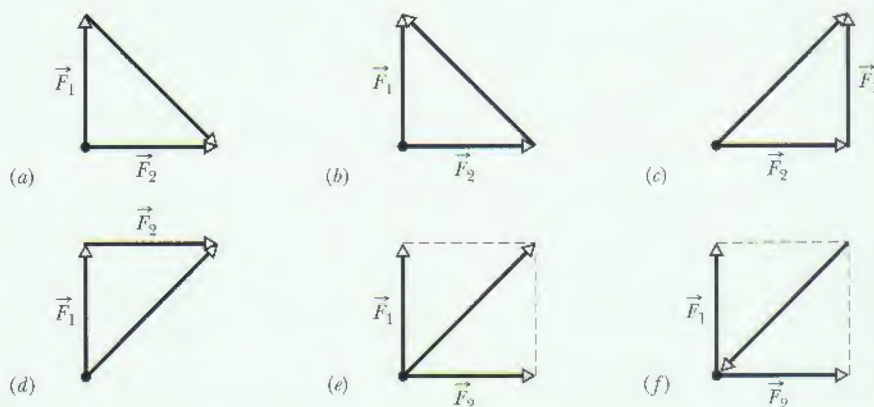


FIG. 5-2 (*a*) A trajetória de um disco que escorrega a partir do pólo norte, do ponto de vista de um observador estacionário no espaço. A Terra gira para leste. (*b*) A trajetória do disco do ponto de vista de um observador no solo.

Neste livro supomos quase sempre que o solo é um referencial inercial e que as forças e acelerações são medidas nesse referencial. Quando as medidas são executadas, digamos, em um elevador acelerado em relação ao solo, que é um referencial não-inercial, os resultados podem ser surpreendentes. Uma situação desse tipo será discutida no Exemplo 5-8.

TESTE 1 Quais dos seis arranjos da figura mostram corretamente a soma vetorial das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ para obter um terceiro vetor que representa a força resultante $\vec{F}_{res}$?



5-5 | Massa

A experiência nos diz que uma dada força produz acelerações de módulos diferentes em corpos diferentes. Coloque no chão uma bola de futebol e uma bola de boliche, e chute as duas. Mesmo que você não faça isso de verdade, sabe qual será o resultado: a bola de futebol receberá uma aceleração muito maior que a bola de boliche. As duas acelerações são diferentes porque a massa da bola de futebol é diferente da massa da bola de boliche; mas o que, exatamente, é massa?

Podemos explicar como medir a massa imaginando uma série de experimentos em um referencial inercial. No primeiro experimento exercemos uma força sobre

um corpo-padrão, cuja massa m_0 é definida com sendo de 1,0 kg. Suponha que o corpo-padrão sofra uma aceleração de 1,0 m/s^2. Podemos dizer então que a força que atua sobre esse corpo é 1,0 N.

Em seguida aplicamos a mesma força (precisaríamos nos certificar, de alguma forma, de que a força é a mesma) a um segundo corpo, o corpo X, cuja massa não é conhecida. Suponha que descobrimos que esse corpo sofre uma aceleração de 0,25 m/s^2. Sabemos que uma bola de futebol, que possui uma *massa menor*, adquire uma *aceleração maior* do que uma bola de boliche, quando a mesma força (chute) é aplicada a ambas. Vamos então fazer a seguinte conjectura: a razão entre as massas de dois corpos é igual ao inverso da razão entre as acelerações que eles adquirem quando submetidos à mesma força. Para o corpo X e o corpo-padrão, isso significa que

$$\frac{m_X}{m_0} = \frac{a_0}{a_X}.$$

Explicitando m_X, obtemos

$$m_X = m_0 \frac{a_0}{a_X} = (1{,}0 \text{ kg}) \frac{1{,}0 \text{ m/s}^2}{0{,}25 \text{ m/s}^2} = 4{,}0 \text{ kg}.$$

Nossa conjectura será útil, evidentemente, apenas se continuar válida quando mudarmos a força aplicada para outros valores. Por exemplo: se aplicamos uma força de 8,0 N a um corpo-padrão, obtemos uma aceleração de 8,0 m/s^2. Quando a força de 8,0 N é aplicada ao corpo X obtemos uma aceleração de 2,0 m/s^2. Nossa conjectura nos dá, portanto,

$$m_X = m_0 \frac{a_0}{a_X} = (1{,}0 \text{ kg}) \frac{8{,}0 \text{ m/s}^2}{2{,}0 \text{ m/s}^2} = 4{,}0 \text{ kg},$$

o que é compatível com nosso primeiro experimento. Muitos experimentos que fornecem resultados semelhantes indicam que nossa conjectura é uma forma confiável de atribuir uma massa a um dado corpo.

Nossos experimentos indicam que massa é uma propriedade *intrínseca* de um corpo, ou seja, uma característica que resulta automaticamente da existência do corpo. Eles também indicam que massa é uma grandeza escalar. Contudo, a pergunta intrigante permanece: O que, exatamente, é massa?

Como a palavra *massa* é usada na vida cotidiana, devemos ter uma noção intuitiva de massa, talvez algo que podemos sentir fisicamente. Seria ela o tamanho, o peso ou a densidade do corpo? A resposta é negativa, embora algumas vezes essas características sejam confundidas com a massa. Podemos apenas dizer que *a massa de um corpo é a propriedade que relaciona uma força que age sobre o corpo à aceleração resultante*. A massa não tem uma definição mais coloquial; você pode ter uma sensação física da massa apenas quando tenta acelerar um corpo, como ao chutar uma bola de futebol ou uma bola de boliche.

5-6 | A Segunda Lei de Newton

Todas as definições, experimentos e observações que discutimos até aqui podem ser resumidos em uma única sentença:

Segunda Lei de Newton: A força resultante que age sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo pela sua aceleração.

Em termos matemáticos,

$$\vec{F}_{res} = m\vec{a} \qquad \text{(segunda lei de Newton).} \qquad (5\text{-}1)$$

Esta equação é simples, mas devemos usá-la com cautela. Primeiro, devemos escolher o corpo ao qual vamos aplicá-la; $\vec{F}_{res}$ deve ser a soma vetorial de *todas* as for-

ças que atuam sobre *esse* corpo. Apenas as forças que atuam sobre *esse* corpo devem ser incluídas na soma vetorial, não as forças que agem sobre outros corpos envolvidos na mesma situação. Por exemplo, se você disputa a bola com vários adversários em um jogo de futebol, a força resultante que age sobre *você* é a soma vetorial de todos os empurrões e puxões que *você* recebe. Ela não inclui um empurrão ou puxão que você dá em outro jogador.

Como outras equações vetoriais, a Eq. 5-1 é equivalente a três equações para as componentes, uma para cada eixo de um sistema de coordenadas xyz:

$$F_{\text{res},x} = ma_x, \quad F_{\text{res},y} = ma_y \quad \text{e} \quad F_{\text{res},z} = ma_z. \tag{5-2}$$

TABELA 5-1

Unidades da Segunda Lei de Newton (Eqs. 5-1 e 5-2)

Sistema	Força	Massa	Aceleração
SI	newton (N)	quilograma (kg)	m/s^2
CGS[a]	dina	grama (g)	cm/s^2
Britânico[b]	libra (lb)	slug	ft/s^2

[a] 1 dina = $1\ g \cdot cm/s^2$.
[b] 1 libra = $1\ slug \cdot ft/s^2$.

Cada uma dessas equações relaciona a componente da força resultante em relação a um eixo à aceleração ao longo do mesmo eixo. Por exemplo, a primeira equação nos diz que a soma de todas as componentes das forças em relação ao eixo x produz a componente a_x da aceleração do corpo, mas não produz uma aceleração nas direções y e z. Sendo assim, a componente a_x da aceleração é causada apenas pelas componentes das forças em relação ao eixo x. Generalizando,

A componente da aceleração em relação a um dado eixo é causada *apenas* pela soma das componentes das forças em relação a *esse* eixo, e não por componentes de forças em relação a qualquer outro eixo.

A Equação 5-1 nos diz que se a força resultante que age sobre um corpo é nula, a aceleração do corpo $\vec{a} = 0$. Se o corpo está em repouso, permanece em repouso; se está em movimento, continua a se mover com velocidade constante. Em tais casos, as forças que agem sobre o corpo se *compensam*, e dizemos que o corpo está em *equilíbrio*. Freqüentemente dizemos que as forças se *cancelam*, mas o termo "cancelar" pode ser mal interpretado. Ele *não* significa que as forças deixaram de existir (cancelar forças não é como cancelar uma reserva em um restaurante). As forças continuam a agir sobre o corpo.

Em unidades do SI, a Eq. 5-1 nos diz que

$$1\ \text{N} = (1\ \text{kg})(1\ \text{m/s}^2) = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2. \tag{5-3}$$

Algumas unidades de força em outros sistemas de unidades aparecem na Tabela 5-1 e no Apêndice D.

Para resolver problemas que envolvem a segunda lei de Newton freqüentemente desenhamos um **diagrama de corpo livre**, no qual o único corpo mostrado é aquele para o qual estamos somando as forças. Um esboço do próprio corpo é preferido por alguns professores, mas para poupar espaço nestes capítulos muitas vezes representaremos o corpo por um ponto. Além disso, as forças que agem sobre o corpo serão representadas por setas com a origem no ponto. Um sistema de coordenadas é normalmente incluído, e a aceleração do corpo é algumas vezes mostrada através de outra seta (acompanhada por um símbolo adequado para mostrar que se trata de uma aceleração).

Um **sistema** é formado por um ou mais corpos, e qualquer força exercida sobre os corpos do sistema por corpos fora do sistema é chamada de **força externa**. Se os corpos pertencentes a um sistema estão rigidamente ligados uns aos outros, podemos tratar o sistema como um único corpo, e a força resultante $\vec{F}_{res}$ a que está submetido este corpo é a soma vetorial das forças externas. (Não incluímos as **forças internas**, ou seja, as forças entre dois corpos pertencentes ao sistema.) Assim, por exemplo, uma locomotiva e um vagão formam um sistema. Se, digamos, um reboque puxa a locomotiva, a força exercida pelo reboque age sobre o sistema locomotiva-vagão. Como acontece no caso de um só corpo, podemos relacionar a força resultante externa que age sobre um sistema à aceleração do sistema através da segunda lei de Newton, $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$, onde m é a massa total do sistema.

TESTE 2 A figura mostra duas forças horizontais atuando em um bloco apoiado em um piso sem atrito. Se uma terceira força horizontal $\vec{F}_3$ também age sobre o bloco, determine o módulo e a orientação de $\vec{F}_3$ se o bloco está (a) em repouso e (b) se movendo para a esquerda com uma velocidade constante de 5 m/s.



Exemplo 5-1

Nas Figs. 5.3*a* a *c*, uma ou duas forças agem sobre um disco metálico que se move sobre o gelo sem atrito ao longo do eixo x, em um movimento unidimensional. A massa do disco é $m = 0{,}20$ kg. As forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ atuam ao longo do eixo x e têm módulos $F_1 = 4{,}0$ N e $F_2 = 2{,}0$ N. A força $\vec{F}_3$ faz um ângulo $\theta = 30°$ com o eixo x e tem um módulo $F_3 = 1{,}0$ N. Qual é a aceleração do disco em cada situação?

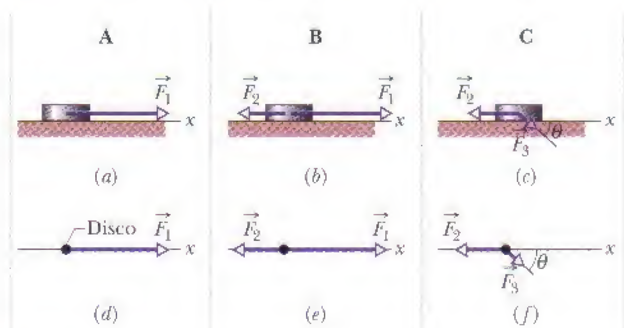


FIG. 5-3 (*a*)–(*c*) Em três situações, forças atuam sobre um disco que se move ao longo do eixo x. (*d*)–(*f*) Diagramas de corpo livre.

IDÉIA-CHAVE Em cada situação podemos relacionar a aceleração $\vec{a}$ à força resultante $\vec{F}_{res}$ que age sobre o disco através da segunda lei de Newton, $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$. Entretanto, como o movimento ocorre apenas ao longo do eixo x, podemos simplificar cada situação escrevendo a segunda lei apenas para as componentes x:

$$F_{res,x} = ma_x. \quad (5\text{-}4)$$

Os diagramas de corpo livre para as três situações aparecem nas Figs. 5-3*d* a *f*, com o disco representado por um ponto.

Situação A: Para a situação da Fig. 5-3*d*, em que existe apenas uma força horizontal, temos, de acordo com a Eq. 5-4,

$$F_1 = ma_x,$$

o que, para os dados do problema, nos dá

$$a_x = \frac{F_1}{m} = \frac{4{,}0\ \text{N}}{0{,}20\ \text{kg}} = 20\ \text{m/s}^2. \quad \text{(Resposta)}$$

A resposta positiva indica que a aceleração ocorre no sentido positivo do eixo x.

Situação B: Na Fig. 5-3*e* duas forças horizontais agem sobre o disco: $\vec{F}_1$, no sentido positivo do eixo x, e $\vec{F}_2$, no sentido negativo. De acordo com a Eq. 5-4,

$$F_1 - F_2 = ma_x,$$

o que, para os dados do problema, nos dá

$$a_x = \frac{F_1 - F_2}{m} = \frac{4{,}0\ \text{N} - 2{,}0\ \text{N}}{0{,}20\ \text{kg}} = 10\ \text{m/s}^2. \quad \text{(Resposta)}$$

Assim, a força resultante acelera o disco no sentido positivo do eixo x.

Situação C: Na Fig. 5-3*f* não é a força $\vec{F}_3$ que tem a direção da aceleração do disco, mas sim a componente $F_{3,x}$. (A força $\vec{F}_3$ é bidimensional, enquanto o movimento é unidimensional.) Assim, a Eq. 5-4 assume a forma

$$F_{3,x} - F_2 = ma_x. \quad (5\text{-}5)$$

De acordo com a figura, $F_{3,x} = F_3 \cos\theta$. Explicitando a aceleração e substituindo $F_{3,x}$ por seu valor, temos:

$$a_x = \frac{F_{3,x} - F_2}{m} = \frac{F_3\cos\theta - F_2}{m}$$

$$= \frac{(1{,}0\ \text{N})(\cos 30°) - 2{,}0\ \text{N}}{0{,}20\ \text{kg}} = -5{,}7\ \text{m/s}^2. \quad \text{(Resposta)}$$

Assim, a força resultante acelera o disco no sentido negativo do eixo x.

Exemplo 5-2

Na vista superior da Fig. 5-4*a*, uma lata de biscoitos de 2,0 kg é acelerada a 3,0 m/s² na orientação definida por $\vec{a}$, em uma superfície horizontal sem atrito. A aceleração é causada por três forças horizontais, das quais apenas duas são mostradas: $\vec{F}_1$, de módulo 10 N, e $\vec{F}_2$, de módulo 20 N. Qual é a terceira força, $\vec{F}_3$, em termos dos vetores unitários e na notação módulo-ângulo?

IDÉIA-CHAVE A força resultante $\vec{F}_{res}$ que age sobre a lata é a soma das três forças e está relacionada à aceleração $\vec{a}$ pela segunda lei de Newton ($\vec{F}_{res} = m\vec{a}$). Assim,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = m\vec{a}, \tag{5-6}$$

o que nos dá

$$\vec{F}_3 = m\vec{a} - \vec{F}_1 - \vec{F}_2 \tag{5-7}$$

Cálculos: Como se trata de um problema bidimensional, *não podemos* determinar $\vec{F}_3$ simplesmente substituindo os módulos das grandezas vetoriais no lado direito da Eq. 5-7. Devemos, em vez disso, somar vetorialmente $m\vec{a}$, $-\vec{F}_1$ e $-\vec{F}_2$, como mostra a Fig. 5-4*b*. Esta soma pode ser feita em uma calculadora, já que conhecemos tanto o módulo quanto o ângulo dos três vetores. Entretanto, vamos calcular o lado direito da Eq. 5-7 em termos das componentes, primeiro para o eixo *x* e depois para o eixo *y*.

Componentes x: Para o eixo *x*, temos:

$$F_{3,x} = ma_x - F_{1,x} - F_{2,x}$$
$$= m(a \cos 50°) - F_1 \cos(-150°) - F_2 \cos 90°.$$

Substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$F_{3,x} = (2{,}0\ \text{kg})(3{,}0\ \text{m/s}^2) \cos 50° - (10\ \text{N}) \cos(-150°)$$
$$- (20\ \text{N}) \cos 90°$$
$$= 12{,}5\ \text{N}.$$

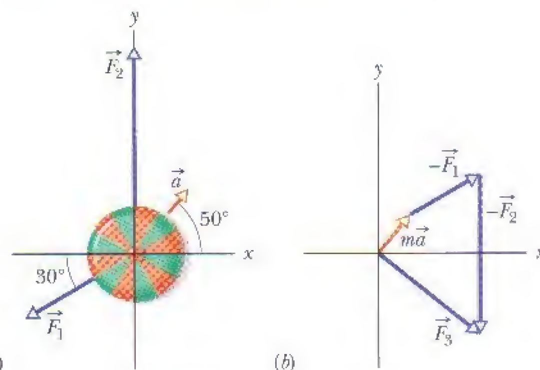


FIG. 5-4 (*a*) Vista superior de duas das três forças que agem sobre uma lata de biscoitos, produzindo uma aceleração $\vec{a}$. $\vec{F}_3$ não é mostrada. (*b*) Um arranjo de vetores $m\vec{a}$, $-\vec{F}_1$ e $-\vec{F}_2$ para determinar a força $\vec{F}_3$.

Componentes y: Para o eixo *y*, temos:

$$F_{3,y} = ma_y - F_{1,y} - F_{2,y}$$
$$= m(a \operatorname{sen} 50°) - F_1 \operatorname{sen}(-150°) - F_2 \operatorname{sen} 90°$$
$$= (2{,}0\ \text{kg})(3{,}0\ \text{m/s}^2) \operatorname{sen} 50° - (10\ \text{N}) \operatorname{sen}(-150°)$$
$$-(20\ \text{N}) \operatorname{sen} 90°$$
$$= -10{,}4\ \text{N}.$$

Vetor: Em termos dos vetores unitários, temos:

$$\vec{F}_3 = F_{3,x}\hat{\imath} + F_{3,y}\hat{\jmath} = (12{,}5\ \text{N})\hat{\imath} - (10{,}4\ \text{N})\hat{\jmath}$$
$$\approx (13\ \text{N})\hat{\imath} - (10\ \text{N})\hat{\jmath}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Podemos agora usar uma calculadora para determinar o módulo e o ângulo de $\vec{F}_3$. Também podemos usar a Eq. 3-6 para obter o módulo e o ângulo (em relação ao semi-eixo *x* positivo):

$$F_3 = \sqrt{F_{3,x}^2 + F_{3,y}^2} = 16\ \text{N}$$

e

$$\theta = \tan^{-1} \frac{F_{3,y}}{F_{3,x}} = -40°. \qquad \text{(Resposta)}$$

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 1: ***Dimensões e Vetores*** Quando estamos lidando com forças não podemos simplesmente somar ou subtrair os módulos para obter a resultante, a menos que as forças tenham todas *a mesma orientação*. Se as forças tiverem orientações diferentes será preciso recorrer à soma vetorial, seja em uma calculadora, seja usando as componentes dos vetores, como no Exemplo 5-2.

Tática 2: ***Leitura de Problemas que Envolvem Forças*** Leia o enunciado do problema várias vezes até que você tenha uma boa idéia da situação, dos dados fornecidos e do que está sendo pedido. Se você compreendeu o problema, mas não sabe o que fazer em seguida, coloque o problema de lado e leia novamente o texto. Se estiver confuso a respeito da segunda lei de Newton, releia a seção correspondente. Estude os exemplos. Lembre-se de que resolver problemas de física (assim como consertar automóveis e projetar computadores) exige treinamento.

Tática 3: ***Desenhe Dois Tipos de Figuras*** Você pode precisar de duas figuras. A primeira é um esboço da situação real. Ao desenhar as forças, coloque a origem de cada vetor que representa uma força na superfície ou no interior do corpo sobre o qual a força atua. A segunda é um diagrama de corpo livre, no qual são desenhadas as forças que agem sobre um *único* corpo, representado por um ponto ou um símbolo. Coloque as origens de todos os vetores que representam forças no ponto ou símbolo.

Tática 4: Qual É o Seu Sistema? Para usar a segunda lei de Newton você precisa saber a que corpo ou sistema ela está sendo aplicada. No Exemplo 5-1 está sendo aplicada ao disco metálico; no Exemplo 5-2, à lata de biscoitos.

Tática 5: Saiba Escolher os Eixos Muitas vezes o problema fica muito mais simples quando um dos eixos coincide com uma das forças.

5-7 | Algumas Forças Especiais

Força Gravitacional

A **força gravitacional** $\vec{F}_g$ exercida sobre um corpo é um tipo especial de atração que um segundo corpo exerce sobre o primeiro. Nestes capítulos iniciais não discutimos a natureza dessa força, e consideramos apenas situações nas quais o segundo corpo é a Terra. Assim, quando falamos da força gravitacional $\vec{F}_g$ que age sobre um corpo estamos nos referindo à força que o atrai na direção do centro da Terra, ou seja, verticalmente para baixo. Vamos supor que o solo é um referencial inercial.

Considere um corpo de massa m em queda livre, submetido, portanto, a uma aceleração de módulo g. Nesse caso, se desprezarmos os efeitos do ar a única força que age sobre o corpo é a força gravitacional $\vec{F}_g$. Podemos relacionar essa força à aceleração correspondente através da segunda lei de Newton, ($\vec{F} = m\vec{a}$). Colocamos um eixo y vertical ao longo da trajetória do corpo, com o sentido positivo para cima. Para este eixo, a segunda lei de Newton pode ser escrita na forma $F_{res,y} = ma_y$, que, em nossa situação, se torna

$$-F_g = m(-g)$$

ou

$$F_g = mg. \tag{5-8}$$

Em palavras, o módulo da força gravitacional é igual ao produto mg.

Esta mesma força gravitacional, com o mesmo módulo, atua sobre o corpo mesmo quando não está em queda livre mas se encontra, por exemplo, em repouso sobre uma mesa de sinuca ou movendo-se sobre a mesa. (Para que a força gravitacional desaparecesse, a Terra teria que desaparecer.)

Podemos escrever a segunda lei de Newton para a força gravitacional nas seguintes formas vetoriais:

$$\vec{F}_g = -F_g\hat{j} = -mg\hat{j} = m\vec{g}, \tag{5-9}$$

onde $\hat{j}$ é o vetor unitário que aponta para cima ao longo do eixo y, perpendicularmente ao solo, e $\vec{g}$ é a aceleração de queda livre (escrita como um vetor), dirigida para baixo.

Peso

O **peso** P de um corpo é o módulo da força necessária para impedir que o corpo caia livremente medida em relação ao solo. Assim, por exemplo, para manter uma bola em repouso em sua mão enquanto você está parado de pé você deve aplicar uma força para cima para equilibrar a força gravitacional que a Terra exerce sobre a bola. Suponha que o módulo da força gravitacional seja 2,0 N. Nesse caso, o módulo da força para cima deve ser 2,0 N e, portanto, o peso P da bola é 2,0 N. Também dizemos que a bola *pesa* 2,0 N.

Uma bola com um peso de 3,0 N exigiria uma força maior (3,0 N) para permanecer em equilíbrio. A razão é que a força gravitacional a ser equilibrada tem um módulo maior (3,0 N). Dizemos que esta segunda bola é *mais pesada* que a primeira.

Vamos generalizar a situação. Considere um corpo que tem uma aceleração $\vec{a}$ nula em relação ao solo, considerado mais uma vez como referencial inercial. Duas forças atuam sobre o corpo: uma força gravitacional $\vec{F}_g$, dirigida para baixo, e uma força para cima, de módulo P, que a equilibra. Podemos escrever a segunda lei de Newton para um eixo y vertical, com o sentido positivo para cima, na forma

$$F_{\text{res},y} = ma_y.$$

Em nossa situação, esta equação se torna

$$P - F_g = m(0) \tag{5-10}$$

ou $$P = F_g \quad \text{(peso, com o solo como referencial inercial)}. \tag{5-11}$$

De acordo com a Eq. 5-11 (supondo que o solo é um referencial inercial),

> O peso P de um corpo é igual ao módulo F_g da força gravitacional que age sobre o corpo.

Substituindo F_g por mg, obtemos a equação

$$P = mg \quad \text{(peso)}, \tag{5-12}$$

que relaciona o peso de um corpo a sua massa.

Pesar um corpo significa medir seu peso. Uma forma de fazer isso é colocar o corpo em um dos pratos de uma balança de braços iguais (Fig. 5-5) e colocar corpos de referência (de massas conhecidas) no outro prato até se estabelecer o equilíbrio (até que as forças gravitacionais dos dois lados sejam iguais). Como, nessa situação, as massas nos dois pratos são iguais, ficamos conhecendo a massa do corpo. Se conhecemos o valor de g no local onde está situada a balança também podemos calcular o peso do corpo com o auxílio da Eq. 5-12.

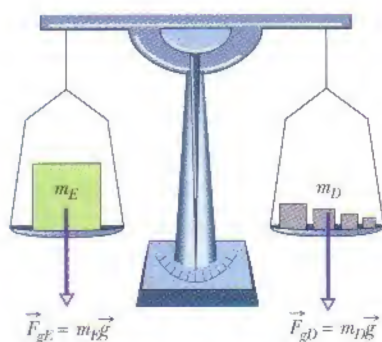


FIG. 5-5 Uma balança de braços iguais. Quando a balança está equilibrada a força gravitacional $\vec{F}_{gE}$ a que está submetido o corpo que se deseja pesar (no prato da esquerda) e a força gravitacional total $\vec{F}_{gD}$ a que estão submetidas as massas de referência (no prato da direita) são iguais. Assim, a massa m_E do corpo que está sendo pesado é igual à massa total m_D das massas de referência.

Também podemos pesar um corpo em uma balança de mola (Fig. 5-6). O corpo distende uma mola, movendo um ponteiro ao longo de uma escala que foi calibrada e marcada em unidades de massa ou de força. (Quase todas as balanças de banheiro são deste tipo.) Se a escala estiver em unidades de massa, fornecerá valores precisos apenas nos lugares onde o valor de g for o mesmo da localidade onde a balança foi calibrada.

Para que o peso de um corpo seja medido corretamente é preciso que ele não possua uma aceleração vertical. Assim, por exemplo, se você se pesar no banheiro de casa ou a bordo de um trem em movimento o resultado será o mesmo. Caso, porém, você repita a medição em um elevador acelerado, obterá uma leitura diferente por causa da aceleração. Um peso medido dessa forma é chamado de *peso aparente*.

Atenção: O peso de um corpo não é sua massa. Peso é o módulo de uma força, e está relacionado à massa através da Eq. 5-12. Se você mover um corpo para um local onde o valor de g é diferente, a massa do corpo (uma propriedade intrínseca) continuará a mesma, mas o peso mudará. Por exemplo: o peso de uma bola de boliche de massa igual a 7,2 kg é 71 N na Terra, mas apenas 12 N na Lua. A massa é a mesma na Terra e na Lua, mas a aceleração de queda livre na Lua é apenas 1,6 m/s^2.

Força Normal

Se você ficar em pé em um colchão a Terra o puxará para baixo, mas você permanecerá em repouso. Isso acontece porque o colchão se deforma sob o seu peso e empurra você para cima. Da mesma forma, se você está sobre um piso ele se deforma (ainda que imperceptivelmente), e o empurra para cima. Mesmo um piso de concreto aparentemente rígido faz o mesmo (se não estiver apoiado diretamente no solo, um número suficientemente grande de pessoas sobre o mesmo pode quebrá-lo).

O empurrão exercido pelo colchão ou pelo piso é uma **força normal** $\vec{F}_N$. O nome vem do termo matemático *normal*, que significa perpendicular. A força que o piso exerce sobre você é perpendicular ao piso.

> Quando um corpo exerce uma força sobre uma superfície, a superfície (ainda que aparentemente rígida) se deforma e empurra o corpo com uma força normal $\vec{F}_N$ que é perpendicular à superfície.

A Figura 5-7*a* mostra um exemplo. Um bloco de massa *m* pressiona uma mesa para baixo, deformando-a por causa da força gravitacional $\vec{F}_g$ a que está sujeito o bloco. A mesa empurra o bloco para cima com uma força normal $\vec{F}_N$. A Fig. 5-7*b* mostra o diagrama de corpo livre do bloco. As forças $\vec{F}_g$ e $\vec{F}_N$ são as únicas forças que atuam sobre o bloco, e ambas são verticais. Assim, a segunda lei de Newton para o bloco, tomando um eixo *y* com o sentido positivo para cima ($F_{res,y} = ma_y$), assume a forma

$$F_N - F_g = ma_y.$$

Substituímos F_g por mg (Eq. 5-8) e obtemos

$$F_N - mg = ma_y.$$

O módulo da força normal é, portanto,

$$F_N = mg + ma_y = m(g + a_y) \tag{5-13}$$

para qualquer aceleração vertical a_y da mesa e do bloco (eles poderiam estar, por exemplo, em um elevador acelerado). Se a mesa e o bloco não estão acelerados em relação ao solo, $a_y = 0$ e a Eq. 5-13 nos dá

$$F_N = mg. \tag{5-14}$$

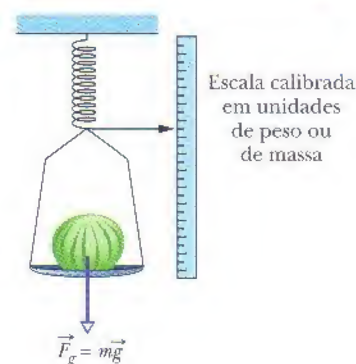


FIG. 5-6 Uma balança de mola. A leitura é proporcional ao *peso* do objeto colocado no prato, e a escala fornece o valor do peso se estiver calibrada em unidades de força. Se, em vez disso, estiver calibrada em unidades de massa a leitura será igual ao peso do objeto apenas se o valor de *g* no lugar onde a balança está sendo usada for igual ao valor de *g* no lugar onde a balança foi calibrada.

TESTE 3 Na Fig. 5-7 o módulo da força normal $\vec{F}_N$ é maior, menor ou igual a mg se o bloco e a mesa estão em um elevador que se move para cima (a) com velocidade constante; (b) com velocidade crescente?

Atrito

Quando empurramos ou tentamos empurrar um corpo sobre uma superfície, a interação dos átomos do corpo com os átomos da superfície faz com que haja uma resistência ao movimento. (Esta interação será discutida no próximo capítulo.) A resistência é considerada como uma única força $\vec{f}$, que recebe o nome de **força de atrito** ou simplesmente **atrito**. Esta força é paralela à superfície e aponta no sentido oposto ao do movimento ou tendência ao movimento (Fig. 5-8). Em algumas situações, para simplificar os cálculos desprezamos as forças de atrito.

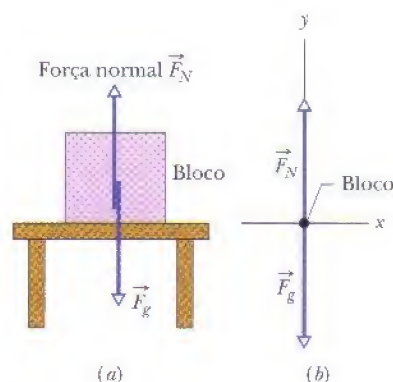


FIG. 5-7 (*a*) Um bloco que repousa sobre uma mesa experimenta uma força normal $\vec{F}_N$ perpendicular à superfície da mesa. (*b*) Diagrama de corpo livre do bloco.

Tração

Quando uma corda (ou um fio, cabo ou outro objeto do mesmo tipo) é presa a um corpo e esticada aplica ao corpo uma força $\vec{T}$ orientada ao longo da corda (Fig. 5-9*a*). Essa força é chamada de *força de tração* porque a corda está sendo tracionada (puxada). A *tensão da corda* é o módulo T da força exercida sobre o corpo. Assim, por exemplo, se a força exercida pela corda sobre o corpo tem um módulo $T = 50$ N, a tensão da corda é de 50 N.

Uma corda é freqüentemente considerada *sem massa* (o que significa que a massa é desprezível em comparação com a massa do corpo ao qual está presa) e *inextensível*. Nesse caso, a corda existe apenas como uma ligação entre dois corpos. Ela puxa os dois corpos com forças de mesmo módulo T, mesmo que os dois corpos e a corda estejam acelerando e mesmo que a corda passe por uma polia *sem massa e sem atrito* (Figs. 5-9*b* e *c*). Uma polia desse tipo tem massa desprezível em comparação com as massas dos corpos e atrito desprezível no eixo de rotação. Se a corda dá meia volta em torno da polia, como na Fig. 5-9*c*, a força resultante da corda sobre a polia é $2T$.

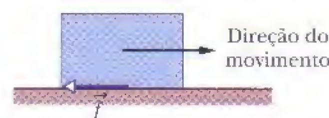


FIG. 5-8 Uma força de atrito $\vec{f}$ se opõe ao movimento de um corpo sobre uma superfície.

TESTE 4 O corpo suspenso da Fig. 5-9*c* pesa 75 N. A tensão T é igual, maior do que ou menor que 75 N quando o corpo se move para cima (a) com velocidade constante, (b) com velocidade crescente e (c) com velocidade decrescente?

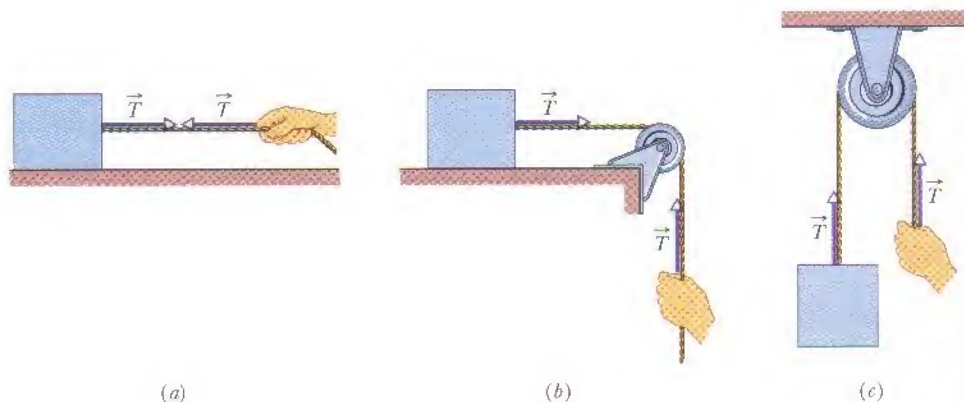


FIG. 5-9 (*a*) A corda esticada está sob tensão. Se sua massa é desprezível a corda puxa o corpo e a mão com uma força $\vec{T}$, mesmo que a corda passe por uma polia sem massa e sem atrito, como em (*b*) e (*c*).

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 6: *Força Normal* A Eq. 5-14, usada para calcular a força normal que age sobre um corpo, é válida apenas quando $\vec{F}_N$ é dirigida para cima e a aceleração vertical do corpo é zero; *não* podemos aplicá-la quando $\vec{F}_N$ tem outra orientação ou quando a aceleração vertical não é zero. Nesse caso, devemos escrever uma nova expressão para F_N usando a segunda lei de Newton.

Podemos mover $\vec{F}_N$ de um ponto para outro de uma figura, desde que conservemos sua orientação. Assim, por exemplo, na Fig. 5-7*a* podemos deslocá-la para baixo até que sua extremidade fique na superfície da mesa. Entretanto, é menos provável que $\vec{F}_N$ seja interpretada erroneamente quando a origem do vetor está na superfície do corpo ou no seu interior (como na Fig. 5-7*a*). Uma técnica ainda melhor é desenhar um diagrama de corpo livre como o da Fig. 5-7*b*, com a origem de $\vec{F}_N$ no ponto ou símbolo que representa o bloco.

Exemplo 5-3

Ilusão na decolagem. Um avião a jato que decola de um porta-aviões é movido por poderosos motores e, ao mesmo tempo, arremessado para a frente por um mecanismo de catapulta instalado no convés do navio. A elevada aceleração resultante permite que o avião alcance a velocidade de decolagem em um pequeno trecho do convés. Entretanto, a alta aceleração também induz o piloto a inclinar o avião bruscamente para baixo, ao deixar o convés. Os pilotos são treinados para ignorar essa tendência, mas às vezes um avião vai direto para o mar. Vamos discutir a física que está por trás desta compulsão.

A sensação de orientação vertical depende de indicações visuais e do sistema vestibular, situado no ouvido interno. Esse sistema contém pequenas células pilosas imersas em um fluido. Quando você mantém a cabeça erguida, os pêlos se alinham com a força gravitacional $\vec{F}_g$, e o sistema avisa ao cérebro que a cabeça está erguida. Quando você inclina a cabeça para trás de um ângulo ϕ, os pêlos se inclinam e o sistema avisa ao cérebro a respeito da inclinação. Os pêlos também se inclinam quando você é acelerado para a frente por uma força horizontal aplicada $\vec{F}_{ap}$. Nesse caso, o sinal enviado ao cérebro indica, erroneamente, que a cabeça está inclinada para trás, alinhada com o vetor resultante $\vec{F}_{res} = \vec{F}_g + \vec{F}_{ap}$ (Fig. 5-10*a*). Entretanto, o falso sinal é ignorado quando indicações visuais mostram claramente que não há inclinação alguma, como acontece quando você acelera um carro.

Um piloto que é arremessado do convés de um porta-aviões à noite praticamente não tem pistas visuais. A ilusão de inclinação é forte e muito convincente, de modo que o piloto tem a nítida impressão de que o avião deixou o convés com o nariz muito inclinado para cima. Sem treinamento adequado o piloto tenta nivelar o avião baixando bruscamente o nariz, o que faz o avião cair no mar.

Suponha que, partindo do repouso, um piloto sofre uma aceleração horizontal constante até atingir a velocidade de decolagem de 85 m/s em 90 m. Qual é o ângulo ϕ da falsa inclinação experimentada pelo piloto?

IDÉIAS-CHAVE (1) Podemos usar a segunda lei de Newton para relacionar o módulo F_{ap} da força experimentada pelo piloto (aplicada pelo encosto do assento) à aceleração produzida, a_x: $F_{ap} = ma_x$, onde m é a massa do piloto. (2) Como a aceleração é constante, podemos usar as equações da Tabela 2-1 para calcular a_x.

Cálculos: Precisamos conhecer o ângulo ϕ entre a vertical e $\vec{F}_{res}$, a soma vetorial da força gravitacional vertical $\vec{F}_g$ com a força horizontal aplicada $\vec{F}_{ap}$. Podemos formar um

triângulo retângulo com os três vetores (Fig. 5-10*b*), o que nos permite escrever

$$\tan\phi = \frac{F_{ap}}{F_g},$$

ou

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{F_{ap}}{F_g}\right). \quad (5\text{-}15)$$

Como conhecemos a velocidade inicial ($v_0 = 0$), a velocidade final ($v_x = 85$ m/s) e o deslocamento ($x - x_0 = 90$ m), usamos a Eq. 2-16, ($v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$), para escrever

$$(85 \text{ m/s})^2 = 0^2 + 2a_x(90 \text{ m}),$$

ou

$$a_x = 40{,}1 \text{ m/s}^2.$$

De acordo com a segunda lei de Newton, $F_{ap} = m(40{,}1 \text{ m/s}^2)$. Substituindo este resultado e o resultado $F_g = m(9{,}8 \text{ m/s}^2)$ na Eq. 5-15, obtemos

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{m(40{,}1 \text{ m/s}^2)}{m(9{,}8 \text{ m/s}^2)}\right) = 76^\circ. \quad \text{(Resposta)}$$

Assim, quando o avião está acelerando no convés do porta-aviões o piloto tem a impressão de que sua cabeça está inclinada 76° para trás, como se o avião estivesse inclinado 76° para cima. Essa ilusão pode induzir o piloto a inclinar o avião 76° para baixo logo após a decolagem.

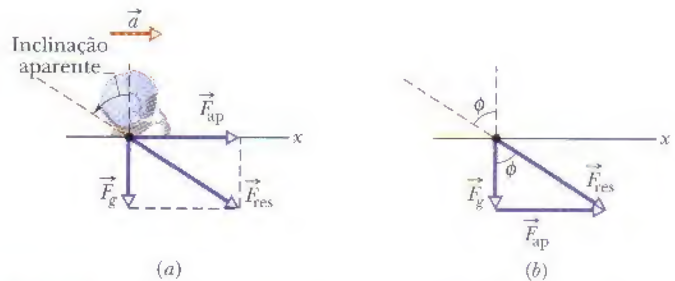


FIG. 5-10 (*a*) A força $\vec{F}_{ap}$, dirigida para a direita, é aplicada ao piloto durante a decolagem. O piloto tem a impressão de que sua cabeça está inclinada para trás ao longo da linha vermelha tracejada. (*b*) O vetor resultante $\vec{F}_{res} (= \vec{F}_g + \vec{F}_{ap})$ faz um ângulo ϕ com a vertical.

5-8 | A Terceira Lei de Newton

Dizemos que dois corpos *interagem* quando empurram ou puxam um ao outro, ou seja, quando cada um exerce uma força sobre o outro. Suponha, por exemplo, que você apóie um livro L em uma caixa C (Fig. 5-11*a*). Nesse caso, o livro e a caixa interagem: A caixa exerce uma força horizontal $\vec{F}_{LC}$ sobre o livro e o livro exerce uma força horizontal $\vec{F}_{CL}$ sobre a caixa. Esse par de forças é mostrado na Fig. 5-11*b*. A terceira lei de Newton afirma que

Terceira Lei de Newton: Quando dois corpos interagem, as forças que cada corpo exerce sobre o outro são sempre iguais em módulo e têm sentidos opostos.

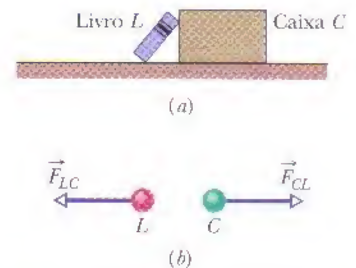


FIG. 5-11 (*a*) O livro L está apoiado na caixa C. (*b*) As forças $\vec{F}_{LC}$ (força da caixa sobre o livro) e $\vec{F}_{CL}$ (força do livro sobre a caixa) têm o mesmo módulo e sentidos opostos.

No caso do livro e da caixa, podemos escrever essa lei como a relação escalar

$$F_{LC} = F_{CL} \quad \text{(módulos iguais)}$$

ou como a relação vetorial

$$\vec{F}_{LC} = -\vec{F}_{CL} \quad \text{(módulos iguais e sentidos opostos)},$$

onde o sinal negativo significa que as duas forças têm sentidos opostos. Podemos chamar as forças entre dois corpos que interagem de **par de forças da terceira lei**. Quando dois corpos quaisquer interagem em qualquer situação, um par de forças da terceira lei está presente. O livro e a caixa da Fig. 5-11*a* estão em repouso, mas a terceira lei seria válida se estivessem em movimento uniforme ou mesmo acelerado.

Como outro exemplo, vamos examinar os pares de forças da terceira lei que existem no sistema da Fig. 5-12*a*, constituído por uma abóbora, uma mesa e a Terra. A abóbora interage com a mesa e esta com a Terra (desta vez, existem três corpos cujas interações devemos estudar).

Vamos inicialmente nos concentrar nas forças que agem sobre a abóbora (Fig. 5-12*b*). A força $\vec{F}_{AM}$ é a força normal que a mesa exerce sobre a abóbora e a força



FIG. 5-12 (*a*) Uma abóbora está em repouso sobre uma mesa na superfície da Terra. (*b*) As forças que agem *sobre a abóbora* são $\vec{F}_{AM}$ e $\vec{F}_{AT}$. (*c*) Par de forças da terceira lei para a interação abóbora–Terra. (*d*) Par de forças da terceira lei para a interação abóbora–mesa.

$\vec{F}_{AT}$ é a força gravitacional que a Terra exerce sobre a abóbora. Elas formam um par de forças da terceira lei? Não, pois são forças que atuam sobre um mesmo corpo, a abóbora, e não sobre dois corpos que interagem.

Para encontrar um par da terceira lei precisamos nos concentrar não na abóbora, mas na interação entre a abóbora e outro corpo. Na interação abóbora-Terra (Fig. 5-12*c*), a Terra atrai a abóbora com uma força gravitacional $\vec{F}_{AT}$ e a abóbora atrai a Terra com uma força gravitacional $\vec{F}_{TA}$. Essas forças formam um par de forças da terceira lei? Sim, porque as forças atuam sobre dois corpos que interagem e a força a que um está submetido é causada pelo outro. Assim, de acordo com a terceira lei de Newton,

$$\vec{F}_{AT} = -\vec{F}_{TA} \quad \text{(interação abóbora-Terra).}$$

Na interação abóbora–mesa a força da mesa sobre a abóbora é $\vec{F}_{AM}$ e a força da abóbora sobre a mesa é $\vec{F}_{MA}$ (Fig. 5-12*d*). Essas forças também formam um par de forças da terceira lei e, portanto,

$$\vec{F}_{AM} = -\vec{F}_{MA} \quad \text{(interação abóbora-mesa).}$$



TESTE 5 Suponha que a abóbora e a mesa da Fig. 5-12 estão em um elevador que começa a acelerar para cima. (a) Os módulos de $\vec{F}_{MA}$ e $\vec{F}_{AM}$ aumentam, diminuem ou permanecem os mesmos? (b) Essas duas forças continuam a ser iguais em módulo, com sentidos opostos? (c) Os módulos de $\vec{F}_{AT}$ e $\vec{F}_{TA}$ aumentam, diminuem ou permanecem os mesmos? (b) Essas duas forças continuam a ser iguais em módulo, com sentidos opostos?

5-9 | Aplicando as Leis de Newton

O resto deste capítulo é composto por exemplos. O leitor deve examiná-los atentamente, observando os métodos usados para resolver um problema. Especialmente importante é saber traduzir uma dada situação em um diagrama de corpo livre com eixos adequados, para que as leis de Newton possam ser aplicadas.

Exemplo 5-4 Aumente sua capacidade

A Fig. 5-13 mostra um bloco D (o *bloco deslizante*) de massa $M = 3{,}3$ kg. O bloco está livre para se mover ao longo de uma superfície horizontal sem atrito e está ligado, por uma corda que passa por uma polia sem atrito, a um segundo bloco P (o *bloco pendente*), de massa $m = 2{,}1$ kg. As massas da corda e da polia podem ser desprezadas em comparação com a massa dos blocos. Enquanto o bloco pendente P desce, o bloco deslizante D acelera para a direita. Determine (a) a aceleração do bloco D, (b) a aceleração do bloco P e (c) a tensão na corda.

P *De que trata este problema?*

Foram dados dois corpos, o bloco deslizante e o bloco pendente, mas também é preciso levar em conta a Terra, que atua sobre os dois corpos. (Se não fosse a Terra, os blocos não se moveriam.) Como mostra a Fig. 5-14, cinco forças agem sobre os blocos:

1. A corda puxa o bloco D para a direita com uma força de módulo T.
2. A corda puxa o bloco P para cima com uma força cujo módulo também é T. Esta força para cima evita que o bloco caia livremente.

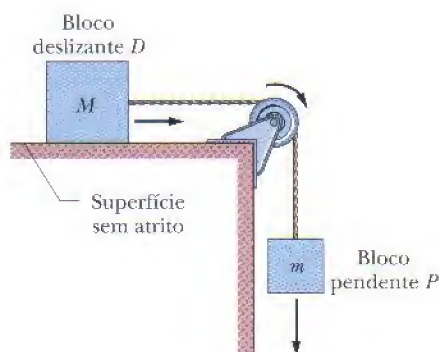


FIG. 5-13 Um bloco D de massa M está conectado a um bloco P de massa m por uma corda que passa por uma polia.

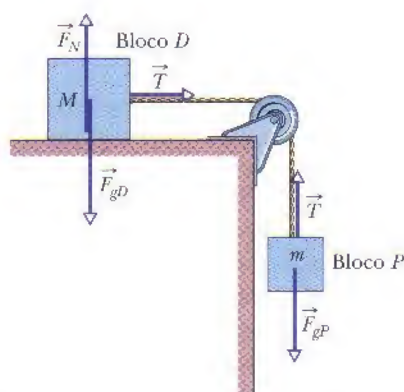


FIG. 5-14 As forças que agem sobre os dois blocos da Fig. 5-13.

3. A Terra puxa o bloco D para baixo com uma força gravitacional $\vec{F}_{gD}$, cujo módulo é Mg.
4. A Terra puxa o bloco P para baixo com uma força gravitacional $\vec{F}_{gP}$, cujo módulo é mg.
5. A mesa empurra o bloco D para cima com uma força normal $\vec{F}_N$.

Existe outra coisa digna de nota. Como estamos supondo que a corda é inextensível, se o bloco P desce 1 mm em um certo intervalo de tempo o bloco D se move 1 mm para a direita no mesmo intervalo. Isso significa que os blocos se movem em conjunto e suas acelerações têm o mesmo módulo a.

P *Como classificar esse problema? Ele sugere alguma lei da física em particular?*

Sim. O fato de que as grandezas envolvidas são forças, massas e acelerações sugere a segunda lei de Newton do movimento, $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$. Esta é a nossa **Idéia-chave** inicial.

P *Se eu aplicar a segunda lei de Newton a esse problema, a que corpo devo aplicá-la?*

Estamos lidando com o movimento de dois corpos, o bloco deslizante e o bloco pendente. Embora se trate de *corpos extensos* (não pontuais), podemos tratá-los como partículas porque todas as partes de cada bloco se movem exatamente da mesma forma. Uma segunda **Idéia-chave** é aplicar a segunda lei de Newton separadamente a cada bloco.

P *E a polia?*

A polia não pode ser tratada como uma partícula porque diferentes partes da polia se movem de modo diferente. Quando discutirmos as rotações examinaremos com detalhes o caso das polias. No momento, evitamos discutir o comportamento da polia supondo que sua massa pode ser desprezada em comparação com as massas dos dois blocos; sua única função é mudar a orientação da corda.

P *Está certo, mas como vou aplicar a equação $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$ ao bloco deslizante?*

Represente o bloco D como uma partícula de massa M e desenhe *todas* as forças que atuam *sobre* ele, como na Fig. 5-15*a*. Este é o diagrama de corpo livre do bloco. Em seguida, desenhe um conjunto de eixos. O mais natural é desenhar o eixo x paralelo à mesa, apontando para a direita, no sentido do movimento do bloco D.

P *Obrigado, mas você ainda não me disse como vou aplicar a equação $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$ ao bloco deslizante; tudo que fez foi explicar como se desenha um diagrama de corpo livre.*

Tem razão. Aqui está a terceira **Idéia-chave**: a equação $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$ é uma equação vetorial e, portanto, equivale a três equações algébricas, uma para cada componente:

$$F_{res,x} = Ma_x \quad F_{res,y} = Ma_y \quad F_{res,z} = Ma_z \tag{5-16}$$

onde $F_{res,x}$, $F_{res,y}$ e $F_{res,z}$ são as componentes da força resultante em relação aos três eixos. Podemos aplicar cada uma dessas equações à direção correspondente. Como o bloco D não possui aceleração vertical, $F_{res,y} = Ma_y$ se torna

$$F_N - F_{gD} = 0 \quad \text{ou} \quad F_N = F_{gD}.$$

Assim, na direção y o módulo da força normal é igual ao módulo da força gravitacional.

Nenhuma força atua na direção z, que é perpendicular ao papel.

Na direção x existe apenas uma componente de força, que é T. Assim, a equação $F_{res,x} = Ma_x$ se torna

$$T = Ma. \tag{5-17}$$

Como esta equação contém duas incógnitas, T e a, ainda não podemos resolvê-la. Lembre-se, porém, de que ainda não dissemos nada a respeito do bloco pendente.

P *De acordo. Como vou aplicar a equação $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$ ao bloco pendente?*

Do mesmo modo como aplicou ao bloco D: desenhe um diagrama de corpo livre para o bloco P, como na Fig. 5-16*b*. Em seguida, aplique a equação $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$ na forma de componentes. Dessa vez, como a aceleração é ao longo do eixo y, use a parte y da Eq. 5-16 ($F_{res,y} = ma_y$) para escrever

$$T - F_{gP} = ma_y.$$

Podemos agora substituir F_{gP} por mg e a_y por $-a$ (o valor é negativo porque o bloco P sofre uma aceleração no sentido negativo do eixo y). O resultado é

$$T - mg = -ma. \tag{5-18}$$

Observe que as Eqs. 5-17 e 5-18 formam um sistema de duas equações com duas incógnitas, T e a. Subtraindo essas equações, eliminamos T. Explicitando a, temos:

$$a = \frac{m}{M+m}g. \tag{5-19}$$

Substituindo este resultado na Eq. 5-17, obtemos:

$$T = \frac{Mm}{M+m}g. \tag{5-20}$$

Substituindo os valores numéricos, temos:

$$a = \frac{m}{M+m}g = \frac{2{,}1 \text{ kg}}{3{,}3 \text{ kg} + 2{,}1 \text{ kg}}(9{,}8 \text{ m/s}^2)$$
$$= 3{,}8 \text{ m/s}^2 \qquad \text{(Resposta)}$$

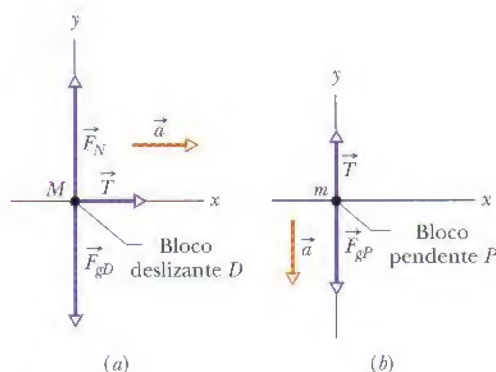


FIG. 5-15 (*a*) Diagrama de corpo livre do bloco D da Fig. 5-13. (*b*) Diagrama de corpo livre do bloco P da Fig. 5-13.

e
$$T = \frac{Mm}{M+m}g = \frac{(3{,}3 \text{ kg})(2{,}1 \text{ kg})}{3{,}3 \text{ kg} + 2{,}1 \text{ kg}}(9{,}8 \text{ m/s}^2)$$
$$= 13 \text{ N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

P *O problema agora está resolvido, certo?*

Esta é uma pergunta razoável, mas o problema não pode ser considerado resolvido até que você examine os resultados para ver se fazem sentido. (Se você obtivesse esses resultados no trabalho, não faria questão de conferi-los antes de entregá-los ao chefe?)

Examine primeiro a Eq. 5-19. Observe que está dimensionalmente correta e que a aceleração a será sempre menor que g. Isso está correto, pois o bloco pendente não está em queda livre; a corda o puxa para cima.

Examine em seguida a Eq. 5-20, que pode ser escrita na forma

$$T = \frac{M}{M+m}mg. \tag{5-21}$$

Nessa forma fica mais fácil ver que esta equação também está dimensionalmente correta, já que tanto T quanto mg têm dimensões de força. A Eq. 5-21 também mostra que a tensão na corda é sempre menor que mg e, portanto, é sempre menor que a força gravitacional a que está submetido o bloco pendente. Isso é razoável; se T fosse *maior* que mg, o bloco pendente sofreria uma aceleração para cima.

Podemos também verificar os resultados estudando casos especiais para os quais sabemos de antemão qual é a resposta. Um exemplo simples é fazer $g = 0$, como se o experimento fosse realizado no espaço sideral. Sabemos que nesse caso os blocos ficariam imóveis, não existiriam forças nas extremidades da corda e, portanto, não haveria tensão na corda. As fórmulas prevêem isso? Sim. Fazendo $g = 0$ nas Eqs. 5-19 e 5-20, encontramos $a = 0$ e $T = 0$. Dois outros casos especiais fáceis de examinar são $M = 0$ e $m \to \infty$.

Exemplo 5-5

Na Fig. 5-16*a*, uma corda puxa para cima uma caixa de biscoitos ao longo de um plano inclinado sem atrito cujo ângulo é $\theta = 30°$. A massa da caixa é $m = 5{,}00$ kg, e o módulo da força exercida pela corda é $T = 25{,}0$ N. Qual é a componente a da aceleração da caixa ao longo do plano inclinado?

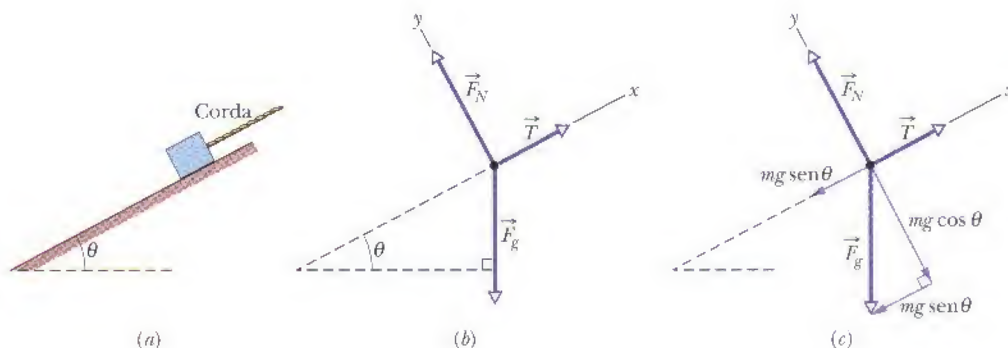


FIG. 5-16 (*a*) Uma caixa sobe um plano inclinado, puxada por uma corda. (*b*) As três forças que agem sobre a caixa: a força da corda $\vec{T}$, a força gravitacional $\vec{F}_g$ e a força normal $\vec{F}_N$. (*c*) As componentes de $\vec{F}_g$ na direção do plano inclinado e na direção perpendicular.

IDÉIA-CHAVE De acordo com a segunda lei de Newton, a aceleração ao longo do plano é estabelecida pelas componentes das forças ao longo do plano (não depende as componentes das forças perpendiculares ao plano).

Cálculo: Por conveniência, desenhamos o sistema de coordenadas e o diagrama de corpo livre da Fig. 5-16*b*. O sentido positivo do eixo x é para cima, ao longo do plano. A força $\vec{T}$ exercida pela corda é dirigida para cima, ao longo do plano, e tem um módulo $T = 25{,}0$ N. A força gravitacional $\vec{F}_g$ é para baixo e tem um módulo $mg = (5{,}00 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2) = 49{,}0$ N. Sua componente ao longo do plano é dirigida para baixo e tem um módulo mg sen θ, como mostra a Fig. 5-16*c*. (Para compreender por que essa função trigonométrica está envolvida, compare os triângulos retângulos das Figs. 5-16*b* e 5-16*c*.) Para indicar o sentido escrevemos a componente como $-mg$ sen θ. A força normal $\vec{F}_N$ é perpendicular ao plano e, portanto, não tem nenhuma influência sobre a aceleração ao longo do plano.

Escrevemos a segunda lei de Newton ($\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}$) para o movimento ao longo do eixo x na forma

$$T - mg \text{ sen } \theta = ma. \tag{5-22}$$

Substituindo os valores numéricos e explicitando a, obtemos

$$a = 0{,}100 \text{ m/s}^2, \qquad \text{(Resposta)}$$

onde o resultado positivo indica que a caixa se move para cima ao longo do plano.

Exemplo 5-6

Vamos voltar à pergunta que foi formulada no início do capítulo: qual é o fator responsável pela sensação de perigo para alguém que está no último carro de uma montanha-russa? Considere uma composição com 10 carros iguais, de massa total M, e despreze a massa dos engates. A Fig. 5-17*a* mostra a composição logo depois que o primeiro carro começou a descer uma rampa de atrito desprezível e ângulo θ. A Fig. 5-17*b* mostra a composição pouco antes de o último carro começar a descer. Qual é a aceleração da composição nas duas situações?

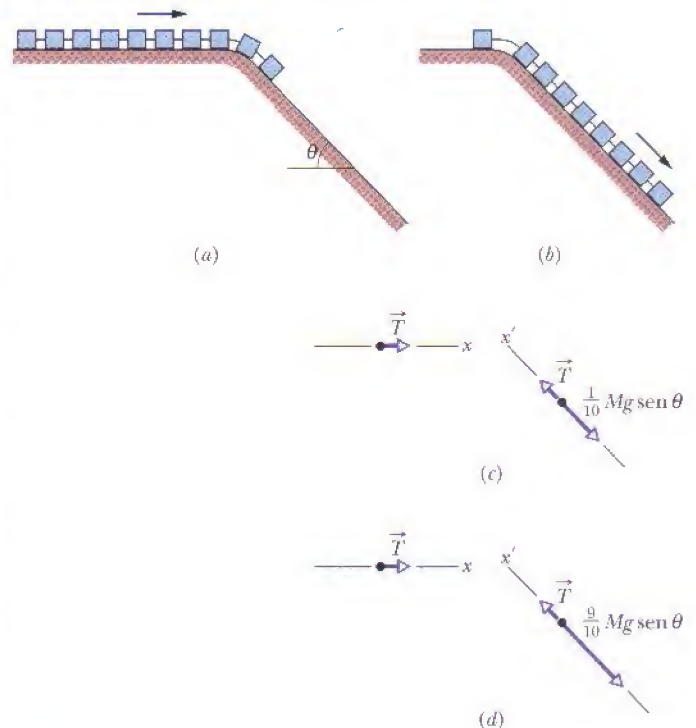


FIG. 5-17 Uma montanha-russa (*a*) com o primeiro carro na rampa e (*b*) com todos os carros na rampa, exceto o último. (*c*) Diagramas de corpo livre dos carros na horizontal e do carro na rampa, como em (*a*). (*d*) Diagrama de corpo livre para a situação mostrada em (*b*).

IDÉIAS-CHAVE (1) De acordo com a segunda lei de Newton (Eq. 5-1, $\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}$), a aceleração de um objeto é causada pela força resultante que age sobre ele. (2) Quando o movimento ocorre ao longo de um único eixo escrevemos a segunda lei de Newton na forma de uma componente (como, por exemplo, $F_{\text{res},x} = ma_x$), e levamos em conta apenas as componentes das forças em relação a esse eixo. (3) Quando vários objetos se movem juntos com a mesma velocidade e a mesma aceleração, podem ser encarados como um único objeto composto. *Forças internas* podem agir entre os objetos, mas apenas *forças externas* podem ser responsáveis pela aceleração de um objeto composto.

Cálculos para a Fig. 5-17a: A Fig. 5-17*c* mostra os diagramas de corpo livre correspondentes à situação da Fig. 5-17*a*, com eixos convenientes superpostos. O sentido positivo escolhido para o eixo inclinado x' é para cima. T é o módulo da força exercida pelo carro que está na rampa sobre os carros que ainda estão na horizontal. Como a composição é formada por 10 carros iguais de massa total M, a massa do carro que está na rampa é $M/10$, e a dos carros que estão na horizontal é $9M/10$. Apenas uma força *externa* atua sobre os nove carros que ainda estão na horizontal: a força, de módulo T, exercida, através do engate, pelo carro que está na rampa. (As forças entre os nove carros são forças internas.) Assim, a segunda lei de Newton para o movimento ao longo do eixo x ($F_{\text{res},x} = ma_x$) se torna

$$T = \tfrac{9}{10} Ma, \tag{5-23}$$

onde a é o valor absoluto da aceleração a_x ao longo do eixo x.

Ao longo do eixo inclinado x', duas forças agem sobre o carro que está na rampa: a força exercida pelo engate, de módulo T (que está orientada no sentido positivo do eixo x'), e a componente em relação a x' da força gravitacional

(que está orientada no sentido negativo do eixo x'). De acordo com o Exemplo 5-5, essa componente gravitacional é dada por $-mg$ sen θ, onde m é a massa. Como sabemos que o carro *desce* a rampa e, portanto, se move no sentido negativo do eixo x' com uma aceleração de módulo a, escrevemos a aceleração como $-a$. Assim, para este carro, de massa $M/10$, a equação da segunda lei de Newton para o movimento ao longo do eixo x' se torna

$$T - \tfrac{1}{10}Mg \text{ sen } \theta = \tfrac{1}{10}M(-a). \qquad (5\text{-}24)$$

Substituindo T pelo seu valor, dado pela Eq. 5-23, e explicitando a, obtemos:

$$a = \tfrac{1}{10}g \text{ sen } \theta. \qquad \text{(Resposta)}$$

Cálculos para a Fig. 5-17b: A Fig. 5-17*d* mostra os diagramas de corpo livre correspondentes à situação da Fig. 5-17*b*. Para o carro que ainda está na horizontal, a Eq. 5-23 deve ser substituída por

$$T = \tfrac{1}{10}Ma.$$

Para os nove carros que estão na rampa, a Eq. 5-24 deve ser substituída por

$$T - \tfrac{9}{10}Mg \text{ sen } \theta = \tfrac{9}{10}M(-a).$$

Explicitando a, obtemos:

$$a = \tfrac{9}{10}g \text{ sen } \theta. \qquad \text{(Resposta)}$$

Fator responsável pela sensação de perigo: A segunda resposta é 9 vezes maior que a primeira. Isso significa que a aceleração dos carros aumenta consideravelmente quando a maioria dos carros atinge a rampa. Este aumento da aceleração acontece para todos os carros, mas a interpretação dessa aceleração por parte dos passageiros depende do carro em que estão. No primeiro carro a aceleração sentida pelos passageiros ocorre quando o carro já está na rampa e se deve à componente da força gravitacional ao longo da rampa, o que é esperado. No último carro, por outro lado, a aceleração começa a acontecer quando o carro ainda está na horizontal e se deve à força exercida sobre os passageiros pelo encosto dos assentos. Essa força aumenta rapidamente quando o carro se aproxima da rampa, dando aos passageiros a impressão aterrorizante de que estão prestes a ser arremessados no espaço.

Exemplo 5-7 Aumente sua capacidade

A Fig. 5-18*a* mostra um arranjo no qual duas forças são aplicadas a um bloco de 4,00 kg em um piso sem atrito, mas apenas a força $\vec{F}_1$ está indicada. Essa força tem módulo fixo, mas o ângulo θ entre ela e o semi-eixo x positivo pode variar. A força $\vec{F}_2$ é horizontal e seu módulo é constante. A Fig. 5-18*b* mostra a aceleração horizontal a_x do bloco em função de θ no intervalo $0° \leq \theta \leq 90°$. Qual é o valor de a_x para $\theta = 180°$?

IDÉIAS-CHAVE (1) A aceleração horizontal a_x depende da força horizontal resultante $F_{res,x}$, dada pela segunda lei de Newton. (2) A força horizontal resultante é a soma das componentes horizontais das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$.

Cálculos: Como a força $\vec{F}_2$ é horizontal, sua componente x é F_2. A componente x de $\vec{F}_1$ é F_1 cos θ. Usando essas expressões e uma massa m de 4,00 kg podemos escrever a segunda lei de Newton ($\vec{F}_{res} = m\vec{a}$) para o movimento ao longo do eixo x na forma

$$F_1 \cos \theta + F_2 = 4{,}00a_x. \qquad (5\text{-}25)$$

Esta equação mostra que para $\theta = 90°$, F_1 cos θ é zero e $F_2 = 4{,}00a_x$. De acordo com o gráfico, a aceleração correspondente é 0,50 m/s². Assim, $F_2 = 2{,}00$ N e o sentido $\vec{F}_2$ é o sentido positivo do eixo x.

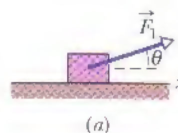
Fazendo $\theta = 0°$ na Eq. 5-25, temos:

$$F_1 \cos 0° + 2{,}00 = 4{,}00a_x. \qquad (5\text{-}26)$$

De acordo com o gráfico, a aceleração correspondente é 3,0 m/s². Substituindo este valor na Eq. 5-26, obtemos $F_1 = 10$ N.

Fazendo $F_1 = 10$ N, $F_2 = 2{,}00$ N e $\theta = 180°$ na Eq. 5-25, temos:

$$a_x = -2{,}00 \text{ m/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$



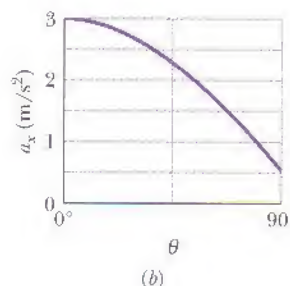


FIG. 5-18 (*a*) Uma das duas forças aplicadas a um bloco. O ângulo θ pode variar. (*b*) Componente a_x da aceleração do bloco em função de θ.

Exemplo 5-8 Aumente sua capacidade

Na Fig. 5-19*a* um passageiro de massa $m = 72{,}2$ kg está de pé em uma balança no interior de um elevador. Estamos interessados nas leituras da balança quando o elevador está parado e quando está se movendo para cima e para baixo.

(a) Escreva uma equação para a leitura da balança em função da aceleração vertical do elevador.

IDÉIAS-CHAVE (1) A leitura é igual ao módulo da força normal $\vec{F}_N$ que a balança exerce sobre o passageiro. Como mostra o diagrama de corpo livre da Fig. 5-19*b*, a única outra força que age sobre o passageiro é a força gravitacional $\vec{F}_g$. (2) Podemos relacionar as forças que agem sobre o passageiro à aceleração $\vec{a}$ usando a segunda lei de Newton ($\vec{F}_{res} = m\vec{a}$). Lembre-se, porém, de que esta lei só se aplica aos referenciais inerciais. Um elevador acelerado *não é* um referencial inercial. Assim, escolhemos o solo como referencial e analisamos todos os movimentos em relação a este referencial.

Cálculos: Como as duas forças e a aceleração a que o passageiro está sujeito são verticais, na direção do eixo y da Fig. 5-19*b*, podemos usar a segunda lei de Newton para as componentes y ($F_{res,y} = ma$) e escrever

$$F_N - F_g = ma$$

ou

$$F_N = F_g + ma. \qquad (5\text{-}27)$$

Isto nos diz que a leitura da balança, que é igual a F_N, depende da aceleração vertical. Substituindo F_g por mg, obtemos

$$F_N = m(g + a) \quad \text{(Resposta)} \qquad (5\text{-}28)$$

para qualquer valor da aceleração a.

(b) Qual é a leitura da balança se o elevador está parado ou está se movendo para cima com uma velocidade constante de 0,50 m/s?

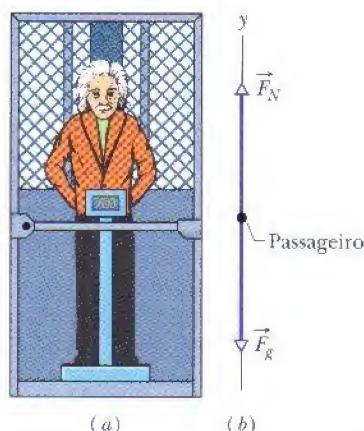


FIG. 5-19 (*a*) Um passageiro está em pé em uma balança que indica o seu peso ou o seu peso aparente. (*b*) O diagrama de corpo livre do passageiro, mostrando a força normal $\vec{F}_N$ exercida sobre ele pela balança e a força gravitacional $\vec{F}_g$.

IDÉIA-CHAVE Para qualquer velocidade constante (zero ou diferente de zero), a aceleração do passageiro é zero.

Cálculo: Substituindo este e outros valores conhecidos na Eq. 5-28, obtemos

$$F_N = (72{,}2 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2 + 0) = 708 \text{ N}. \quad \text{(Resposta)}$$

Este é o peso do passageiro, e é igual ao módulo F_g da força gravitacional a que está submetido.

(c) Qual é a leitura da balança se o elevador sofre uma aceleração para cima de 3,20 m/s²? Qual é a leitura se o elevador sofre uma aceleração para baixo de 3,20 m/s²?

Cálculos: Para $a = 3{,}20$ m/s², a Eq. 5-28 nos dá

$$F_N = (72{,}2 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2 + 3{,}20 \text{ m/s}^2) = 939 \text{ N}, \quad \text{(Resposta)}$$

e para $a = -3{,}20$ m/s², ela nos dá

$$F_N = (72{,}2 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2 - 3{,}20 \text{ m/s}^2) = 477 \text{ N}. \quad \text{(Resposta)}$$

Se a aceleração é para cima (ou seja, se a velocidade do elevador para cima está aumentando ou se a velocidade para baixo está diminuindo), a leitura da balança é maior que o peso do passageiro. Essa leitura é uma medida do peso aparente, pois é realizada em um referencial não-inercial. Se a aceleração é para baixo (ou seja, se a velocidade do elevador para cima está diminuindo ou a velocidade para baixo está aumentando), a leitura da balança é menor que o peso do passageiro.

(d) Durante a aceleração para cima do item (c), qual é o módulo F_{res} da força resultante a que está submetido o passageiro e qual é o módulo $a_{p,el}$ da aceleração do passageiro no referencial do elevador? A equação $\vec{F}_{res} = m\vec{a}_{p,el}$ é obedecida?

Cálculo: O módulo F_g da força gravitacional a que está submetido o passageiro não depende da sua aceleração; assim, de acordo com o item (b), $F_g = 708$ N. De acordo com o item (c), o módulo F_N da força normal a que está submetido o passageiro durante a aceleração para cima é o valor de 939 N indicado pela balança. Assim, a força resultante a que o passageiro está submetido é

$$F_{res} = F_N - F_g = 939 \text{ N} - 708 \text{ N} = 231 \text{ N}, \quad \text{(Resposta)}$$

durante a aceleração para cima. Entretanto, a aceleração do passageiro em relação ao elevador, $a_{p,el}$, é zero. Assim, no referencial não-inercial do elevador acelerado F_{res} não é igual a $ma_{p,el}$, e a segunda lei de Newton não é obedecida.

Exemplo 5-9 Aumente sua capacidade

Na Fig. 5-20*a*, uma força horizontal constante $\vec{F}_{ap}$ de módulo 20 N é aplicada a um bloco *A* de massa $m_A = 4{,}0$ kg, que empurra um bloco *B* de massa $m_B = 6{,}0$ kg. O bloco desliza sobre uma superfície sem atrito, ao longo de um eixo *x*.

(a) Qual é a aceleração dos blocos?

Erro Grave: Como a força $\vec{F}_{ap}$ é aplicada diretamente ao bloco *A*, usamos a segunda lei de Newton para relacionar essa força à aceleração $\vec{a}$ do bloco *A*. Como o movimento é ao longo do eixo *x*, usamos a lei para as componentes *x* ($F_{res,x} = ma_x$), escrevendo

$$F_{ap} = m_A a.$$

Este raciocínio está errado, porque $\vec{F}_{ap}$ não é a única força horizontal a que o bloco *A* está sujeito; existe também a força $\vec{F}_{AB}$, exercida pelo bloco *B* (Fig. 5-20*b*).

Solução Frustrada: Vamos incluir a força $\vec{F}_{AB}$ escrevendo, novamente para o eixo *x*,

$$F_{ap} - F_{AB} = m_A a.$$

(Usamos o sinal negativo para indicar o sentido de $\vec{F}_{AB}$.) Como F_{AB} é uma segunda incógnita, não podemos resolver esta equação para determinar o valor de *a*.

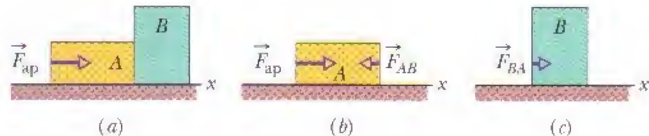


FIG. 5-20 (*a*) Uma força horizontal constante $\vec{F}_{ap}$ é aplicada ao bloco *A*, que empurra o bloco *B*. (*b*) Duas forças horizontais agem sobre o bloco *A*. (*c*) Apenas uma força horizontal age sobre o bloco *B*.

Solução Correta: Por causa do sentido de aplicação da força $\vec{F}_{ap}$, os dois blocos se movem como se fossem um só. Podemos usar a segunda lei de Newton para relacionar a força aplicada *ao conjunto dos dois blocos* à aceleração *do conjunto dos dois blocos* através da segunda lei de Newton. Assim, considerando apenas o eixo *x*, podemos escrever:

$$F_{ap} = (m_A + m_B)a,$$

onde agora a força aplicada $\vec{F}_{ap}$ está relacionada corretamente à massa total $m_A + m_B$. Explicitando *a* e substituindo os valores conhecidos, obtemos:

$$a = \frac{F_{ap}}{m_A + m_B} = \frac{20\text{ N}}{4{,}0\text{ kg} + 6{,}0\text{ kg}} = 2{,}0\text{ m/s}^2. \quad \text{(Resposta)}$$

Assim, a aceleração do sistema (e dos dois blocos) é no sentido positivo do eixo *x* e tem um módulo de 2,0 m/s².

(b) Qual é a força (horizontal) $\vec{F}_{BA}$ exercida pelo bloco *A* sobre o bloco *B* (Fig. 5-20*c*)?

IDÉIA-CHAVE Podemos usar a segunda lei de Newton para relacionar a força exercida sobre o bloco *B* à aceleração do bloco.

Cálculo: Neste caso, considerando apenas o eixo *x*, podemos escrever:

$$F_{BA} = m_B a,$$

que, substituindo os valores conhecidos, nos dá

$$F_{BA} = (6{,}0\text{ kg})(2{,}0\text{ m/s}^2) = 12\text{ N}. \quad \text{(Resposta)}$$

Assim, a $\vec{F}_{BA}$ é orientada no sentido positivo do eixo *x* e tem um módulo de 12 N.

REVISÃO E RESUMO

Mecânica Newtoniana A velocidade de um objeto pode variar (o objeto pode sofrer uma aceleração) quando o objeto é submetido a uma ou mais **forças** (empurrões ou puxões) exercidas por outros objetos. A *mecânica newtoniana* relaciona acelerações e forças.

Força As forças são grandezas vetoriais. Seus módulos são definidos em termos da aceleração que imprimiriam a uma massa de um quilograma. Por definição, uma força que produz uma aceleração de 1 m/s² em uma massa de 1 kg tem um módulo de 1 newton (1 N). A orientação de uma força é a orientação da aceleração produzida pela força. Duas ou mais forças podem ser combinadas segundo as regras da álgebra vetorial. A **força resultante** é a soma de todas as forças que agem sobre um corpo.

Primeira Lei de Newton Quando a força resultante que age sobre um corpo é zero, o corpo permanece em repouso ou se move em linha reta com velocidade escalar constante.

Referenciais Inerciais Os referenciais para os quais as leis de Newton são válidas são chamados de *referenciais inerciais*. Os referenciais para os quais as leis de Newton não são válidas são chamados de *referenciais não-inerciais*.

Massa A **massa** de um corpo é a propriedade do corpo que relaciona a aceleração do corpo à força responsável pela aceleração. A massa é uma grandeza escalar.

Segunda Lei de Newton A força resultante $\vec{F}_{res}$ que age sobre um corpo de massa *m* está relacionada à aceleração $\vec{a}$ do corpo através da equação

$$\vec{F}_{res} = m\vec{a}, \qquad (5\text{-}1)$$

que pode ser escrita em termos de suas componentes:

$$F_{res,x} = ma_x \quad F_{res,y} = ma_y \quad \text{e} \quad F_{res,z} = ma_z. \qquad (5\text{-}2)$$

De acordo com a segunda lei, em unidades do SI,

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2. \qquad (5\text{-}3)$$

O **diagrama de corpo livre** é um diagrama simplificado no qual apenas um corpo é considerado. Esse corpo é representado por um ponto ou por um símbolo. As forças externas que agem sobre o corpo são representadas por vetores e um sistema de coordenadas é superposto ao desenho, orientado de modo a simplificar a solução.

Algumas Forças Especiais A **força gravitacional** $\vec{F}_g$ exercida sobre um corpo é um tipo especial de atração que um segundo corpo exerce sobre o primeiro. Na maioria das situações apresentadas neste livro o segundo corpo é a Terra ou outro astro. No caso da Terra, a força é orientada para baixo, em direção ao solo, que é considerado um referencial inercial. O módulo de $\vec{F}_g$ é

$$F_g = mg, \qquad (5\text{-}8)$$

onde m é a massa do corpo e g é o módulo da aceleração em queda livre.

O **peso** P de um corpo é o módulo da força para cima necessária para equilibrar a força gravitacional a que o corpo está sujeito. O peso de um corpo está relacionado à sua massa através da equação

$$P = mg. \qquad (5\text{-}12)$$

A **força normal** $\vec{F}_N$ é a força exercida sobre um corpo pela superfície na qual o corpo está apoiado. A força normal é sempre perpendicular à superfície.

A **força de atrito** $\vec{f}$ é a força exercida sobre um corpo quando o corpo desliza ou tenta deslizar sobre uma superfície. A força é sempre paralela à superfície e tem o sentido oposto ao do deslizamento. Em uma *superfície ideal*, a força de atrito é desprezível.

Quando uma corda está sob **tensão**, cada extremidade da corda exerce uma força sobre um corpo. A força é orientada ao longo da corda, para longe do ponto onde a corda está presa ao corpo. No caso de uma *corda sem massa* (uma corda de massa desprezível) as tensões nas duas extremidades da corda têm o mesmo módulo T, mesmo que a corda passe por uma *polia sem massa e sem atrito* (uma polia de massa desprezível e cujo eixo tem um atrito desprezível).

Terceira Lei de Newton Se um corpo C aplica a um corpo B uma força $\vec{F}_{LC}$, o corpo B aplica ao corpo C uma força $\vec{F}_{CL}$ tal que

$$\vec{F}_{LC} = -\vec{F}_{CL}.$$

PERGUNTAS

1 Na Fig. 5-21 as forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são aplicadas a uma caixa que desliza com velocidade constante sobre uma superfície sem atrito. Diminuímos o ângulo θ sem mudar o módulo de $\vec{F}_1$. Para manter a caixa deslizando com velocidade constante devemos aumentar, diminuir ou manter inalterado o módulo de $\vec{F}_2$?

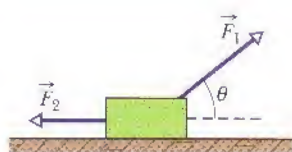


FIG. 5-21 Pergunta 1.

2 No instante $t = 0$, uma força $\vec{F}$ constante começa a atuar sobre uma pedra que se move no espaço sideral no sentido positivo do eixo x. (a) Para $t > 0$, quais são as possíveis funções $x(t)$ para a posição da pedra: (1) $x = 4t - 3$, (2) $x = -4t^2 + 6t - 3$, (3) $x = 4t^2 + 6t - 3$? (b) Para que função $\vec{F}$ tem o sentido contrário ao do movimento inicial da pedra?

3 A Fig. 5-22 mostra vistas superiores de quatro situações nas quais forças atuam sobre um bloco que está em um piso sem atrito. Se os módulos das forças forem escolhidos apropriadamente, em que situações é possível que o bloco esteja (a) em repouso e (b) se movendo com velocidade constante?

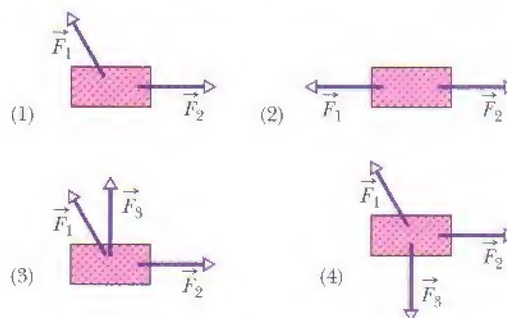


FIG. 5-22 Pergunta 3.

4 Duas forças horizontais,

$$\vec{F}_1 = (3 \text{ N})\hat{\imath} - (4 \text{ N})\hat{\jmath} \;\; \text{e} \;\; \vec{F}_2 = -(1 \text{ N})\hat{\imath} - (2 \text{ N})\hat{\jmath}$$

puxam uma banana split no balcão sem atrito de uma lanchonete. Sem usar uma calculadora, determine quais dos vetores do diagrama de corpo livre da Fig. 5-23 representam melhor (a) $\vec{F}_1$ e (b) $\vec{F}_2$. Qual é a componente da força resultante ao longo (c) do eixo x e (d) do eixo y? Para que quadrantes os vetores (e) da força resultante e (f) da aceleração da sobremesa apontam?

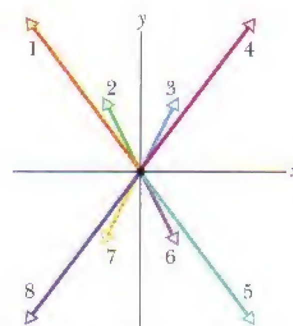


FIG. 5-23 Pergunta 4.

5 A Fig. 5-24 mostra o diagrama de corpo livre de quatro situações nas quais um objeto, visto de cima, é puxado por várias forças em um piso sem atrito. Em quais dessas situações a aceleração $\vec{a}$ do objeto possui (a) uma componente x e (b) uma componente y? (c) Em cada situação, indique o sentido de $\vec{a}$ indicando um quadrante ou um sentido ao longo de um eixo. (Isso pode ser feito com alguns cálculos mentais.)

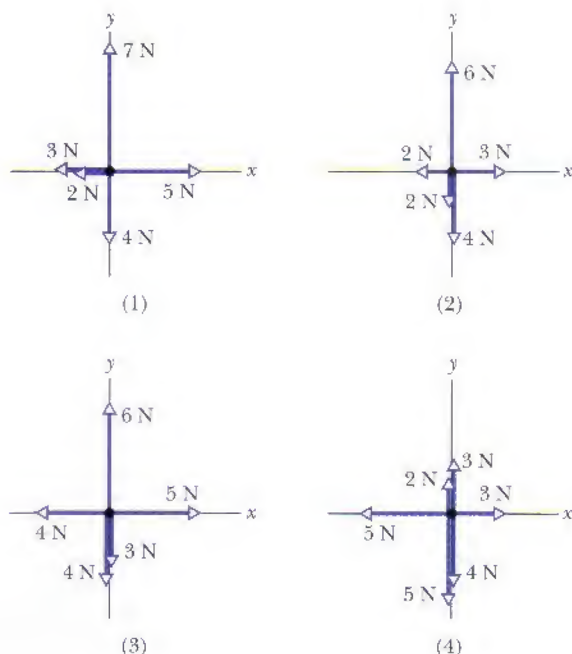


FIG. 5-24 Pergunta 5.

6 A Fig. 5-25 mostra três gráficos da componente de uma velocidade $v_x(t)$ e três gráficos da componente $v_y(t)$. Os gráficos não estão em escala. Que gráfico de $v_x(t)$ e que gráfico de $v_y(t)$ correspondem melhor a cada uma das situações da Pergunta 5 (Fig. 5-24)?

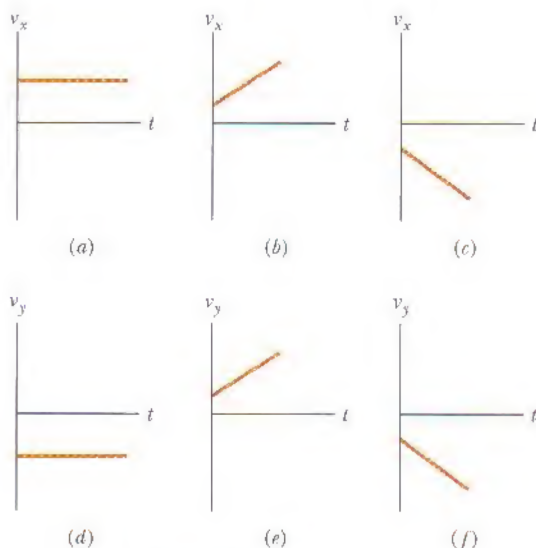


FIG. 5-25 Pergunta 6.

7 A Fig. 5-26 mostra um conjunto de quatro blocos sendo puxados por uma força $\vec{F}$ em um piso sem atrito. Que massa total é acelerada para a direita (a) pela força $\vec{F}$, (b) pela corda 3 e (c) pela corda 1? (d) Ordene os blocos de acordo com a aceleração, começando pela maior. (e) Ordene as cordas de acordo com a tensão, começando pela maior. (Aquecimento para os Problemas 50 e 51.)

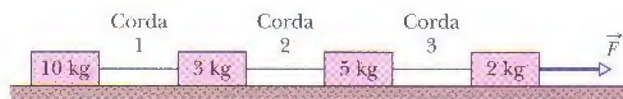


FIG. 5-26 Pergunta 7.

8 A Fig. 5-27 mostra uma caixa em quatro situações nas quais forças horizontais são aplicadas. Ordene as situações de acordo com o módulo da aceleração da caixa, começando pelo maior.

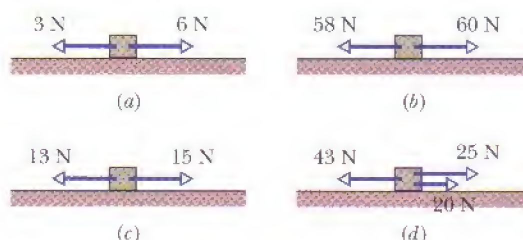


FIG. 5-27 Pergunta 8.

9 Uma força vertical $\vec{F}$ é aplicada a um bloco de massa m que está sobre um piso. O que acontece com o módulo da força normal $\vec{F}_N$ que o piso exerce sobre o bloco quando o módulo de $\vec{F}$ aumenta a partir de zero, se a força $\vec{F}$ aponta (a) para baixo e (b) para cima?

10 A Fig. 5-28 mostra quatro opções para a orientação de uma força de módulo F a ser aplicada a um bloco que se encontra sobre um plano inclinado. A força pode ser horizontal ou vertical. (No caso das opções a e b a força não é suficiente para levantar o bloco, afastando-o da superfície.) Ordene as opções de acordo com o módulo da força normal exercida pelo plano sobre o bloco, começando pela maior.

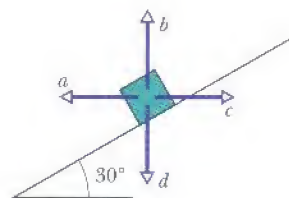


FIG. 5-28 Pergunta 10.

11 Kansas City, 17 de julho de 1981. O hotel Hyatt Regency, recém-inaugurado, recebe centenas de pessoas que escutam e dançam sucessos da década de 1940 ao som de uma banda. Muitas dessas pessoas se aglomeram nas passarelas que se estendem como pontes por cima do grande saguão. De repente, duas passarelas cedem, caindo sobre a multidão.

As passarelas eram sustentadas por hastes verticais e mantidas no lugar por porcas atarraxadas nas hastes. No projeto original seriam usadas apenas duas hastes compridas, presas ao teto, que sustentariam as três passarelas (Fig. 5-29a). Se cada passarela e as pessoas que encontram sobre ela têm uma massa total M, qual é a massa total sustentada por duas porcas que estão (a) na passarela de baixo e (b) na passarela de cima?

Como não é possível atarraxar uma porca em uma haste a não ser nas extremidades, o projeto foi modificado. Em vez de duas hastes foram usadas seis, duas presas ao teto e quatro ligando passarelas vizinhas (Fig. 5-29*b*). Qual é agora a massa total sustentada por duas porcas que estão (c) na passarela de baixo, (d) no lado de cima da passarela de cima e (e) no lado de baixo da passarela de cima? Foi este projeto modificado que causou a tragédia.

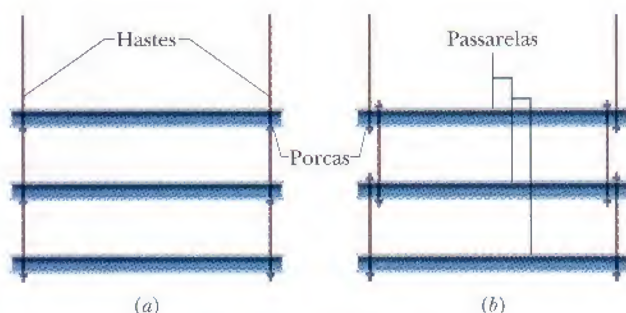


FIG. 5-29 Pergunta 11.

12 A Fig. 5-30 mostra três blocos sendo empurrados sobre um piso sem atrito por uma força horizontal $\vec{F}$. Que massa total é acelerada para a direita (a) pela força $\vec{F}$, (b) pela força $\vec{F}_{21}$ exercida pelo bloco 1 sobre o bloco 2 e (c) pela força $\vec{F}_{32}$ exercida pelo bloco 2 sobre o bloco 3? (d) Ordene os blocos de acordo com o módulo da aceleração, começando pelo maior. (e) Ordene as forças $\vec{F}$, $\vec{F}_{21}$ e $\vec{F}_{32}$ de acordo com o módulo, começando pelo maior. (Aquecimento para o Problema 53.)

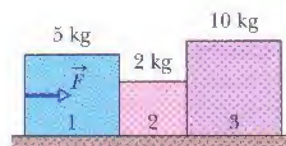


FIG. 5-30 Pergunta 12.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 5-6 A Segunda Lei de Newton

•1 Se um corpo-padrão de 1 kg tem uma aceleração de 2,00 m/s^2 a 20,0° com o semi-eixo x positivo, quais são (a) a componente x e (b) a componente y da força resultante a que o corpo está submetido e (c) qual é a força resultante em termos dos vetores unitários?

•2 Duas forças horizontais agem sobre um bloco de madeira de 2,0 kg que pode deslizar sem atrito na bancada de uma cozinha, situada em um plano xy. Uma das forças é $\vec{F}_1 = (3{,}0\text{ N})\hat{i} + (4{,}0\text{ N})\hat{j}$. Determine a aceleração do bloco em termos dos vetores unitários se a outra força é (a) $\vec{F}_2 = (-3{,}0\text{ N})\hat{i} + (-4{,}0\text{ N})\hat{j}$, (b) $\vec{F}_2 = (-3{,}0\text{ N})\hat{i} + (4{,}0\text{ N})\hat{j}$ e (c) $\vec{F}_2 = (3{,}0\text{ N})\hat{i} + (-4{,}0\text{ N})\hat{j}$.

•3 Apenas duas forças horizontais atuam em um corpo de 3,0 kg que pode se mover em um piso sem atrito. Uma força é de 9,0 N e aponta para o leste; a outra é de 8,0 N e atua a 62° ao norte do oeste. Qual é o módulo da aceleração do corpo?

••4 Um objeto de 2,00 kg está sujeito a três forças, que lhe imprimem uma aceleração $\vec{a} = -(8{,}00\text{ m/s}^2)\hat{i} + (6{,}00\text{ m/s}^2)\hat{j}$. Se duas das três forças são $\vec{F}_1 = (30{,}0\text{ N})\hat{i} + (16{,}0\text{ N})\hat{j}$ e $\vec{F}_2 = -(12{,}0\text{ N})\hat{i} + (8{,}00\text{ N})\hat{j}$, determine a terceira força.

••5 Duas forças agem sobre a caixa de 2,00 kg vista de cima na Fig. 5-31, mas apenas uma é mostrada. Para $F_1 = 20{,}0$ N, $a = 12{,}0$ m/s^2 e $\theta = 30{,}0°$, determine a segunda força (a) em termos dos vetores unitários e como um (b) módulo e (c) um ângulo em relação ao semi-eixo x positivo.

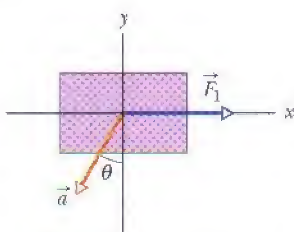


FIG. 5-31 Problema 5.

••6 Sob a ação de duas forças, uma partícula se move com velocidade constante $\vec{v} = (3\text{ m/s})\hat{i} - (4\text{ m/s})\hat{j}$. Uma das forças é $\vec{F}_1 = (2\text{ N})\hat{i} + (-6\text{ N})\hat{j}$. Qual é a outra?

••7 Três astronautas, impulsionados por mochilas a jato, empurram e guiam um asteróide de 120 kg em direção a uma base de manutenção, exercendo as forças mostradas na Fig. 5-32, com $F_1 = 32$ N, $F_2 = 55$ N, $F_3 = 41$ N, $\theta_1 = 30°$ e $\theta_3 = 60°$. Determine a aceleração do asteróide (a) em termos dos vetores unitários e como um (b) módulo e (c) um ângulo em relação ao semi-eixo x positivo.

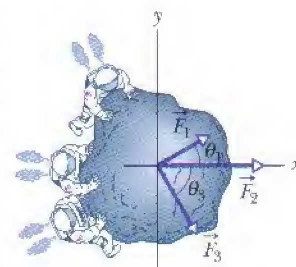


FIG. 5-32 Problema 7.

••8 Em um cabo-de-guerra bidimensional, Alexandre, Bárbara e Carlos puxam horizontalmente um pneu de automóvel nas orientações mostradas na vista superior da Fig. 5.33. Apesar dos esforços da trinca, o pneu permanece no mesmo lugar. Alexandre puxa com uma força $\vec{F}_A$ de módulo 220 N e Carlos puxa com uma força $\vec{F}_C$ de módulo 170 N. Observe que a orientação de $\vec{F}_C$ não é dada. Qual é o módulo da força $\vec{F}_B$ exercida por Bárbara?

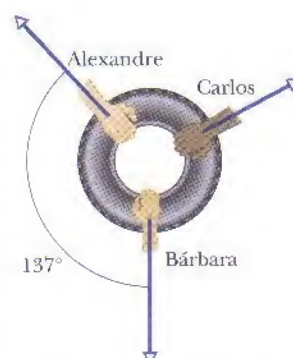


FIG. 5-33 Problema 8.

••9 Uma partícula de 2,0 kg se move ao longo de um eixo x sob a ação de uma força variável. A posição da partícula é dada por $x = 3{,}0\text{ m} + (4{,}0\text{ m/s})t + ct^2 - (2{,}0\text{ m/s}^3)t^3$, com x em metros e t em segundos. O fator c é uma constante. No instante $t = 3{,}0$ s a força que age sobre a partícula tem um módulo de 36 N e aponta no sentido negativo do eixo x. Qual é o valor de c?

••10 Uma partícula de 0,150 kg se move ao longo de um eixo x de acordo com a equação $x(t) = -13{,}00 + 2{,}00t + 4{,}00t^2 - 3{,}00t^3$, com x em metros e t em segundos. Em termos dos vetores unitários, qual é a força resultante a que está submetida a partícula no minstante $t = 3{,}40$ s?

••11 Uma partícula de 0,340 kg se move no plano xy de acordo com as equações $x(t) = -15{,}00 + 2{,}00t - 4{,}00t^3$ e $y(t) = 25{,}00 + 7{,}00t - 9{,}00t^2$, com x e y em metros e t em segundos. No instante $t = 0{,}700$ s, quais são (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação ao semi-eixo x positivo) da força resultante a que está submetida a partícula e (c) qual é o ângulo da direção de movimento da partícula?

•••12 Duas forças horizontais $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ agem sobre um disco de 4,0 kg que desliza sem atrito sobre o gelo, no qual foi desenhado um sistema de coordenadas xy. A força $\vec{F}_1$ aponta no sentido positivo do eixo x e tem um módulo de 7,0 N. A força $\vec{F}_2$ tem um módulo de 9,0 N. A Fig. 5-34 mostra a componente v_x da velocidade do disco em função do tempo t. Qual é o ângulo entre as orientações constantes das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$?

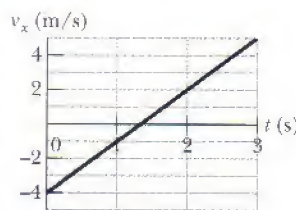


FIG. 5-34 Problema 12.

seção 5-7 Algumas Forças Especiais

•13 (a) Um salame de 11,0 kg está pendurado por uma corda em uma balança de mola, que está presa ao teto por outra corda (Fig. 5-35a). Qual é a leitura da balança, cuja escala está em unidades de peso? (b) Na Fig. 5-35b o salame está suspenso por uma corda que passa por uma roldana e está presa a uma balança de mola. A extremidade oposta da balança está presa a uma parede por outra corda. Qual é a leitura da balança? (c) Na Fig. 5-35c a parede foi substituída por um segundo salame de 11,0 kg e o sistema está em repouso. Qual é a leitura da balança?

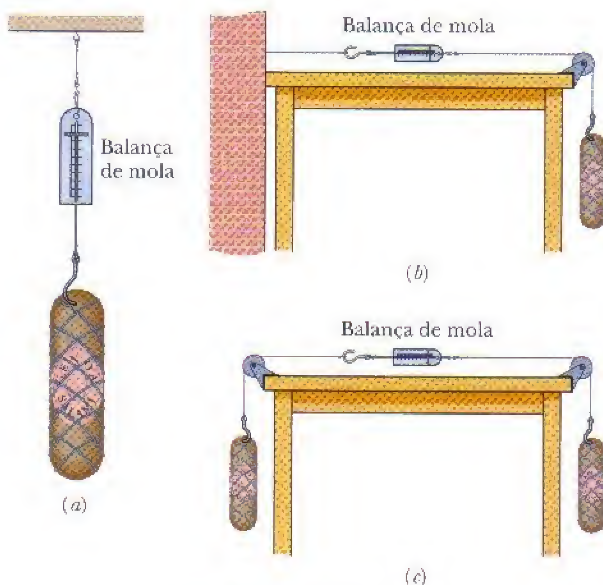


FIG. 5-35 Problema 13.

•14 Um bloco com um peso de 3,0 N está em repouso em uma superfície horizontal. Uma força para cima de 1,0 N é aplicada ao corpo através de uma mola vertical. Quais são (a) o módulo e (b) o sentido da força exercida pelo bloco sobre a superfície horizontal?

•15 A Fig. 5-36 mostra um arranjo no qual quatro discos estão suspensos por cordas. A corda mais comprida, no alto, passa por uma polia sem atrito e exerce uma força de 98 N sobre a parede à qual está presa. As tensões nas cordas mais curtas são $T_1 = 58{,}8$ N, $T_2 = 49{,}0$ N e $T_3 = 9{,}8$ N. Quais são as massas (a) do disco A, (b) do disco B, (c) do disco C e (d) do disco D?

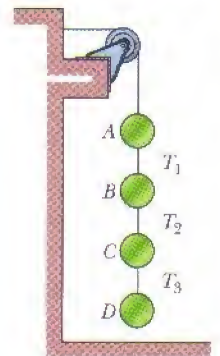


FIG. 5-36 Problema 15.

••16 Alguns insetos podem se deslocar pendurados em gravetos. Suponha que um desses insetos tenha massa m e esteja pendurado em um graveto horizontal, como mostra a Fig. 5-37, com um ângulo $\theta = 40°$. As seis pernas do inseto estão sob a mesma tensão e as seções das pernas mais próximas do corpo são horizontais. (a) Qual é a razão entre a tensão em cada tíbia (parte dianteira da perna) e o peso do inseto? (b) Se o inseto estica um pouco as pernas, a tensão em cada tíbia aumenta, diminui ou continua a mesma?

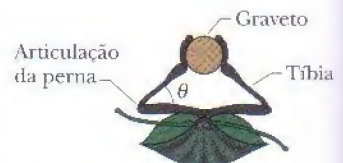


FIG. 5-37 Problema 16.

seção 5-9 Aplicando as Leis de Newton

•17 Um homem está sentado em um brinquedo de parque de diversões no qual uma cabina é acelerada para baixo, no sentido negativo do eixo y, com uma aceleração cujo módulo é $1{,}24g$, com $g = 9{,}80\text{ m/s}^2$. Uma moeda de 0,567 g repousa no joelho do homem. Depois que a cabina começa a se mover e em termos dos vetores unitários, qual é a aceleração da moeda (a) em relação ao solo e (b) em relação ao homem? (c) Quanto tempo a moeda leva para chegar ao teto da cabina, 2,20 m acima do joelho? Em termos dos vetores unitários, qual é (d) a força a que está submetida a moeda e (e) a força aparente a que está submetida a moeda do ponto de vista do homem?

•18 Tarzan, que pesa 820 N, salta de um rochedo na ponta de um cipó de 20,0 m que está preso ao galho de uma árvore e faz inicialmente um ângulo de 22,0° com a vertical. Suponha que um eixo x é traçado horizontalmente a partir da borda do rochedo e que um eixo y é traçado verticalmente para cima. Imediatamente após Tarzan pular da encosta a tensão no cipó é 760 N. Neste instante, quais são (a) a força do cipó sobre Tarzan em termos dos vetores unitários, a força resultante sobre Tarzan (b) em termos dos vetores unitários e como (c) módulo e (d) ângulo em relação ao sentido positivo do eixo x? Quais são (e) o módulo e (f) o ângulo da aceleração de Tarzan nesse instante?

•19 Na Fig. 5-38, a massa do bloco é 8,5 kg e o ângulo θ é 30°. Determine (a) a

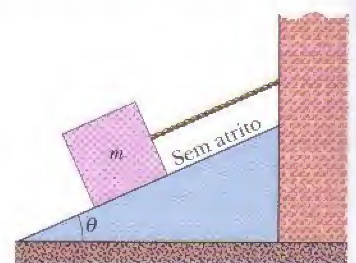


FIG. 5-38 Problema 19.

tensão na corda e (b) a força normal que age sobre o bloco. (c) Determine o módulo da aceleração do bloco se a corda for cortada.

•**20** Existem duas forças horizontais atuando na caixa de 2,0 kg, mas a vista superior da Fig. 5-39 mostra apenas uma (de módulo F_1 = 20 N). A caixa se move ao longo do eixo x. Para cada um dos valores da aceleração a_x da caixa, determine a segunda força em termos dos vetores unitários: (a) 10 m/s², (b) 20 m/s², (c) 0, (d) −10 m/s² e (e) −20 m/s².



FIG. 5-39 Problema 20.

•**21** Uma força horizontal constante $\vec{F}_a$ empurra um pacote dos correios de 2,00 kg sobre um piso sem atrito onde um sistema de coordenadas xy foi desenhado. A Fig. 5-40 mostra as componentes x e y da velocidade do pacote em função do tempo t. Quais são (a) o módulo e (b) a orientação de $\vec{F}_a$?

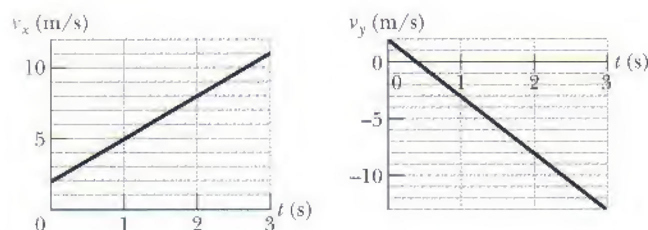


FIG. 5-40 Problema 21.

•**22** Em 4 de abril de 1974 John Massis, da Bélgica, conseguiu puxar dois vagões de passageiros mordendo um freio preso por uma corda aos vagões e se inclinando para trás com as pernas apoiadas nos dormentes da ferrovia. Os vagões pesavam 700 kN (cerca de 80 toneladas). Suponha que ele tenha puxado com uma força constante de módulo 2,5 vezes maior que o seu peso e ângulo θ de 30° com a horizontal. Sua massa era de 80 kg, e ele fez os vagões se deslocarem de 1,0 m. Desprezando as forças de atrito, determine a velocidade dos vagões quando Massis parou de puxar.

•**23** *Propulsão solar.* Um "veleiro solar" é uma nave espacial com uma grande vela que é empurrada pela luz do sol. Embora esse empurrão seja fraco em circunstâncias normais, ele pode ser suficiente para afastar a nave do sol em uma viagem gratuita, mas muito lenta. Suponha que a espaçonave tenha uma massa de 900 kg e receba um empurrão de 20 N. (a) Qual é o módulo da aceleração resultante? Se a nave parte do repouso, (b) que distância percorre em um dia e (c) qual é a velocidade no final do dia?

•**24** A tensão para a qual uma linha de pescar arrebenta é chamada de "resistência" da linha. Qual é a resistência mínima necessária para que a linha faça parar um salmão de 85 N de peso em 11 cm se o peixe está inicialmente se deslocando a 2,8 m/s? Considere uma desaceleração constante.

•**25** Um trenó-foguete de 500 kg pode ser acelerado por uma força constante do repouso até 1600 km/h em 1,8 s. Qual é o módulo da força?

•**26** Um carro a 53 km/h se choca com um pilar de uma ponte. Um passageiro do carro se desloca para a frente de uma distância de 65 cm (em relação à estrada) até ser imobilizado por um airbag inflado. Qual é o módulo da força (suposta constante) que atua sobre o tronco do passageiro, que tem uma massa de 41 kg?

•**27** Um bombeiro que pesa 712 N escorrega por um poste vertical com uma aceleração de 3,00 m/s², dirigida para baixo. Quais são (a) o módulo e (b) a orientação da força vertical exercida pelo poste sobre o bombeiro e (c) o módulo e (d) a orientação da força vertical exercida pelo bombeiro sobre o poste?

•**28** Os ventos violentos de um tornado podem fazer com que pequenos objetos fiquem encravados em árvores, paredes de edifícios e até mesmo placas de sinalização de metal. Em uma simulação de laboratório um palito comum de madeira foi disparado por um canhão pneumático em um galho de carvalho. A massa do palito era 0,13 g, sua velocidade antes de penetrar no galho era 220 m/s e a profundidade de penetração foi 15 mm. Se o palito sofreu uma desaceleração constante, qual foi o módulo da força exercida pelo galho sobre o palito?

•**29** Um elétron com uma velocidade de $1,2 \times 10^7$ m/s penetra horizontalmente em uma região onde está sujeito a uma força vertical constante de $4,5 \times 10^{-16}$ N. A massa do elétron é $9,11 \times 10^{-31}$ kg. Determine a deflexão vertical sofrida pelo elétron enquanto percorre uma distância horizontal de 30 mm.

•**30** Um carro que pesa $1,30 \times 10^4$ N está se movendo a 40 km/h quando os freios são aplicados, fazendo o carro parar depois de percorrer 15 m. Supondo que a força aplicada pelo freio é constante, determine (a) o módulo da força e (b) o tempo necessário para o carro parar. Se a velocidade inicial for dobrada e o carro experimentar a mesma força durante a frenagem, por que fatores são multiplicados (c) a distância até o carro parar e (d) o tempo necessário para o carro parar? (Isto poderia ser uma lição sobre o perigo de dirigir em altas velocidades.)

••**31** A velocidade de uma partícula de 3,00 kg é dada por $\vec{v} = (8{,}00t\hat{i} + 3{,}00t^2\hat{j})$ m/s, com o tempo t em segundos. No instante em que a força resultante que age sobre a partícula tem um módulo de 35,0 N, quais são as orientações (em relação ao sentido positivo do eixo x) (a) da força resultante e (b) do movimento da partícula?

••**32** Na Fig. 5-41, um caixote de massa m = 100 kg é empurrado por uma força horizontal $\vec{F}$ que o faz subir uma rampa sem atrito (θ = 30,0°) com velocidade constante. Quais são os módulos de (a) de $\vec{F}$ e (b) da força que a rampa exerce sobre o caixote?

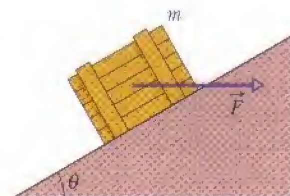


FIG. 5-41 Problema 32.

••**33** Uma moça de 40 kg e um trenó de 8,4 kg estão sobre a superfície sem atrito de um lago congelado, separados por uma distância de 15 m, mas unidos por uma corda de massa desprezível. A moça exerce uma força horizontal de 5,2 N sobre a corda. Quais são os módulos das acelerações (a) do trenó e (b) da moça? (c) A que distância da posição inicial da moça eles se tocam?

••**34** A Fig. 5-42 mostra uma vista superior de um disco de 0,0250 kg sobre uma mesa sem atrito e duas das três forças que agem sobre o disco. A força $\vec{F}_1$ tem um módulo de 6,00 N e um ângulo θ_1 = 30,0°. A força $\vec{F}_2$ tem um módulo de 7,00 N e um ângulo θ_2 = 30,0°. Em termos dos vetores unitários, qual é a terceira força se o disco (a) está em repouso, (b) tem uma velocidade constante $\vec{v} = (13{,}0\hat{i} - 14{,}0\hat{j})$ m/s e (c) tem uma velocidade variável $\vec{v} = (13{,}0t\hat{i} - 14{,}0t\hat{j})$ m/s², onde t é o tempo?

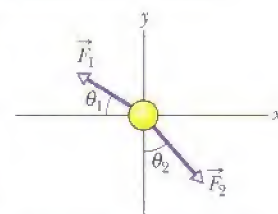


FIG. 5-42 Problema 34.

••35 Um bloco começa a subir um plano inclinado sem atrito com uma velocidade inicial $v_0 = 3{,}50$ m/s. O ângulo do plano inclinado é $\theta = 32{,}0°$. (a) Que distância vertical o bloco consegue subir? (b) Quanto tempo o bloco leva para atingir esta altura? (c) Qual é a velocidade do bloco ao chegar de volta ao ponto de partida?

••36 Um esquiador de 40 kg desce uma rampa sem atrito que faz um ângulo de 10° com a horizontal. Suponha que o esquiador se desloca no sentido negativo de um eixo x orientado ao longo da rampa. O vento exerce uma força sobre o esquiador de componente F_x. Quanto vale F_x se o módulo da velocidade do esquiador (a) é constante, (b) aumenta a uma taxa de 1,0 m/s^2 e (c) aumenta a uma taxa de 2,0 m/s^2?

••37 Uma esfera com uma massa de $3{,}0 \times 10^{-4}$ kg está suspensa por uma corda. Uma brisa horizontal constante empurra a esfera de tal forma que a corda faz um ângulo de 37° com a vertical. Determine (a) a força da brisa sobre a bola e (b) a tensão da corda.

••38 Uma caixa com uma massa de 5,00 kg sobe uma rampa sem atrito que faz um ângulo θ com a horizontal. A Fig. 5-43 mostra, em função do tempo t, a componente v_x da velocidade da caixa ao longo de um eixo x orientado para cima ao longo da rampa. Qual é o módulo da força normal que a rampa exerce sobre a caixa?

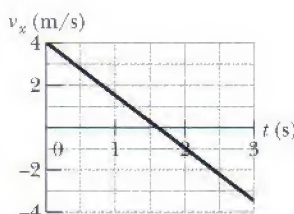


FIG. 5-43 Problema 38.

••39 Um elevador e sua carga têm uma massa total de 1600 kg. Determine a tensão do cabo de sustentação quando o elevador, que estava descendo a 12 m/s, é levado ao repouso com aceleração constante em uma distância de 42 m.

••40 Um esquiador de 50 kg é puxado para o alto de uma encosta segurando um cabo que se move paralelamente à encosta, que faz um ângulo de 8,0° com a horizontal. Qual é o módulo F_{cabo} da força que o cabo exerce sobre o esquiador se (a) o módulo v da velocidade do esquiador é constante e igual a 2,0 m/s e (b) v aumenta a uma taxa de 0,10 m/s^2?

••41 Um elevador que pesa 27,8 kN move-se para cima. Qual é a tensão no cabo do elevador se a velocidade (a) está aumentando a uma taxa de 1,22 m/s^2 e (b) está diminuindo a uma taxa de 1,22 m/s^2?

••42 Uma lâmpada está pendurada verticalmente por um fio em um elevador que desce com uma desaceleração de 2,4 m/s^2. (a) Se a tensão do fio é 89 N, qual é a massa da lâmpada? (b) Qual é a tensão no fio quando o elevador sobe com uma aceleração de 2,4 m/s^2?

••43 Usando um cabo que arrebentará se a tensão exceder 387 N, você precisa baixar uma caixa de telhas velhas com um peso de 449 N a partir de um ponto a 6,1 m acima do chão. (a) Qual é o módulo da aceleração da caixa que coloca o cabo na iminência de arrebentar? (b) Com esta aceleração, qual é a velocidade da caixa ao atingir o chão?

••44 Um elevador é puxado para cima por um cabo. A cabine e seu único ocupante têm uma massa total de 2000 kg. Quando o ocupante deixa cair uma moeda, sua aceleração em relação à cabine é de 8,00 m/s^2 para baixo. Qual é a tensão do cabo?

••45 Na Fig. 5-44, uma corrente composta por cinco elos, cada um com massa 0,100 kg, é erguida verticalmente com uma aceleração constante de módulo a = 2,50 m/s^2. Determine o módulo (a) da força sobre o elo 1 exercida pelo elo 2, (b) da força sobre o elo 2 exercida pelo elo 3, (c) da força sobre o elo 3 exercida pelo elo 4 e (d) da força sobre o elo 4 exercida pelo elo 5. Determine o módulo (e) da força $\vec{F}$ sobre o elo 5 exercida pela pessoa que está levantando a corrente e (f) a força *resultante* que acelera cada elo.

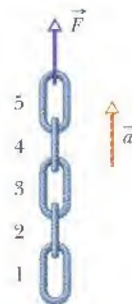


FIG. 5-44 Problema 45.

••46 Na Fig. 5-45 os elevadores A e B estão ligados por um cabo e podem ser levantados ou baixados por outro cabo que está acima do elevador A. A massa do elevador A é de 1700 kg; a massa do elevador B é de 1300 kg. O piso do elevador A sustenta uma caixa de gatária de 12 kg. A tensão do cabo que liga os elevadores é $1{,}91 \times 10^4$ N. Qual é o módulo da força normal que o piso do elevador A exerce sobre a caixa?

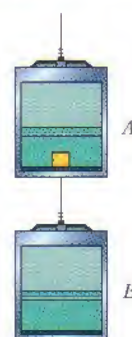


FIG. 5-45 Problema 46.

••47 Na Fig. 5-46, um bloco de massa m = 5,00 kg é puxado ao longo de um piso horizontal sem atrito por uma corda que exerce uma força de módulo F = 12,0 N e ângulo $\theta = 25{,}0°$. (a) Qual é o módulo da aceleração do bloco? (b) O módulo da força F é aumentado lentamente. Qual é o seu valor imediatamente antes de o bloco perder contato com o piso? (c) Qual é o módulo da aceleração do bloco na situação do item (b)?

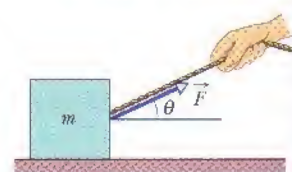


FIG. 5-46 Problemas 47 e 62.

••48 No passado, cavalos puxavam barcaças em canais da forma mostrada na Fig. 5-47. Suponha que o cavalo puxe o cabo com uma força de módulo 7900 N e ângulo $\theta = 18°$ em relação à direção do movimento da barcaça, que se desloca no sentido positivo de um eixo x. A massa da barcaça é de 9500 kg e o módulo de sua aceleração é 0,12 m/s^2. Quais são (a) o módulo e (b) a orientação (em relação ao sentido positivo do eixo x) da força exercida pela água sobre a barcaça?

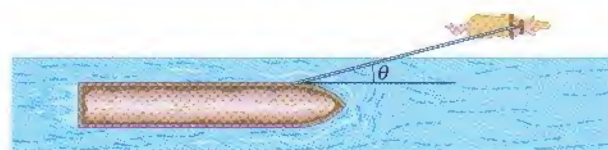


FIG. 5-47 Problema 48.

••49 A família Zacchini ficou famosa pelos números de circo em que um membro da família era disparado de um canhão com a ajuda de elásticos ou ar comprimido. Em uma versão do número, Emanuel Zacchini foi disparado por cima de três rodas gigantes e aterrissou em uma rede, na mesma altura que a boca do canhão, a 69 m de distância. Ele foi impulsionado dentro do cano por uma distância de 5,2 m e lançado com um ângulo de 53°. Se sua massa era de 85 kg e ele sofreu uma aceleração constante no interior do cano, qual foi o módulo da força responsável pelo lançamento?

(*Sugestão:* Trate o lançamento como se acontecesse ao longo de uma rampa de 53°. Despreze a resistência do ar.)

••50 A Fig. 5-48 mostra quatro pingüins que estão sendo puxados sobre gelo muito escorregadio (sem atrito) por um zelador. As massas de três pingüins e a tensão em duas das cordas são m_1 = 12 kg, m_3 = 15 kg, m_4 = 20 kg, T_2 = 111 N e T_4 = 222 N. Determine a massa do pingüim m_2, que não é dada.



FIG. 5-48 Problema 50.

••51 Na Fig. 5-49, três blocos conectados são puxados para a direita sobre uma mesa horizontal sem atrito por uma força de módulo T_3 = 65,0 N. Se m_1 = 12,0 kg, m_2 = 24,0 kg e m_3 = 31,0 kg, calcule (a) o módulo da aceleração do sistema, (b) a tensão T_1 e (c) a tensão T_2.

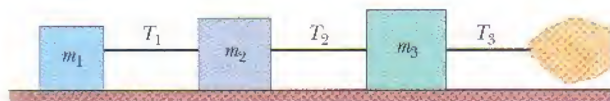


FIG. 5-49 Problema 51.

••52 Na Fig. 5-50*a*, uma força horizontal constante $\vec{F}_a$ é aplicada ao bloco *A*, que empurra um bloco *B* com uma força de 20,0 N dirigida horizontalmente para a direita. Na Fig. 5-50*b*, a mesma força $\vec{F}_a$ é aplicada ao bloco *B*; desta vez, o bloco *A* empurra o bloco *B* com uma força de 10,0 N dirigida horizontalmente para a esquerda. Os blocos têm uma massa total de 12,0 kg. Quais são os módulos (a) da aceleração na Fig. 5-50*a* e (b) da força $\vec{F}_a$?

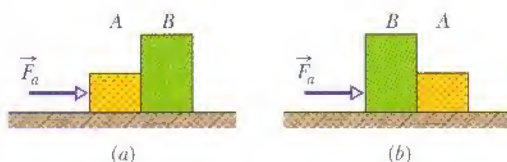


FIG. 5-50 Problema 52.

••53 Dois blocos estão em contato em uma mesa sem atrito. Uma força horizontal é aplicada ao bloco maior, como mostra a Fig. 5-51. (a) Se m_1 = 2,3 kg, m_2 = 1,2 kg e *F* = 3,2 N, determine o módulo da força entre os dois blocos. (b) Mostre que se uma força de mesmo módulo *F* for aplicada ao menor dos blocos no sentido oposto, o módulo da força entre os blocos será 2,1 N, que não é o mesmo valor calculado no item (a). (c) Explique a razão da diferença.

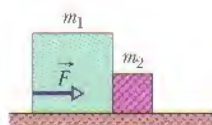


FIG. 5-51 Problema 53.

••54 Na Fig. 5-52, três caixas são conectadas por cordas, uma das quais passa por uma polia de atrito e massa desprezíveis. As massas são m_A = 30,0 kg, m_B = 40,0 kg e m_C = 10,0 kg. Quando o conjunto é liberado a partir do repouso, (a) qual é a tensão da corda que liga *B* a *C* e (b) que distância *A* percorre nos primeiros 0,250 s (supondo que não atinge a polia)?

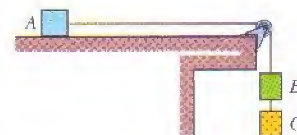


FIG. 5-52 Problema 54.

••55 A Fig. 5-53 mostra dois blocos ligados por uma corda (de massa desprezível) que passa por uma polia sem atrito (também de massa desprezível). O conjunto é conhecido como *máquina de Atwood*. Um bloco tem massa m_1 = 1,3 kg; o outro tem massa m_2 = 2,8 kg. Quais são (a) o módulo da aceleração dos blocos e (b) a tensão na corda?

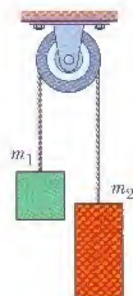


FIG. 5-53 Problemas 55 e 63.

••56 No arremesso de peso, muitos atletas preferem lançar o peso com um ângulo menor que o teórico (cerca de 42°) para o qual a distância é máxima para um peso arremessado com a mesma velocidade e da mesma altura. Uma razão tem a ver com a velocidade que o atleta pode imprimir ao peso durante a fase de aceleração do arremesso. Suponha que um peso de 7.260 kg é acelerado ao longo de uma trajetória reta com 1,650 m de comprimento por uma força constante de módulo 380,0 N, começando com uma velocidade de 2,500 m/s (devido ao movimento preparatório do atleta). Qual é a velocidade do peso no final da fase de aceleração se o ângulo entre a trajetória e a horizontal é (a) 30,00° e (b) 42,00°? (*Sugestão:* Trate o movimento como se fosse ao longo de uma rampa com o ângulo dado.) (c) Qual é a redução percentual da velocidade de lançamento se o atleta aumenta o ângulo de 30,00° para 42,00°?

••57 Um macaco de 10 kg sobe em uma árvore por uma corda de massa desprezível que passa por um galho sem atrito e está presa na outra extremidade em uma caixa de 15 kg, inicialmente em repouso no solo Fig. 5-54. (a) Qual é o módulo da menor aceleração que o macaco deve ter para levantar a caixa do solo? Se, após a caixa ter sido erguida, o macaco pára de subir e se agarra à corda, quais são (b) o módulo e (c) a orientação da aceleração do macaco e (d) a tensão da corda?

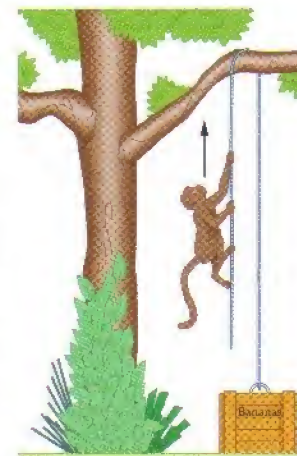


FIG. 5-54 Problema 57.

••58 Um homem de 85 kg desce de uma altura de 10,0 m em relação ao solo segurando em uma corda que passa por uma roldana sem atrito e está presa na outra extremidade a um saco de areia de 65 kg. Com que velocidade o homem atinge o solo se ele partiu do repouso?

••59 Um bloco de massa m_1 = 3,70 kg sobre um plano sem atrito inclinado, de ângulo θ = 30,0°, está preso por uma corda de massa desprezível, que passa por uma polia de massa e atrito desprezíveis, a um outro bloco de massa m_2 = 2,30 kg (Fig. 5-55). Quais são (a) o módulo

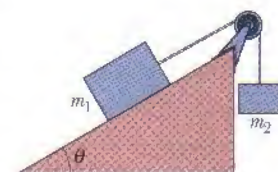


FIG. 5-55 Problema 59.

da aceleração de cada bloco, (b) a orientação da aceleração do bloco que está pendurado e (c) a tensão da corda?

••60 A Fig. 5-56 mostra um homem sentado em uma cadeira presa a uma corda de massa desprezível que passa por uma roldana de massa e atrito desprezíveis e desce de volta às mãos do homem. A massa total do homem e da cadeira é 95,0 kg. Qual o módulo da força com a qual o homem deve puxar a corda para que a cadeira suba (a) com velocidade constante e (b) com uma aceleração para cima de 1,30 m/s²? (*Sugestão:* Um diagrama de corpo livre pode ajudar bastante.)



FIG. 5-56 Problema 60.

Se no lado direito a corda se estende até o solo e é puxada por outra pessoa, qual o módulo da força com a qual essa pessoa deve puxar a corda para que o homem suba (c) com velocidade constante e (d) com uma aceleração para cima de 1,30 m/s²? Qual é o módulo da força que a polia exerce sobre o teto (e) no item a, (f) no item b, (g) no item c e (h) no item d?

••61 Um balão de ar quente de massa M desce verticalmente com uma aceleração para baixo de módulo a. Que massa (lastro) deve ser jogada para fora para que o balão tenha uma aceleração para cima de módulo a? Suponha que a força vertical para cima do ar quente sobre o balão não muda com a perda de massa.

••62 A Fig. 5-46 mostra um bloco de 5,00 kg sendo puxado em um piso sem atrito por uma corda que aplica uma força de módulo constante de 20,0 N e um ângulo $\theta(t)$ que varia com o tempo. Quando o ângulo θ chega a 25°, qual é a taxa de variação da aceleração do bloco se (a) $\theta(t) = (2{,}00 \times 10^{-2}$ graus/s$)t$ e (b) $\theta(t) = -(2{,}00 \times 10^{-2}$ graus/s$)t$? (*Sugestão:* Transforme os graus em radianos.)

•••63 A Fig. 5-53 mostra uma *máquina de Atwood*, na qual dois recipientes estão ligados por uma corda (de massa desprezível) que passa por uma polia sem atrito (também de massa desprezível). No instante $t = 0$ o recipiente 1 tem uma massa de 1,30 kg e o recipiente 2 tem uma massa de 2,80 kg, mas o recipiente 1 está perdendo massa (por causa de um vazamento) a uma taxa constante de 0,200 kg/s. Com que taxa o módulo da aceleração dos recipientes está variando (a) em $t = 0$ e (b) em $t = 3{,}00$ s? (c) Em que instante a aceleração atinge o valor máximo?

•••64 Um arremessador de peso lança um peso de 7,260 kg empurrando-o ao longo de uma linha reta com 1,650 m de comprimento e um ângulo de 34,10° com a horizontal, acelerando o peso até a velocidade de lançamento de 2,500 m/s (que se deve ao movimento preparatório do atleta). O peso deixa a mão do arremessador a uma altura de 2,110 m e com um ângulo de 34,10°, e percorre uma distância horizontal de 15,90 m. Qual é o módulo da força média que o atleta exerce sobre o peso durante a fase de aceleração? (*Sugestão:* Trate o movimento durante a fase de aceleração como se fosse ao longo de uma rampa com o ângulo dado.)

•••65 A Fig. 5-57 mostra três blocos ligados por cordas que passam por polias sem atrito. O bloco B está sobre uma mesa sem atrito; as massas são $m_A = 6{,}00$ kg, $m_B = 8{,}00$ kg e $m_C = 10{,}0$ kg. Quando os blocos são liberados qual é a tensão da corda da direita?

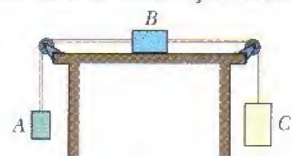


FIG. 5-57 Problema 65.

•••66 A Fig. 5-58 mostra uma caixa de massa $m_2 = 1{,}0$ kg sobre um plano inclinado sem atrito de ângulo $\theta = 30°$. Ela está ligada por uma corda de massa desprezível a uma caixa de massa $m_1 = 3{,}0$ kg sobre uma superfície horizontal sem atrito. A polia não tem atrito e sua massa é desprezível. (a) Se o módulo da força horizontal $\vec{F}$ é 2,3 N, qual é a tensão da corda? (b) Qual é o maior valor que o módulo de $\vec{F}$ pode ter sem que a corda fique frouxa?

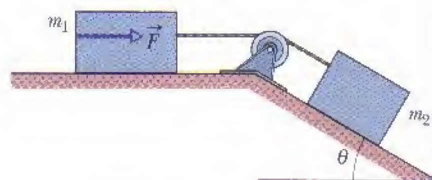


FIG. 5-58 Problema 66.

•••67 A Fig. 5-59 mostra, em função do tempo, a componente F_x da força que age sobre um bloco de gelo de 3,0 kg que pode se deslocar apenas ao longo do eixo x. Em $t = 0$ o bloco está se movendo no sentido positivo do eixo, com uma velocidade de 3,0 m/s. Quais são (a) o módulo de sua velocidade e (b) o sentido de seu movimento em $t = 11$ s?

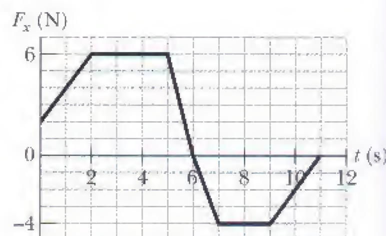


FIG. 5-59 Problema 67.

•••68 A Fig. 5-60 mostra parte de um teleférico. A massa máxima permitida de cada cabina com passageiros é de 2800 kg. As cabinas, que estão penduradas em um cabo de sustentação, são puxadas por um segundo cabo ligado à torre de sustentação de cada cabina. Suponha que os cabos estão esticados e inclinados de um ângulo $\theta = 35°$. Qual é a diferença entre as tensões de partes vizinhas do cabo que puxa as cabines se as cabinas estão com a máxima massa permitida e estão sendo aceleradas para cima a 0,81 m/s²?



FIG. 5-60 Problema 68.

Problemas Adicionais

69 *Cuidado com as unidades!* No curso de física os professores vão esperar que você use as unidades corretas ao resolver os problemas. Alguns estudantes não prestam atenção nas unidades, confiando que no final tudo vai dar certo. Este exemplo, baseado em fatos reais, pode servir de alerta para quem trata as unidades com displicência.

Em 23 de julho de 1983, o vôo 143 da Air Canada estava sendo preparado para uma longa viagem de Montreal a Edmonton quando os tripulantes pediram ao pessoal de terra para calcular a quantidade de combustível que já estava disponível nos tanques. Os tripulantes sabiam que o avião precisava começar a viagem com 22.300 quilogramas de combustível. O valor estava especificado em quilogramas porque o Canadá havia mudado recentemente para o sistema métrico; até então, o combustível era medido em libras. O pessoal de terra, que só podia medir o combustível em litros, respondeu que havia 7682 litros

nos tanques. Para poder calcular que quantidade precisava ser acrescentada, os tripulantes perguntaram ao pessoal de terra qual era o fator de conversão de litros para quilos de combustível. A resposta foi 1,77, número que os tripulantes usaram (1,77 kg de querosene de aviação correspondendo a 1 L). (a) Quantos quilogramas de combustível a tripulação achou que havia nos tanques? (Neste problema, suponha que todos os dados são exatos.) (b) Quantos litros a tripulação achou que tinham que ser acrescentados?

Infelizmente, a resposta do pessoal de terra se baseou em hábitos anteriores à implantação do sistema métrico: 1,77 era o fator de conversão de litros para *libras* de combustível (1,77 lb correspondendo a 1 L). (c) Quantos quilos de combustível havia realmente nos tanques? (Exceto no caso do fator de 1,77, use quatro algarismos significativos em todos os cálculos.) (d) Quantos litros adicionais de combustível eram realmente necessários? (e) Quando o avião partiu de Montreal, que porcentagem do combustível necessário estava levando?

A caminho de Edmonton, a uma altitude de 7,9 quilômetros, o combustível acabou e o avião começou a cair. Embora o avião estivesse sem energia, o piloto conseguiu fazer o avião descer planando. Como o aeroporto operacional mais próximo estava longe demais para ser alcançado dessa forma, o piloto dirigiu o avião para um aeroporto antigo, já desativado.

Infelizmente, esse aeroporto tinha sido convertido para corridas de automóveis, e havia uma barreira de aço atravessando a pista. Por sorte, no momento da aterrissagem o trem de pouso da frente quebrou, fazendo o nariz do avião tocar na pista. O atrito reduziu a velocidade do avião, fazendo com que parasse a poucos metros da barreira de aço, sob os olhares petrificados dos pilotos de corrida e dos espectadores. Todos os passageiros e tripulantes escaparam incólumes. A moral da história é a seguinte: tome cuidado com as unidades.

70 As duas únicas forças que agem sobre um corpo têm módulos de 20 N e 35 N e direções que diferem de 80°. A aceleração resultante tem um módulo de 20 m/s². Qual é a massa do corpo?

71 A Fig. 5-61 é uma vista superior de um pneu de 12 kg que está sendo puxado por três cordas horizontais. A força de uma das cordas (F_1 = 50 N) está indicada. As outras duas forças devem ser orientadas de tal forma que o módulo a da aceleração do pneu seja o menor possível. Qual é o menor valor de a se (a) F_2 = 30 N, F_3 = 20 N; (b) F_2 = 30 N, F_3 = 10 N; (c) F_2 = F3 = 30 N?

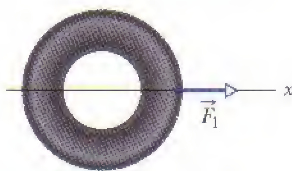


FIG. 5-61 Problema 71.

72 Um bloco de massa M é puxado ao longo de uma superfície horizontal sem atrito por uma corda de massa m, como mostra a Fig. 5-62. Uma força horizontal $\vec{F}$ age sobre uma das extremidades da corda. (a) Mostre que a corda *deve* ficar frouxa, mesmo que imperceptivelmente. Supondo que a curvatura da corda seja desprezível, determine (b) a aceleração da corda e do bloco, (c) a força da corda sobre o bloco e (d) a tensão na corda no seu ponto médio.

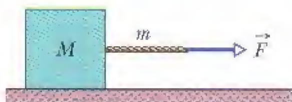


FIG. 5-62 Problema 72.

73 Um operário arrasta uma caixa no piso de uma fábrica, puxando-a por uma corda. O operário exerce uma força de módulo F = 450 N sobre a corda, que está inclinada de um ângulo θ = 38° em relação à horizontal, e o chão exerce uma força horizontal de módulo f = 125 N que se opõe ao movimento. Calcule o módulo da aceleração da caixa (a) se sua massa é 310 kg e (b) se seu peso é 310 N.

74 Três forças atuam sobre uma partícula que se move com velocidade constante $\vec{v} = (2\text{ m/s})\hat{i} - (7\text{ m/s})\hat{j}$. Duas das forças são $\vec{F}_1 = (2\text{ N})\hat{i} + (3\text{ N})\hat{j} + (-2\text{ N})\hat{k}$ e $\vec{F}_2 = (-5\text{ N})\hat{i} + (8\text{ N})\hat{j} + (-2\text{ N})\hat{k}$. Qual é a terceira força?

75 Um artista de circo de 52 kg deve descer escorregando por uma corda que arrebentará se a tensão exceder 425 N. (a) O que acontece se o artista fica parado, pendurado na corda? (b) Para que módulo de aceleração a corda está prestes a arrebentar?

76 Um homem de 80 kg salta para um pátio de concreto de uma janela 0,50 m acima do pátio. Ele não dobra os joelhos para amortecer o impacto com o chão, levando 2,0 cm para parar. (a) Qual é a aceleração média desde o instante em que seus pés tocam o pátio até o instante em que ele pára? (b) Qual é o módulo da força média que o pátio exerce sobre o homem?

77 Na Fig. 5-63, o bloco A de 4,0 kg e o bloco B de 6,0 kg estão conectados por uma corda de massa desprezível. A força $\vec{F}_A = (12\text{ N})\hat{i}$ atua sobre o bloco A; a força $\vec{F}_B = (24\text{ N})\hat{i}$ atua sobre o bloco B. Qual é a tensão na corda?

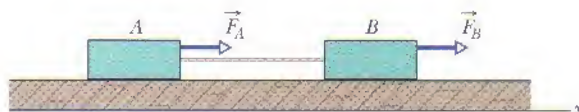


FIG. 5-63 Problema 77.

78 Na vista superior da Fig. 5-64, cinco forças puxam uma caixa de massa m = 4,0 kg. Os módulos das forças são F_1 = 11 N, F_2 = 17 N, F_3 = 3,0 N, F_4 = 14 N e F_5 = 5,0 N; o ângulo θ_4 é 30°. Determine a aceleração da caixa (a) em termos dos vetores unitários e como (b) um módulo e (c) um ângulo em relação ao sentido positivo do eixo x.

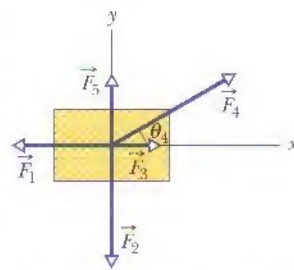


FIG. 5-64 Problema 78.

79 Uma certa força dá a um objeto de massa m_1 uma aceleração de 12,0 m/s² e a um objeto de massa m_2 uma aceleração de 3,30 m/s². Que aceleração essa mesma força daria a um objeto de massa (a) $m_2 - m_1$ e (b) $m_2 + m_1$?

80 Imagine uma espaçonave prestes a aterrissar na superfície de Calisto, uma das luas de Júpiter. Se o motor fornece uma força para cima (empuxo) de 3260 N, a espaçonave desce com velocidade constante; se o motor fornece apenas 2200 N, a espaçonave desce com uma aceleração de 0,39 m/s². (a) Qual é o peso da espaçonave nas vizinhanças da superfície de Calisto? (b) Qual é a massa da aeronave? (c) Qual é o módulo da aceleração em queda livre próximo à superfície de Calisto?

81 Um objeto está pendurado em uma balança de mola presa ao teto de um elevador. A balança indica 65 N quando o elevador está parado. Qual é a leitura da balança quando o elevador está subindo (a) com velocidade constante de 7,6 m/s e (b) com uma velocidade de 7,6 m/s e uma desaceleração de 2,4 m/s²?

82 Na Fig. 5-66, uma força $\vec{F}$ de módulo 12 N é aplicada a uma caixa de massa m_2 = 1,0 kg. A força é dirigida para cima, paralelamente a um plano inclinado de ângulo θ = 37°. A caixa está ligada

por uma corda a outra caixa de massa $m_1 = 3,0$ kg, situada sobre o piso. O plano inclinado, o piso e a polia não têm atrito e as massas da polia e da corda são desprezíveis. Qual é a tensão da corda?

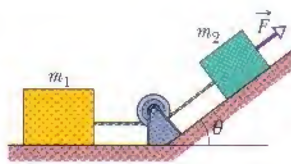


FIG. 5-65 Problema 82.

83 Uma certa partícula tem um peso de 22 N em um ponto onde $g = 9,8$ m/s². Quais são (a) o peso e (b) a massa da partícula em um ponto onde $g = 4,9$ m/s²? Quais são (c) o peso e (d) a massa da partícula se ela é deslocada para um ponto do espaço onde $g = 0$?

84 Calcule o peso de um astronauta de 75 kg (a) na Terra, (b) em Marte, onde $g = 3,7$ m/s², e (c) no espaço sideral, onde $g = 0$. (d) Qual é a massa do astronauta em cada um desses lugares?

85 Uma turbina a jato de 1400 kg é presa à fuselagem de um avião comercial por apenas três parafusos (esta é a prática comum). Suponha que cada parafuso suporta um terço da carga. (a) Calcule a força a que cada parafuso é submetido enquanto o avião está parado na pista, aguardando permissão para decolar. (b) Durante o vôo, o avião encontra uma turbulência que provoca uma aceleração brusca para cima de 2,6 m/s². Calcule a força a que é submetido cada parafuso durante essa aceleração.

86 Uma pessoa de 80 kg salta de pára-quedas e experimenta uma aceleração para baixo de 2,5 m/s². A massa do pára-quedas é de 5,0 kg. (a) Qual é a força para cima que o ar exerce sobre o pára-quedas? (b) Qual é a força que a pessoa exerce sobre o pára-quedas?

87 Suponha que na Fig. 5-13 as massas dos blocos são 2,0 kg e 4,0 kg. (a) Qual dessas massas deve ser a do bloco pendurado para que a aceleração seja a maior possível? Quais são nesse caso (b) o módulo da aceleração e (c) a tensão da corda?

88 Você puxa um pequeno refrigerador com uma força constante $\vec{F}$ em um piso encerado (sem atrito), com $\vec{F}$ na horizontal (caso 1) ou com $\vec{F}$ inclinada para cima de um ângulo θ (caso 2). (a) Qual é a razão entre a velocidade do refrigerador no caso 2 e a velocidade no caso 1 se você o puxa por um certo tempo t? (b) Qual é essa razão se você o puxa ao longo de uma certa distância d?

89 Uma espaçonave decola verticalmente da Lua, onde $g = 1,6$ m/s². Se a nave tem uma aceleração vertical para cima de 1,0 m/s² na decolagem, qual é o módulo da força exercida pela nave sobre o piloto, que pesa 735 N na Terra?

90 Calcule a aceleração inicial para cima de um foguete de massa $1,3 \times 10^4$ kg se a força inicial para cima produzida pelos motores (empuxo) é $2,6 \times 10^5$ N. Não despreze a força gravitacional a que o foguete está submetido.

91 A Fig. 5-66*a* mostra um móbile pendurado no teto; ele é composto por duas peças de metal ($m_1 = 3,5$ kg e $m_2 = 4,5$ kg), ligadas por cordas de massa desprezível. Qual é a tensão (a) da corda de baixo e (b) da corda de cima? A Fig. 5-66*b* mostra um móbile composto de três peças metálicas. Duas das massas são $m_3 = 4,8$ kg e $m_5 = 5,5$ kg. A tensão da corda de cima é 199 N. Qual é a tensão (c) da corda de baixo e (d) da corda do meio?

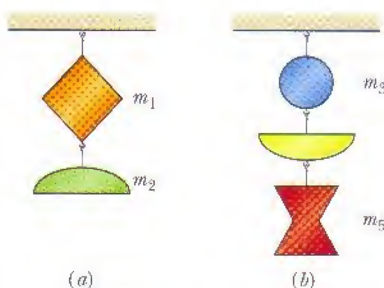


FIG. 5-66 Problema 91.

92 Se a massa-padrão de 1 kg é acelerada por apenas duas forças, $\vec{F}_1 = (3,0\text{ N})\hat{i} + (4,0\text{ N})\hat{j}$ e $\vec{F}_2 = (-2,0\text{ N})\hat{i} + (-6,0\text{ N})\hat{j}$, qual é a força resultante $\vec{F}_{res}$ (a) em termos dos vetores unitários e em termos (b) do módulo e (c) do ângulo em relação ao sentido positivo do eixo x? Quais são (d) o módulo e (e) o ângulo de $\vec{a}$?

93 Para capturar um nêutron livre, um núcleo deve fazê-lo parar em uma distância menor que o diâmetro do núcleo através da *interação forte*. Essa força, que é responsável pela estabilidade do núcleo atômico, é praticamente nula fora do núcleo. Suponha que um nêutron livre, com uma velocidade inicial de $1,4 \times 10^7$ m/s, seja capturado por um núcleo com um diâmetro $d = 1,0 \times 10^{-14}$ m. Supondo que a interação forte a que está sujeito o nêutron seja constante, determine o módulo dessa força. A massa do nêutron é de $1,67 \times 10^{-27}$ kg.

94 Um helicóptero de 15 000 kg levanta um caminhão de 4500 kg com uma aceleração para cima de 1,4 m/s². Calcule (a) a força resultante exercida pelo ar sobre a hélice do helicóptero e (b) a tensão do cabo que sustenta o caminhão.

95 Uma motocicleta e seu piloto de 60,0 kg aceleram a 3,0 m/s² para subir uma rampa inclinada de 10° em relação à horizontal. Quais são os módulos (a) da força resultante a que é submetido o piloto e (b) da força que a motocicleta exerce sobre o piloto?

96 Uma nave interestelar tem uma massa de $1,20 \times 10^6$ kg e está inicialmente em repouso em relação a um sistema estelar. (a) Que aceleração constante é necessária para levar a nave até a velocidade de $0,10c$ (onde $c = 3,0 \times 10^8$ m/s é a velocidade da luz) em relação ao sistema estelar em 3,0 dias? (b) Qual é o valor desta aceleração em unidades de g? (c) Que força é necessária para esta aceleração? (d) Se os motores são desligados quando a velocidade de $0,10c$ é atingida (fazendo com que a velocidade permaneça constante desse momento em diante), quanto tempo leva para a nave (do início ao fim) viajar 5,0 meses-luz, a distância percorrida pela luz em 5,0 meses?

97 Por esporte, um tatu de 12 kg escorrega em um grande lago gelado, plano e sem atrito. A velocidade inicial do tatu é de 5,0 m/s no sentido positivo do eixo x. Considere a posição inicial do tatu sobre o gelo como a origem. Ele escorrega sobre o gelo ao mesmo tempo em que é empurrado pelo vento com uma força de 17 N no sentido positivo do eixo y. Em termos dos vetores unitários, quais são (a) o vetor velocidade e (b) o vetor posição do animal depois de deslizar por 3,0 s?

98 Um homem de 50 kg está em um elevador que parte do repouso no andar térreo de um edifício em $t = 0$ e chega ao andar mais alto após 10 s. A aceleração do elevador em função do tempo é mostrada na Fig. 5-67, onde valores positivos da aceleração significam que ela aponta para cima. Quais são (a) o módulo e (b) o sentido (para cima ou para baixo) da força máxima exercida sobre o homem pelo piso do elevador, (c) o módulo e (d) o sentido da força mínima exercida sobre o homem pelo piso do

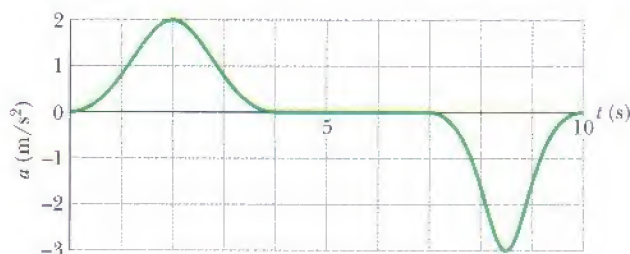


FIG. 5-67 Problema 98.

elevador e (e) o módulo e (f) o sentido da força máxima exercida pelo homem sobre o piso do elevador?

99 A Fig. 5-68 mostra uma caixa de dinheiro sujo (massa m_1 = 3,0 kg) sobre um plano inclinado sem atrito de ângulo θ_1 = 30°. A caixa está ligada por uma corda de massa desprezível a uma caixa de dinheiro lavado (massa m_2 = 2,0 kg) situada sobre um plano inclinado sem atrito de ângulo θ_2 = 60°. A polia não tem atrito e sua massa é desprezível. Qual é a tensão da corda?

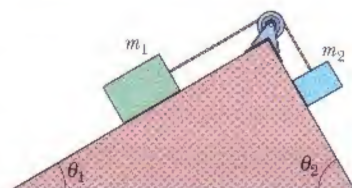


FIG. 5-68 Problema 99.

100 Suponha que uma massa-padrão de 1 kg sofre uma aceleração de 4,00 m/s² a 160° com o sentido positivo do eixo x ao ser submetida a duas forças; uma delas é $\vec{F}_1 = (2{,}50\text{ N})\hat{\text{i}} + (4{,}60\text{ N})\hat{\text{j}}$. Qual é a outra força (a) em termos dos vetores unitários e em termos (b) do módulo e (c) do ângulo?

101 Na Fig. 5-69, uma lata de antioxidantes (m_1 = 1,0 kg) sobre um plano inclinado sem atrito está ligada a uma lata de presuntada (m_2 = 2,0 kg). A polia tem massa e atrito desprezíveis. Uma força vertical para cima de módulo F = 6,0 N atua sobre a lata de presuntada, que tem uma aceleração para baixo de 5,5 m/s². Determine (a) a tensão da corda e (b) o ângulo β.

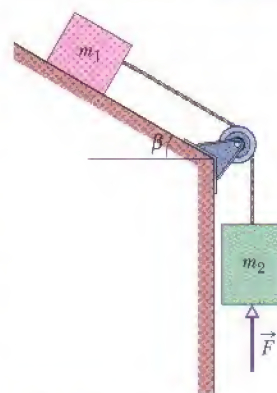


FIG. 5-69 Problema 101.

102 Um foguete e sua carga têm uma massa total de 5,0 × 10⁴ kg. Qual é o módulo da força produzida pelo motor do foguete (empuxo) quando este está (a) "pairando" sobre a plataforma de lançamento imediatamente após a ignição e (b) acelerando para cima a 20 m/s²?

103 Uma motocicleta com 2,0 kN de peso acelera de 0 a 88,5 km/h em 6,0 s. Quais são os módulos (a) da aceleração constante e (b) da força resultante responsável pela aceleração?

104 Um elétron inicialmente estacionário (massa = $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg) sofre uma aceleração constante ao longo de 1,5 cm, atingindo a velocidade de $6{,}0 \times 10^6$ m/s. Determine (a) o módulo da força responsável pela aceleração do elétron e (b) o peso do elétron.

6 Força e Movimento — II

A Grande Pirâmide, construída há cerca de 4500 anos, é formada por cerca de 2 300 000 blocos de pedra, a maioria com uma massa de 2000 a 3000 kg. Como os engenheiros e operários conseguiram levantar as pedras para construir a pirâmide, que tem mais de 140 m de altura? Alguns pesquisadores levantaram a hipótese de que, durante a construção, uma turma de operários fazia subir os blocos por uma gigantesca rampa de terra de pequena inclinação, encostada em um dos lados da pirâmide. Entretanto, não existem indícios (como restos da rampa ou pinturas da época) que apóiem esta teoria. Outros acreditam que havia uma rampa em espiral em torno da pirâmide. Acontece que uma rampa desse tipo seria altamente instável; além disso, conseguir que blocos de pedra de 2000 kg fizessem curvas de 90° nos cantos da pirâmide parece uma tarefa extremamente difícil, se não impossível.


Will & Deni McIntyre/Stone/Getty Images

Como os antigos egípcios levantaram os gigantescos blocos de pedra usados para construir a Grande Pirâmide?

A resposta está neste capítulo.

6-1 O QUE É FÍSICA?

Neste capítulo concentramos nossa atenção na física de três tipos comuns de força: a força de atrito, a força de arrasto e a força centrípeta. Ao preparar um carro para as 500 milhas de Indianápolis um engenheiro deve levar em conta os três tipos de força. As forças de atrito que agem sobre os pneus são cruciais para a aceleração do carro ao deixar o boxe e ao sair de uma curva (se o carro encontra uma mancha de óleo, os pneus perdem aderência e o carro pode sair da pista). As forças de arrasto produzidas pelas correntes de ar devem ser minimizadas, caso contrário o carro consumirá muito combustível e terá que ser reabastecido prematuramente (até mesmo uma parada adicional de 14 s pode custar a corrida a um piloto). As forças centrípetas são fundamentais nas curvas (se não houver força centrípeta suficiente, o carro não conseguirá fazer a curva). Vamos iniciar nossa discussão com as forças de atrito.

6-2 | Atrito

As forças de atrito são inevitáveis na vida diária. Se não fôssemos capazes de vencê-las elas fariam parar todos os objetos que estivessem se movendo e todos os eixos que estivessem girando. Cerca de 20% da gasolina consumida por um automóvel são usados para compensar o atrito das peças do motor e da transmissão. Por outro lado, se não houvesse atrito não poderíamos fazer o automóvel ir a lugar algum nem poderíamos caminhar ou andar de bicicleta. Não poderíamos segurar um lápis, e, mesmo que pudéssemos, não conseguiríamos escrever. Pregos e parafusos seriam inúteis, os tecidos se desmanchariam e os nós se desatariam.

Neste capítulo tratamos de forças de atrito que existem entre duas superfícies sólidas estacionárias ou se movendo uma em relação a outra em baixa velocidade. Considere três experimentos imaginários simples:

1. Dê um empurrão momentâneo em um livro que está sobre uma mesa horizontal, fazendo-o deslizar. Com o tempo, a velocidade do livro diminui até se anular. Isso significa que o livro possui uma aceleração paralela à superfície da mesa e com o sentido oposto ao da velocidade. Nesse caso, de acordo com a segunda lei de Newton, deve existir uma força paralela à superfície da mesa e que aponta no sentido oposto ao da velocidade. Essa força é uma força de atrito.
2. Empurre o livro horizontalmente de modo a fazê-lo se deslocar com velocidade constante ao longo da mesa. A força que você exerce pode ser a única força horizontal que age sobre o livro? Não, porque nesse caso o livro sofreria uma aceleração. De acordo com a lei de Newton, deve existir uma segunda força, de sentido contrário ao da força que você aplicou mas com o mesmo módulo, o que faz com que as duas forças se equilibrem. Essa segunda força é uma força de atrito, paralela à superfície da mesa.
3. Empurre um caixote pesado paralelamente ao piso. O caixote não se move. De acordo com a segunda lei de Newton, uma segunda força deve estar atuando sobre o caixote para se opor à força exercida por você. Além disso, essa segunda força deve ter o mesmo módulo que a força que você aplicou, mas atua em sentido contrário, de forma que as duas forças se equilibram. Essa segunda força é uma força de atrito. Empurre com mais força. O caixote continua parado. Aparentemente, a força de atrito pode aumentar de intensidade para continuar equilibrando a força aplicada por você. Empurre com toda a força. O caixote começa a deslizar. Evidentemente, existe uma intensidade máxima para a força de atrito. Quando você excede essa intensidade máxima o caixote começa a se mover.

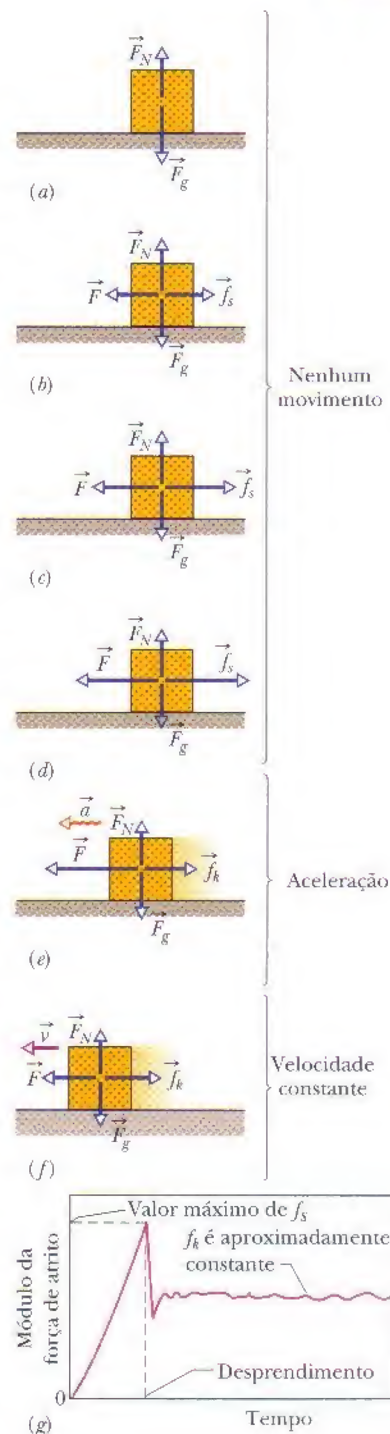


FIG. 6-1 (*a*) As forças que agem sobre um bloco estacionário. (*b-d*) Uma força externa $\vec{F}$, aplicada ao bloco, é equilibrada por uma força de atrito estático $\vec{f}_s$. Quando $\vec{F}$ aumenta, f_s também aumenta, até atingir um certo valor máximo. (*e*) O bloco então "se desprende", acelerando subitamente na direção de $\vec{F}$. (*f*) Para que o bloco se mova com velocidade constante é preciso reduzir o valor de F. (*g*) Alguns resultados experimentais para a seqüência da (*a*) a (*f*).

A Fig. 6-1 mostra uma situação semelhante. Na Fig. 6-1*a* um bloco está em repouso sobre uma mesa, com a força gravitacional $\vec{F}_g$ equilibrada pela força normal $\vec{F}_N$. Na Fig. 6-1*b*, você exerce uma força $\vec{F}$ sobre o bloco, tentando puxá-lo para a

esquerda. Em resposta, surge uma força de atrito $\vec{f}_s$ para a direita, que equilibra a força que você aplicou. A força $\vec{f}_s$ é chamada de **força de atrito estático**. O bloco permanece imóvel.

As Figs. 6-1*c* e 6-1*d* mostram que, à medida que você aumenta a intensidade da força aplicada, a intensidade da força de atrito estático $\vec{f}_s$ também aumenta e o bloco permanece em repouso. Entretanto, quando a força aplicada atinge uma certa intensidade o bloco "se desprende" da superfície da mesa e sofre uma aceleração para a esquerda (Fig. 6-1*e*). A força de atrito $\vec{f}_k$ que se opõe ao movimento nessa nova situação é chamada de **força de atrito cinético**.

Em geral, a intensidade da força de atrito cinético, que age sobre os objetos em movimento, é menor do que a intensidade máxima da força de atrito estático, que age sobre os objetos em repouso. Assim, para que o bloco se mova sobre a superfície com velocidade constante provavelmente você terá que diminuir a intensidade da força aplicada assim que o bloco começar a se mover, como mostra a Fig. 6-1*f*. A Fig. 6-1*g* mostra o resultado de um experimento no qual a força aplicada ao bloco foi aumentada lentamente até ele começar a se mover. Observe que a força necessária para manter o bloco em movimento com velocidade constante é menor que a necessária para que ele comece a se mover.

Uma força de atrito é, em essência, o vetor resultante de muitas forças que agem entre os átomos da superfície de um corpo e os átomos da superfície do outro corpo. Se duas superfícies metálicas polidas e limpas são colocadas em contato em alto vácuo (para que continuem limpas), torna-se impossível fazer uma deslizar em relação à outra. Como as superfícies são lisas, muitos átomos de uma entram em contato com muitos átomos da outra e as superfícies se *soldam a frio*, formando uma única peça de metal. Se dois blocos de metal, muito polidos, usados para calibrar tornos, são colocados em contato no ar existe menos contato átomo para átomo, mas mesmo assim os blocos aderem firmemente um ao outro e só podem ser separados por meio de um movimento de torção. Em geral, porém, esse grande número de contatos entre átomos não existe. Mesmo uma superfície metálica altamente polida está longe de ser uma superfície plana em escala atômica. Além disso, as superfícies dos objetos comuns possuem camadas de óxidos e outras impurezas que reduzem a possibilidade de uma soldagem a frio.

Quando duas superfícies comuns são colocadas em contato, somente os pontos mais salientes se tocam. (É como termos os Alpes Suíços virados de cabeça para baixo e colocados sobre os Alpes Austríacos.) A área *micro*scópica de contato é muito menor que a área de contato *macro*scópica aparente, possivelmente 10^4 vezes menor. Mesmo assim, muitos pontos de contato se soldam a frio. Essas soldas são responsáveis pelo atrito estático que surge quando uma força aplicada tenta fazer uma superfície deslizar em relação à outra.

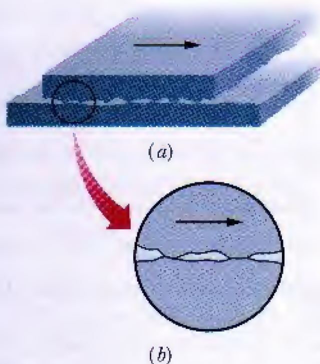


FIG. 6-2 Mecanismo responsável pela força de atrito cinético. (*a*) A placa de cima está deslizando para a direita em relação à placa de baixo. (*b*) Nesta vista ampliada são mostrados dois pontos onde ocorreu soldagem a frio. É necessária uma força para romper as soldas e manter o movimento.

Se a força aplicada é suficiente para fazer uma das superfícies deslizar, ocorre uma ruptura das soldas (no instante em que começa o movimento) seguida por um processo contínuo de formação e ruptura de novas soldas enquanto ocorre o movimento relativo e novos contatos são formados aleatoriamente (Fig. 6-2). A força de atrito cinético $\vec{f}_k$ que se opõe ao movimento é a soma vetorial das forças produzidas por esses contatos aleatórios.

Se as duas superfícies são pressionadas uma contra a outra com mais força, mais pontos se soldam a frio. Nesse caso, para fazer as superfícies deslizarem uma em relação à outra é preciso aplicar uma força maior, ou seja, o valor da força de atrito estático $\vec{f}_s$ é maior. Se as superfícies estão deslizando uma em relação à outra passam a existir mais pontos momentâneos de soldagem a frio, de modo que a força de atrito cinético $\vec{f}_k$ também é maior.

Freqüentemente, o movimento de deslizamento de uma superfície em relação à outra ocorre "aos solavancos" porque os processos de soldagem e ruptura se alternam. Esses processos repetitivos de *aderência e deslizamento* podem produzir sons desagradáveis, como o chiado dos pneus no asfalto, o barulho de uma unha arranhando um quadro-negro e o rangido de uma dobradiça enferrujada. Podem também produzir sons melodiosos, como o de um violino bem tocado.

6-3 | Propriedades do Atrito

A experiência mostra que quando um corpo seco não-lubrificado pressiona uma superfície nas mesmas condições e uma força $\vec{F}$ tenta fazer o corpo deslizar ao longo da superfície, a força de atrito resultante possui três propriedades:

Propriedade 1. Se o corpo não se move, a força de atrito estático $\vec{f}_s$ e a componente de $\vec{F}$ paralela à superfície se equilibram. Elas têm o mesmo módulo, e $\vec{f}_s$ tem o sentido oposto ao da componente de $\vec{F}$.

Propriedade 2. O módulo de $\vec{f}_s$ possui um valor máximo $f_{s,\text{máx}}$ que é dado por

$$f_{s,\text{máx}} = \mu_s F_N, \tag{6-1}$$

onde μ_s é o **coeficiente de atrito estático** e F_N é o módulo da força normal que a superfície exerce sobre o corpo. Se o módulo da componente de $\vec{F}$ paralela à superfície excede $f_{s,\text{máx}}$, o corpo começa a deslizar ao longo da superfície.

Propriedade 3. Se o corpo começa a deslizar ao longo da superfície, o módulo da força de atrito diminui rapidamente para um valor f_k dado por

$$f_k = \mu_k F_N, \tag{6-2}$$

onde μ_k é o **coeficiente de atrito cinético**. Daí em diante, durante o deslizamento uma força de atrito cinético $\vec{f}_k$ de módulo dado pela Eq. 6-2 se opõe ao movimento.

O módulo F_N da força normal aparece nas propriedades 2 e 3 como uma medida da força com a qual o corpo pressiona a superfície. De acordo com a terceira lei de Newton, se o corpo pressiona com mais força, F_N é maior. As propriedades 1 e 2 foram expressas em termos de uma única força aplicada $\vec{F}$, mas também são válidas para a resultante de várias forças aplicadas ao corpo. As Eqs. 6-1 e 6-2 *não* são equações vetoriais; os vetores $\vec{f}_s$ e $\vec{f}_k$ são sempre paralelos à superfície e têm o sentido oposto ao da tendência de deslizamento; o vetor $\vec{F}_N$ é perpendicular à superfície.

Os coeficientes μ_s e μ_k são adimensionais e devem ser determinados experimentalmente. Seus valores dependem das propriedades tanto do corpo como da superfície; por isso, qualquer menção aos coeficientes de atrito costuma ser seguida pela preposição "entre", como em "o valor de μ_s *entre* um ovo e uma frigideira de Teflon é 0,04, mas o valor *entre* um sapato de alpinismo e uma pedra pode chegar a 1,2". Normalmente, supomos que o valor de μ_k não depende da velocidade com a qual o corpo desliza ao longo da superfície.

TESTE 1 Um bloco repousa sobre um piso. (a) Qual é o módulo da força de atrito que o piso exerce sobre o bloco? (b) Se uma força horizontal de 5 N é aplicada ao bloco, mas o bloco não se move, qual é o módulo da força de atrito? (c) Se o valor máximo $f_{s,\text{máx}}$ da força de atrito estático que age sobre o bloco é 10 N, o bloco se moverá quando o módulo da força aplicada horizontalmente for aumentado para 8 N? (d) E se ele for aumentado para 12 N? (e) Qual é o módulo da força de atrito no item (c)?

Exemplo 6-1

Se as rodas de um carro ficam "travadas" (impedidas de girar) durante uma frenagem de emergência, o carro desliza na pista. Pedaços de borracha arrancados dos pneus e pequenos trechos de asfalto fundido formam as "marcas da derrapagem" que revelam a ocorrência de soldagem a frio. O recorde de marcas de derrapagem em via pública foi estabelecido em 1960 pelo motorista de um Jaguar na rodovia M1, na Inglaterra (Fig. 6-3*a*): as marcas tinham 290 m de comprimento! Supondo que $\mu_k = 0{,}60$ e que a aceleração do carro se manteve constante durante a frenagem, qual era a velocidade do carro quando as rodas travaram?

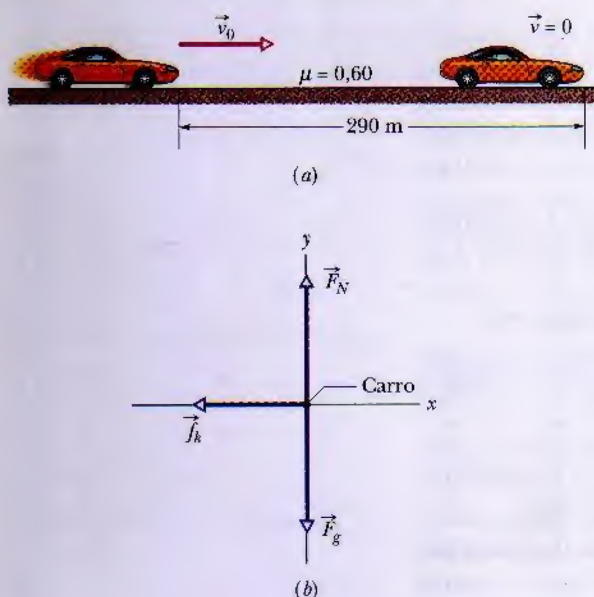


FIG. 6-3 (*a*) Um carro deslizando para a direita e finalmente parando após se deslocar 290 m. (*b*) Diagrama de corpo livre do carro.

IDÉIAS-CHAVE (1) Como estamos supondo que a aceleração é constante, podemos usar as equações da Tabela 2-1 para calcular a velocidade inicial do carro, v_0. (2) Se desprezarmos os efeitos do ar sobre o carro, a aceleração a se deveu apenas a uma força de atrito cinético $\vec{f}_k$ exercida pela estrada sobre o carro, no sentido oposto ao do movimento do carro, que é o sentido positivo do eixo x (Fig. 6-3*b*). Podemos relacionar esta força à aceleração escrevendo a segunda lei de Newton para as componentes x ($F_{res,x} = ma_x$) como

$$-f_k = ma, \tag{6-3}$$

onde m é a massa do carro. O sinal negativo indica o sentido da força de atrito cinético.

Cálculos: De acordo com a Eq. 6-2, o módulo da força de atrito é $f_k = \mu_k F_N$, onde F_N é o módulo da força normal que a estrada exerce sobre o carro. Como o carro não está acelerando verticalmente, sabemos pela Fig. 6-3*b* e pela segunda lei de Newton que o módulo de $\vec{F}_N$ é igual ao módulo da força gravitacional $\vec{F}_g$ que age sobre o carro, que é igual a mg. Assim, $F_N = mg$.

Explicitando a na Eq. 6-3 e fazendo $f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg$, temos:

$$a = -\frac{f_k}{m} = -\frac{\mu_k mg}{m} = -\mu_k g, \tag{6-4}$$

onde o sinal negativo indica que a aceleração ocorre no sentido negativo do eixo x, o sentido oposto ao da velocidade. Em seguida, usamos a Eq. 2-16,

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0),$$

uma das equações do Capítulo 2 para objetos com aceleração constante. Sabemos que o deslocamento $x - x_0$ foi de 290 m e supomos que a velocidade final v foi 0. Substituindo a por seu valor, dado pela Eq. 6-4, e explicitando v_0, obtemos

$$v_0 = \sqrt{2\mu_k g(x - x_0)} = \sqrt{(2)(0{,}60)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(290\ \text{m})}$$

$$= 58\ \text{m/s} = 210\ \text{Km/h}. \quad \text{(Resposta)}$$

Supusemos que $v = 0$ na extremidade das marcas de derrapagem. Na verdade, as marcas terminaram apenas porque o Jaguar saiu da estrada depois de percorrer 290 m com as rodas travadas. Assim, o valor de v_0 era *pelo menos* 210 km/h.

Exemplo 6-2

Na Fig. 6-4*a*, um bloco de massa m = 3,0 kg escorrega em um piso enquanto uma força $\vec{F}$ de módulo 12 N, fazendo um ângulo θ para cima com a horizontal, é aplicada ao bloco. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso é μ_k = 0,40. O ângulo θ pode variar de 0 a 90° (o bloco permanece sobre o piso). Qual é o valor de θ para o qual o módulo a da aceleração do bloco é máximo?

IDÉIAS-CHAVE Como o bloco está em movimento, a força de atrito envolvida é a força de atrito *cinético*. O módulo desta força é dado pela Eq. 6-2 ($f_k = \mu_k F_N$, onde F_N é a força normal). O sentido é o oposto do movimento (o atrito se opõe ao escorregamento).

Cálculo de F_N: Como precisamos conhecer o módulo f_k da força de atrito, vamos calcular primeiro o módulo F_N da força normal. A Fig. 6-4*b* é um diagrama de corpo livre que mostra as forças paralelas ao eixo vertical y. A força normal é para cima, a força gravitacional $\vec{F}_g$, de módulo mg, é para baixo e a componente vertical F_y da força aplicada é

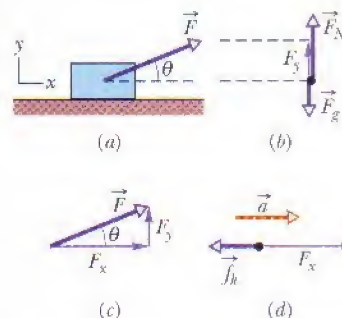


FIG. 6-4 (*a*) Uma força é aplicada a um bloco em movimento. (*b*) As forças verticais. (*c*) As componentes da força aplicada. (*d*) As forças horizontais e a aceleração.

para cima. Essa componente aparece na Fig. 6-4*c*, onde podemos ver que $F_y = F \operatorname{sen} \theta$. Podemos escrever a segunda lei de Newton ($\vec{F}_{res} = m\vec{a}$) para essas forças ao longo do eixo *y* como

$$F_N + F \operatorname{sen} \theta - mg = m(0), \quad (6\text{-}5)$$

onde tomamos a aceleração ao longo do eixo *y* como sendo zero (o bloco não se move ao longo desse eixo). Assim,

$$F_N = mg - F \operatorname{sen} \theta. \quad (6\text{-}6)$$

Cálculo da aceleração *a*: A Fig. 6-4*d* é um diagrama de corpo livre para o movimento ao longo do eixo *x*. O sentido da componente horizontal F_x da força aplicada é para a direita; de acordo com a Fig. 6-4*c*, $F_x = F \cos \theta$. A força de atrito tem módulo f_k ($= \mu_k F_N$) e aponta para a esquerda. Aplicando a segunda lei de Newton ao movimento ao longo do eixo *x*, temos:

$$F \cos \theta - \mu_k F_N = ma. \quad (6\text{-}7)$$

Substituindo F_N por seu valor, dado pela Eq. 6-6, e explicitando *a*, obtemos:

$$a = \frac{F}{m} \cos \theta - \mu_k \left(g - \frac{F}{m} \operatorname{sen} \theta \right). \quad (6\text{-}8)$$

Cálculo do máximo: Para determinar o valor de θ que maximiza *a*, derivamos *a* em relação a θ e igualamos o resultado a zero:

$$\frac{da}{d\theta} = -\frac{F}{m} \operatorname{sen} \theta + \mu_k \frac{F}{m} \cos \theta = 0.$$

Reagrupando os termos e usando a identidade (sen θ)/(cos θ) = tan θ, obtemos

$$\tan \theta = \mu_k.$$

Explicitando θ e substituindo μ_k pelo seu valor numérico ($\mu_k = 0{,}40$), descobrimos que a aceleração é máxima para

$$\theta = \tan^{-1} \mu_k = 21{,}8° \approx 22°. \quad \text{(Resposta)}$$

Comentário: Quando aumentamos θ a partir de 0, a componente *y* da força aplicada $\vec{F}$ aumenta, o que faz diminuir a força normal. Esta diminuição da força normal faz diminuir a força de atrito, que se opõe ao movimento do bloco. Assim, a aceleração do bloco tende a aumentar. Ao mesmo tempo, porém, o aumento de θ faz diminuir a componente horizontal de $\vec{F}$, o que faz diminuir a aceleração. Essas tendências opostas fazem com que a aceleração seja máxima para $\theta = 22°$.

Exemplo 6-3

Embora muitas estratégias engenhosas tenham sido atribuídas aos construtores da Grande Pirâmide, os blocos de pedra foram provavelmente içados com o auxílio de cordas. A Fig. 6-5*a* mostra um bloco de 2000 kg no processo de ser puxado ao longo de um lado acabado (liso) da Grande Pirâmide, que constitui um plano inclinado com um ângulo $\theta = 52°$. O bloco é sustentado por um trenó de madeira e puxado por várias cordas (apenas uma é mostrada na figura). O caminho do trenó é lubrificado com água para reduzir o coeficiente de atrito estático para 0,40. Suponha que o atrito no ponto (lubrificado) no qual a corda passa pelo alto da pirâmide seja desprezível. Se cada operário puxa com uma força de 686 N (um valor razoável), quantos operários são necessários para que o bloco esteja prestes a se mover?

IDÉIAS-CHAVE (1) Como o bloco está *prestes* a se mover, a força de atrito estático tem o maior valor possível, $f_s = f_{s,\text{máx}}$. (2) Como os operários estão puxando o bloco *para cima*, a força de atrito é *para baixo* (as forças de atrito sempre se opõem ao movimento). (3) De acordo com o Exemplo 5-5, a componente da força gravitacional paralela ao plano e para baixo é *mg* sen θ, enquanto a componente perpendicular ao plano e para dentro é *mg* cos θ (Fig. 6-5*b*).

Cálculos: A Fig. 6-5*c* é um diagrama de corpo livre do bloco, mostrando a força $\vec{F}$ aplicada pelas cordas, a força de atrito estático $\vec{f}_s$ e as duas componentes da força gravitacional. Podemos escrever a segunda lei de Newton ($\vec{F}_{res} = m\vec{a}$) para as componentes das forças em relação ao eixo *x*:

$$F - mg \operatorname{sen} \theta - f_s = m(0). \quad (6\text{-}9)$$

Como o bloco está prestes a se mover e a força de atrito estático tem o maior valor possível, $f_s = f_{s,\text{máx}}$, usamos a Eq. 6-1 para substituir f_s por $\mu_s F_N$:

$$f_s = f_{s,\text{máx}} = \mu_s F_N. \quad (6\text{-}10)$$

Podemos também escrever a segunda lei de Newton para as componentes das forças em relação ao eixo *y*:

$$F_N - mg \cos \theta = m(0). \quad (6\text{-}11)$$

Explicitando F_N na Eq. 6-11 e substituindo o resultado na Eq. 6-10, obtemos:

$$f_s = \mu_s mg \cos \theta. \quad (6\text{-}12)$$

Substituindo esta expressão na Eq. 6-9 e explicitando *F*, obtemos:

$$F = \mu_s mg \cos \theta + mg \operatorname{sen} \theta. \quad (6\text{-}13)$$

Fazendo $m = 2000$ kg, $\theta = 52°$ e $\mu_s = 0{,}40$, descobrimos que a força necessária para colocar o bloco de pedra prestes a se mover é de $2{,}027 \times 10^4$ N. Dividindo este valor pela

força de 686 N que cada operário é supostamente capaz de aplicar, descobrimos que o número necessário de operários é

$$N = \frac{2{,}027 \times 10^4 \text{ N}}{686 \text{ N}} = 29{,}5 \approx 30 \text{ operários.} \quad \text{(Resposta)}$$

Comentário: Depois que o bloco de pedra começava a se mover o atrito passava a ser o atrito cinético, e o coeficiente de atrito diminuía para aproximadamente 0,20. É fácil mostrar que, nesse caso, o número de operários diminuía para 26 ou 27. Assim, os grandes blocos de pedra da Grande Pirâmide puderam ser colocados em posição por um número relativamente pequeno de operários.

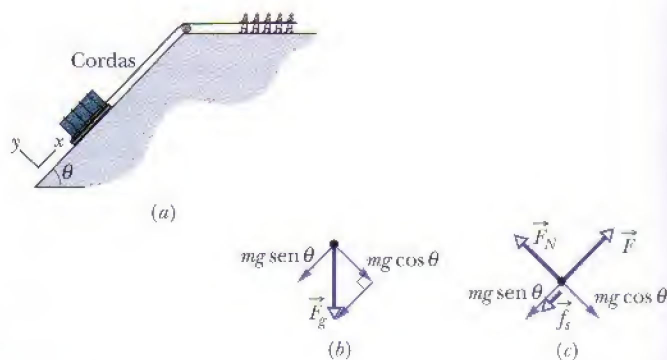


FIG. 6-5 (*a*) Um bloco de pedra na iminência de ser içado para o alto da Grande Pirâmide. (*b*) As componentes da força gravitacional. (*c*) Diagrama de corpo livre do bloco.



FIG. 6-6 A esquiadora se agacha na "posição de ovo" para minimizar a área da seção reta efetiva e assim reduzir a força de arrasto. *(Karl-Josef Hildenbrand/dpa/Landov LLC)*

6-4 | Força de Arrasto e Velocidade Terminal

Um **fluido** é uma substância, em geral um gás ou um líquido, que é capaz de escoar. Quando existe uma velocidade relativa entre um fluido e um corpo sólido (seja porque o corpo se move através do fluido, seja porque o fluido passa pelo corpo), o corpo experimenta uma **força de arrasto** $\vec{D}$ que se opõe ao movimento relativo e é paralela à direção do movimento relativo do fluido.

Examinaremos aqui apenas os casos em que o fluido é o ar e o corpo é rombudo (como uma bola), e não fino e pontiagudo (como um dardo), e o movimento relativo é suficientemente rápido para produzir uma turbulência no ar (formação de redemoinhos) atrás do corpo. Nesse caso, o módulo da força de arrasto $\vec{D}$ está relacionado à velocidade escalar v através da equação

$$D = \tfrac{1}{2} C\rho A v^2, \quad (6\text{-}14)$$

onde C é um parâmetro determinado experimentalmente conhecido como **coeficiente de arrasto**, ρ é a massa específica do ar (massa por unidade de volume) e A é a **área da seção reta efetiva** do corpo (a área de uma seção reta perpendicular à velocidade $\vec{v}$). O coeficiente de arrasto C (cujos valores típicos variam de 0,4 a 1,0) não é constante para um dado corpo, já que depende da velocidade. Aqui, ignoraremos tais complicações.

Os esquiadores sabem muito bem que a força de arrasto depende de A e de v^2. Para alcançar altas velocidades um esquiador procura reduzir o valor de D, adotando, por exemplo, a "posição de ovo" (Fig. 6-6) para minimizar A.

Quando um corpo rombudo cai a partir do repouso, a força de arrasto $\vec{D}$ produzida pela resistência do ar é dirigida para cima e seu módulo cresce gradualmente, a partir de zero, com o aumento da velocidade do corpo. Esta força para cima se opõe à força gravitacional $\vec{F}_g$, dirigida para baixo. Podemos relacionar essas forças à aceleração do corpo escrevendo a segunda lei de Newton para um eixo vertical y ($F_{\text{res},y} = ma_y$):

$$D - F_g = ma, \quad (6\text{-}15)$$

onde m é a massa do corpo. Conforme mostra a Fig. 6-7, se o corpo cai por um tempo suficiente, D acaba se tornando igual a F_g. De acordo com a Eq. 6-15, isso significa que $a = 0$ e, portanto, a velocidade do corpo pára de aumentar. O corpo passa, então, a cair com velocidade constante, a chamada **velocidade terminal** v_t.

Para determinar v_t, fazemos $a = 0$ na Eq. 6-15 e substituímos o valor de D dado pela Eq. 6-14, obtendo

$$\tfrac{1}{2}C\rho A v_t^2 - F_g = 0,$$

e portanto

$$v_t = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho A}}. \qquad (6\text{-}16)$$

A Tabela 6-1 mostra os valores de v_t para alguns objetos comuns.

De acordo com cálculos* baseados na Eq. 6-14, um gato precisa cair cerca de seis andares para atingir a velocidade terminal. Até que isso aconteça, $F_g > D$ e o gato sofre uma aceleração para baixo, porque a força resultante é diferente de zero. Como vimos no Capítulo 2, nosso corpo é um acelerômetro, e não um velocímetro. Como o gato também sente a aceleração, ele fica assustado e mantém as patas abaixo do corpo, encolhe a cabeça e encurva a espinha para cima, reduzindo a área A, aumentando v_t e provavelmente se ferindo na queda.

Entretanto, se o gato atinge v_t durante uma queda mais longa, a aceleração se anula e o gato relaxa um pouco, esticando as patas e o pescoço horizontalmente para fora e endireitando a espinha (o que o faz ficar parecido com um esquilo voador). Isso produz um aumento da área A e, conseqüentemente, de acordo com a Eq. 6-14, um aumento da força de arrasto D. O gato começa a diminuir sua velocidade, já que, agora, $D > F_g$ (a força resultante aponta para cima), até que uma nova velocidade terminal v_t menor seja atingida. A diminuição de v_t reduz a possibilidade de que o gato se machuque na queda. Pouco antes do fim da queda, ao perceber que o chão está próximo, o gato coloca novamente as patas abaixo do corpo, preparando-se para o pouso.

Os seres humanos muitas vezes saltam de grandes alturas apenas pelo prazer de "voar". Em abril de 1987, durante um salto, o pára-quedista Gregory Robertson percebeu que sua colega Debbie Williams havia desmaiado em uma colisão com um terceiro pára-quedista e, portanto, não tinha como abrir o pára-quedas. Robertson, que estava muito acima de Debbie no momento e ainda não tinha aberto o pára-quedas para a descida de 4 mil metros, colocou-se de cabeça para baixo para minimizar A e maximizar a velocidade da queda. Depois de atingir uma velocidade terminal estimada de 320 km/h, alcançou a moça e assumiu a "posição de águia" (como na Fig. 6-8) para aumentar D e conseguir agarrá-la. Abriu o pára-quedas da moça e em seguida, após soltá-la, abriu o próprio pára-quedas, quando faltavam apenas 10 segundos para o impacto. Williams sofreu várias lesões internas devido à falta de controle na aterrissagem, mas sobreviveu.

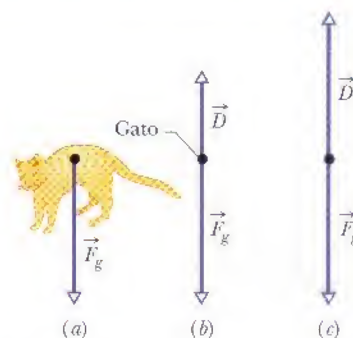


FIG. 6-7 Forças a que está submetido um corpo em queda livre no ar. (*a*) O corpo no momento em que começa a cair; a única força presente é a força gravitacional. (*b*) Diagrama de corpo livre durante a queda, incluindo a força de arrasto. (*c*) A força de arrasto aumentou até se tornar igual à força gravitacional. O corpo agora cai com velocidade constante, a chamada velocidade terminal.



FIG. 6-8 Pára-quedistas na "posição de águia", que maximiza a força de arrasto. *(Steve Fitchett/Taxi/Getty Images)*

TABELA 6-1

Algumas Velocidades Terminais no Ar

Objeto	Velocidade terminal (m/s)	Distância para 95%[a] (m)
Peso (do arremesso de peso)	145	2500
Pára-quedista em queda livre (típico)	60	430
Bola de beisebol	42	210
Bola de tênis	31	115
Bola de basquete	20	47
Bola de pingue-pongue	9	10
Gota de chuva (raio = 1,5 mm)	7	6
Pára-quedista (típico)	5	3

[a]Distância de queda necessária para atingir 95% da velocidade terminal.

Fonte: Adaptado de Peter J. Brancazio, *Sport Science*, 1984, Simon & Schuster, New York.

*W. O. Whitney e C.J. Mehlhaff, "High-Rise Syndrome in Cats." *The Journal of the American Veterinary Medical Association*, 1987.

Exemplo 6-4

Se um gato em queda alcança uma primeira velocidade terminal de 97 km/h enquanto está encolhido e depois estica as patas, duplicando a área A, qual é a nova velocidade terminal?

IDÉIA-CHAVE De acordo com a Eq. 6-16, a velocidade terminal do gato depende (entre outros parâmetros) da área da seção reta. Assim, podemos usar esta equação para calcular a razão entre as velocidades. Vamos chamar de v_{to} e v_{tn} as velocidades terminais original e nova, respectivamente, e de A_o e A_n as áreas correspondentes. Nesse caso, de acordo com a Eq. 6-16,

$$\frac{v_{tn}}{v_{to}} = \frac{\sqrt{2F_g/C\rho A_n}}{\sqrt{2F_g/C\rho A_o}} = \sqrt{\frac{A_o}{A_n}} = \sqrt{\frac{A_o}{2A_o}} = \sqrt{0,5} \approx 0,7,$$

o que significa que $v_{tn} \approx 0,7v_{to}$, ou cerca de 68 km/h.

Exemplo 6-5

Uma gota de chuva de raio R = 1,5 mm cai de uma nuvem que está a uma altura h = 1200 m acima do solo. O coeficiente de arrasto C da gota é 0,60. Suponha que a gota permanece esférica durante toda a queda. A massa específica da água, ρ_a, é 1000 kg/m³, e a massa específica do ar, ρ_{ar}, é 1,2 kg/m³.

(a) Qual é a velocidade terminal da gota?

IDÉIA-CHAVE A gota atinge a velocidade terminal v_t quando a força gravitacional e a força de arrasto se equilibram, fazendo com que a aceleração seja nula. Poderíamos aplicar a segunda lei de Newton e a equação da força de arrasto para calcular v_t, mas a Eq. 6-16 já faz isso para nós.

Cálculos: Para usar a Eq. 6-16 precisamos conhecer a área efetiva da seção reta A e o módulo F_g da força gravitacional. Como a gota é esférica, A é a área de um círculo (πR^2) com o mesmo raio que a esfera. Para determinar F_g, usamos três fatos: (1) $F_g = mg$, onde m é a massa da gota; (2) o volume da gota (esférica) é $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ e (3) a massa específica da água da gota é igual à massa por unidade de volume, isto é, $\rho_a = m/V$. Assim, temos;

$$F_g = V\rho_a g = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \rho_a g.$$

Em seguida, substituímos esse resultado, a expressão para A, e os valores conhecidos na Eq. 6-16. Tomando cuidado para não confundir a massa específica do ar, ρ_{ar}, com a massa específica da água, ρ_a, obtemos:

$$v_t = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho_{ar}A}} = \sqrt{\frac{8\pi R^3\rho_a g}{3C\rho_{ar}\pi R^2}} = \sqrt{\frac{8R\rho_a g}{3C\rho_{ar}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(8)(1,5\times10^{-3}\ m)(1000\ \text{kg/m}^3)(9,8\ \text{m/s}^2)}{(3)(0,60)(1,2\ \text{kg/m}^3)}}$$

$$= 7,4\ \text{m/s} \approx 27\ \text{km/h}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Note que a altura da nuvem não entra no cálculo. Como mostra a Tabela 6-1, a gota de chuva atinge a velocidade terminal após ter caído apenas alguns metros.

(b) Qual seria a velocidade da gota imediatamente antes do impacto com o chão se não existisse a força de arrasto?

IDÉIA-CHAVE Na ausência da força de arrasto para reduzir a velocidade da gota durante a queda, ela cairia com a aceleração constante de queda livre g e, portanto, as equações do movimento com aceleração constante da Tabela 2-1 poderiam ser usadas.

Cálculo: Como sabemos que a aceleração é g, que a velocidade inicial v_0 é zero e que o deslocamento $x - x_0$ é $-h$, usamos a Eq. 2-16 para calcular v:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{(2)\,(9,8\ \text{m/s}^2)(1200\ \text{m})}$$

$$= 153\ \text{m/s} \approx 550\ \text{km/h}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Se Shakespeare soubesse disso, dificilmente teria escrito: "Gota a gota ela cai, tal como a chuva benéfica do céu". Na verdade, esta é a velocidade de uma bala disparada por uma arma de grosso calibre!

6-5 | Movimento Circular Uniforme

Como vimos na Seção 4-7, quando um corpo se move em uma circunferência (ou um arco de circunferência) com uma velocidade escalar constante v, dizemos que se encontra em movimento circular uniforme. Vimos também que o corpo possui uma aceleração centrípeta (dirigida para o centro da circunferência) de módulo constante dado por

$$a = \frac{v^2}{R} \qquad \text{(aceleração centrípeta)}, \qquad (6\text{-}17)$$

onde R é o raio do círculo.

Vamos examinar dois exemplos de movimento circular uniforme:

1. *Fazendo uma curva de carro.* Você está sentado no centro do banco traseiro de um carro que se move em alta velocidade em uma estrada plana. Quando o motorista faz uma curva brusca para a esquerda e o carro descreve um arco de circunferência, você escorrega para a direita sobre o assento e fica comprimido contra a porta do carro durante o resto da curva. O que está acontecendo?

   Enquanto o carro está fazendo a curva ele se encontra em movimento circular uniforme, ou seja, possui uma aceleração dirigida para o centro da circunferência. De acordo com a segunda lei de Newton, deve haver uma força responsável por essa aceleração. Além disso, a força também deve estar dirigida para o centro da circunferência. Assim, ela é uma **força centrípeta**, onde o adjetivo indica a orientação. Neste exemplo, a força centrípeta é uma força de atrito exercida pela estrada sobre os pneus; ela faz com que o carro consiga fazer a curva.

   Para você descrever um movimento circular uniforme junto com o carro, também deve existir uma força centrípeta agindo sobre você. Entretanto, aparentemente a força centrípeta exercida pelo assento sobre você não foi suficiente para fazê-lo acompanhar o movimento circular do carro. Assim, o assento deslizou por baixo de você até a porta direita do carro entrar em contato com o seu corpo. A partir desse momento, a porta forneceu a força centrípeta necessária para fazê-lo acompanhar o carro em seu movimento circular uniforme.

2. *Girando em torno da Terra.* Desta vez você está a bordo do ônibus espacial *Atlantis*. Quando você e o ônibus espacial estão em órbita em torno da Terra, você flutua no interior da nave, como se não tivesse peso. O que está acontecendo?

   Tanto você como o ônibus espacial estão em movimento circular uniforme e possuem acelerações dirigidas para o centro do círculo. Novamente, pela segunda lei de Newton, forças centrípetas devem ser a causa dessas acelerações. Desta vez, as forças centrípetas são atrações gravitacionais (a atração sobre você e a atração sobre o ônibus espacial) exercidas pela Terra e dirigidas para o centro da Terra.

Tanto no carro como no ônibus espacial você está em movimento circular uniforme sob a ação de forças centrípetas, mas experimenta sensações bem diferentes nas duas situações. No carro, comprimido contra a porta traseira, você tem consciência de que está sendo submetido a uma força. No ônibus espacial você está flutuando e tem a impressão de que não está sujeito a nenhuma força. Por que essa diferença?

A diferença se deve à natureza das duas forças centrípetas. No carro, a força centrípeta é a compressão a que é submetida a parte do seu corpo que está em contato com a porta do carro. Você pode sentir a compressão nessa parte do seu corpo. No ônibus espacial a força centrípeta é a atração gravitacional da Terra sobre todos os átomos do seu corpo. Assim, nenhuma parte do seu corpo sofre uma compressão, e você não sente nenhuma força agindo sobre você. (A sensação é conhecida como "ausência de peso", mas essa descrição é enganosa. A atração exercida pela Terra sobre você certamente não desapareceu e, na verdade, é apenas ligeiramente menor da que existe quando você está na superfície da Terra.)

A Fig. 6-9 mostra outro exemplo de força centrípeta. Um disco de metal descreve uma circunferência com velocidade constante v, preso por uma corda a um eixo central. Desta vez, a força centrípeta é a tração exercida radialmente pela corda sobre o disco. Sem essa força, o disco se moveria em linha reta, em vez de se mover em círculos.

Observe que a força centrípeta não é um novo tipo de força. O nome simplesmente indica a orientação da força. Na verdade, ela pode ser uma força de atrito, uma força gravitacional, a força exercida pela porta de um carro ou por uma corda ou qualquer outra força. Em qualquer situação:

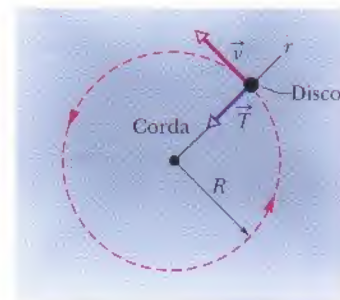


FIG. 6-9 Vista de cima de um disco de metal que se move com velocidade constante v em uma trajetória circular de raio R sobre uma superfície horizontal sem atrito. A força centrípeta que age sobre o disco é $\vec{T}$, a tração da corda, dirigida para o interior da circunferência ao longo do eixo radial r que passa pelo disco.


Uma força centrípeta acelera um corpo modificando a direção da velocidade do corpo sem mudar a velocidade escalar.

De acordo com a segunda lei de Newton e a Eq. 6-17 ($a = v^2/R$), podemos escrever o módulo F de uma força centrípeta (ou de uma força centrípeta resultante) como

$$F = m\frac{v^2}{R} \quad \text{(módulo da força centrípeta).} \tag{6-18}$$

Como a velocidade escalar v, neste caso, é constante, os módulos da aceleração centrípeta e da força centrípeta também são constantes.

Por outro lado, as direções da aceleração centrípeta e da força centrípeta não são constantes; elas variam continuamente, de modo a sempre apontar para o centro do círculo. Por essa razão os vetores força e aceleração são, às vezes, desenhados ao longo de um eixo radial r que se move com o corpo e sempre se estende do centro do círculo até o corpo, como na Fig. 6-9. O sentido positivo do eixo aponta radialmente para fora, mas os vetores aceleração e força apontam para dentro ao longo da direção radial.


TESTE 2 Quando você anda de roda-gigante com velocidade constante, quais são as orientações da sua aceleração $\vec{a}$ e da força normal $\vec{F}_N$ exercida sobre você pelo assento (que está sempre na vertical) quando você passa (a) pelo ponto mais alto e (b) pelo ponto mais baixo da roda?

Exemplo 6-6

Igor é um cosmonauta a bordo da Estação Espacial Internacional, em órbita circular em torno da Terra a uma altitude h de 520 km e com uma velocidade escalar constante v de 7,6 km/s. A massa m de Igor é 79 kg.

(a) Qual é a aceleração de Igor?

IDÉIA-CHAVE Igor está em movimento circular uniforme e, portanto, possui uma aceleração centrípeta cujo módulo é dado pela Eq. 6-17 ($a = v^2/R$).

Cálculo: O raio R do movimento de Igor é $R_T + h$, onde R_T é o raio da Terra ($6{,}37 \times 10^6$ m, conforme o Apêndice C). Assim,

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{R_T + h}$$

$$= \frac{(7{,}6 \times 10^3 \text{ m/s})^2}{6{,}37 \times 10^6 \text{ m} + 0{,}52 \times 10^6 \text{ m}}$$

$$= 8{,}38 \text{ m/s}^2 \approx 8{,}4 \text{ m/s}^2. \quad \text{(Resposta)}$$

Este é o valor da aceleração em queda livre na altitude em que Igor se encontra. Se ele fosse levado até essa altitude e liberado, em vez de ser colocado em órbita, cairia em direção ao centro da Terra, inicialmente com esta aceleração. A diferença entre as duas situações é que, como está em órbita em torno da Terra, Igor possui também um movimento "lateral": enquanto cai, também se desloca para o lado, de modo que acaba se movendo em uma trajetória curva em torno da Terra.

(b) Que força a Terra exerce sobre Igor?

IDÉIAS-CHAVE (1) Deve existir uma força centrípeta agindo sobre Igor para que ele esteja em movimento circular uniforme. (2) Essa força é a força gravitacional $\vec{F}_g$ exercida pela Terra sobre ele, dirigida para o seu centro de rotação (o centro da Terra).

Cálculo: De acordo com a segunda lei de Newton, escrita para as componentes ao longo do eixo radial r, o módulo desta força é dado por

$$F_g = ma = (79 \text{ kg})(8{,}38 \text{ m/s}^2)$$

$$= 662 \text{ N} \approx 660 \text{ N}. \quad \text{(Resposta)}$$

Se Igor subisse em uma balança colocada no alto de uma torre de altura $h = 520$ km, a balança indicaria 660 N. Em órbita, a balança (se Igor conseguisse "subir" nela) indicaria zero, porque ele e a balança estão em queda livre e, portanto, seus pés não exercem uma força sobre a balança.

Exemplo 6-7

Em 1901, em um espetáculo de circo, Allo "Dare Devil" Diavolo apresentou pela primeira vez um número de acrobacia que consistia em descrever um *loop* vertical pedalando uma bicicleta (Fig. 6-10*a*). Supondo que o *loop* seja um círculo de raio $R = 2{,}7$ m, qual é a menor velocidade v que Diavolo podia ter no alto do *loop* para permanecer em contato com a pista?

IDÉIA-CHAVE Podemos supor que Diavolo e sua bicicleta passam pelo alto do *loop* como uma única partícula em movimento circular uniforme. Assim, no alto a aceleração $\vec{a}$ dessa partícula deve ter módulo $a = v^2/R$ dado pela Eq. 6-17 e estar voltada para baixo, em direção ao centro do *loop* circular.

Cálculos: As forças que agem sobre a partícula quando ela está no alto do *loop* aparecem no diagrama de corpo livre da Fig. 6-10*b*. A força gravitacional $\vec{F}_g$ aponta para baixo ao longo do eixo y; o mesmo acontece com a força normal $\vec{F}_N$ exercida pelo *loop* sobre a partícula. A segunda lei de Newton para as componentes y ($F_{res,y} = ma_y$) nos dá

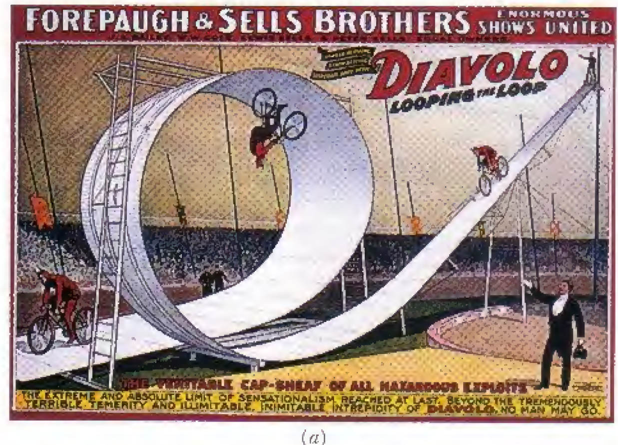
$$-F_N - F_g = m(-a)$$

e

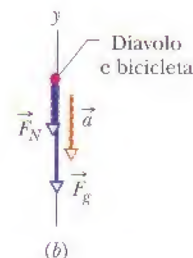
$$-F_N - mg = m\left(-\frac{v^2}{R}\right). \qquad (6\text{-}19)$$

Se a partícula possui a *menor velocidade* v necessária para permanecer em contato com a pista, ela está na *iminência de perder contato* com o *loop* (cair do *loop*), o que significa que $F_N = 0$ no alto do *loop* (a partícula e o piso se tocam, mas não há força normal). Substituindo F_N por 0 na Eq. 6-19, explicitando v e substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$v = \sqrt{gR} = \sqrt{(9{,}8\ \text{m/s}^2)(2{,}7\ \text{m})}$$
$$= 5{,}1\ \text{m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$



(*a*)



(*b*)

FIG. 6-10 (*a*) Cartaz anunciando o número de Diavolo e (*b*) diagrama de corpo livre do artista no alto do *loop*. *(Fotografia da parte a reproduzida com permissão do Circus World Museum)*

Comentários: Diavolo certificou-se de que sua velocidade no alto do *loop* era maior do que 5,1 m/s, a velocidade necessária para não perder contato com o *loop* e cair. Note que essa velocidade necessária é independente da massa de Diavolo e sua bicicleta. Se ele tivesse se empanturrado antes de se apresentar, bastaria exceder a mesma velocidade de 5,1 m/s para não cair do *loop*.

Exemplo 6-8 Aumente sua capacidade

Até algumas pessoas acostumadas a andar de montanha-russa empalidecem quando pensam em andar no Rotor, um grande cilindro oco que gira rapidamente em torno do eixo central (Fig. 6-11). A pessoa entra no cilindro por uma porta lateral e fica de pé sobre um piso móvel, encostada em uma parede acolchoada. A porta é fechada; quando o cilindro começa a girar, a pessoa, a parede e o piso se movem juntos. Quando a velocidade de rotação atinge um certo valor o piso desce de forma abrupta e assustadora. A pessoa não desce junto com o piso, mas fica presa à parede enquanto o cilindro gira, como se um espírito invisível (e não muito amistoso) a pressionasse contra a parede. Algum tempo depois, o piso retorna à posição inicial, o cilindro gira mais devagar e a pessoa desce alguns centímetros até que seus pés encontrem novamente o piso. (Algumas pessoas acham tudo isso muito divertido.)

Suponha que o coeficiente de atrito estático entre a roupa da pessoa e a parede do Rotor seja 0,40 e que o raio do cilindro R seja 2,1 m.

(a) Qual é a menor velocidade v que o cilindro e a pessoa devem ter para que a pessoa não caia quando o piso é removido?

IDÉIAS-CHAVE

1. A força gravitacional $\vec{F}_g$ tende a puxar a pessoa para baixo, mas ela não se move porque existe sobre ela uma força de atrito para cima exercida pela parede (Fig. 6-11).

2. Para que a pessoa esteja na iminência de escorregar para baixo essa força para cima deve ser uma força de atrito *estático* $\vec{f}_s$ com o seu valor máximo $\mu_s F_N$, onde F_N é o módulo da força normal $\vec{F}_N$ exercida pelo cilindro sobre a pessoa (Fig. 6-11).
3. Esta força normal está dirigida horizontalmente para o eixo central do cilindro, e é a força centrípeta que faz com que a pessoa descreva uma trajetória circular com uma aceleração centrípeta de módulo $a = v^2/R$ e dirigida para o centro da circunferência.

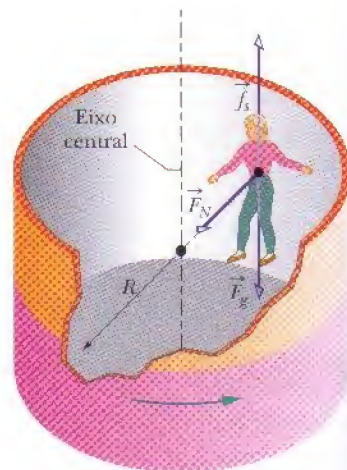


FIG. 6-11 Rotor de um parque de diversões, mostrando as forças que atuam sobre uma pessoa. A força centrípeta é a força normal $\vec{F}_N$, com a qual a parede empurra a pessoa para dentro.

Estamos interessados em calcular a velocidade v nesta última expressão, para a situação em que a pessoa está na iminência de escorregar para baixo.

Cálculos para o eixo vertical: Para começar, introduzimos um eixo vertical y passando pela pessoa, com o sentido positivo para cima. Podemos aplicar a segunda lei de Newton à pessoa, escrevendo-a para as componentes y ($F_{\text{res},y} = ma_y$) na forma

$$f_s - mg = m(0),$$

onde m é a massa da pessoa e mg é o módulo de $\vec{F}_g$. Como a pessoa está na iminência de escorregar, substituímos f_s nesta equação pelo valor máximo $\mu_s F_N$, obtendo

$$\mu_s F_N - mg = 0,$$

ou

$$F_N = \frac{mg}{\mu_s}. \tag{6-20}$$

Cálculos para o eixo radial: Em seguida, introduzimos um eixo radial r passando pela pessoa, com o sentido positivo para fora. Podemos escrever a segunda lei de Newton para as componentes ao longo desse eixo na forma

$$-F_N = m\left(-\frac{v^2}{R}\right). \tag{6-21}$$

Substituindo F_N pelo seu valor, dado pela Eq. 6-20, e explicitando v, obtemos

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\mu_s}} = \sqrt{\frac{(9{,}8\ \text{m/s}^2)(2{,}1\ \text{m})}{0{,}40}}$$
$$= 7{,}17\ \text{m/s} \approx 7{,}2\ \text{m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Note que o resultado é independente da massa; ele é válido para qualquer pessoa que ande no rotor, de uma criança a um lutador de sumô, de modo que ninguém precisa se pesar para andar de Rotor.

(b) Se a massa da pessoa é 49 kg, qual é o módulo da força centrípeta que age sobre ela?

Cálculo: De acordo com a Eq. 6-21,

$$F_N = m\frac{v^2}{R} = (49\ \text{kg})\frac{(7{,}17\ \text{m/s})^2}{2{,}1\ \text{m}}$$
$$\approx 1200\ \text{N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Embora esta força aponte para o eixo central, a pessoa tem a clara sensação de que a força que a prende contra a parede está dirigida radialmente para fora. Esta impressão vem do fato de que a pessoa se encontra em um referencial não-inercial (ela e o referencial estão acelerados). As forças medidas nesse tipo de referencial podem ser ilusórias. A ilusão faz parte da atração do Rotor.

Exemplo 6-9 Aumente sua capacidade

Correndo de cabeça para baixo: Os carros de corrida modernos são projetados de tal forma que o ar em movimento os empurra para baixo, permitindo que façam as curvas em alta velocidade sem derrapar. Esta força para baixo é chamada de *sustentação negativa*. Um carro de corrida pode ter uma sustentação negativa suficiente para andar de cabeça para baixo no teto de uma construção, como fez um carro fictício no filme *MIB – Homens de Preto*?

A Fig. 6-12*a* mostra um carro de corrida de massa m = 600 kg se movendo em uma pista plana na forma de um arco de circunferência de raio R = 100 m. Devido à forma do carro e aos aerofólios, o ar que passa exerce sobre o carro uma sustentação negativa $\vec{F}_S$ dirigida para baixo. O coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista é de 0,75. (Suponha que as forças sobre os quatro pneus são idênticas.)

(a) Se o carro se encontra na iminência de derrapar para fora da curva quando a velocidade escalar é de 28,6 m/s, qual é o módulo de $\vec{F}_S$?

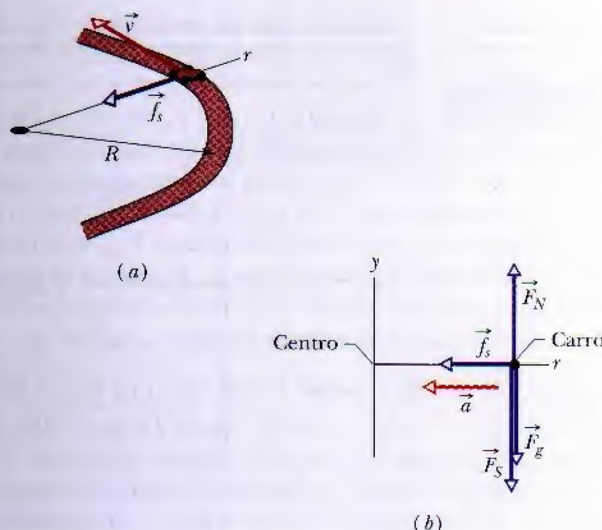


FIG. 6-12 (*a*) Um carro de corrida descreve uma curva em uma pista plana com velocidade escalar constante v. A força centrípeta necessária para que o carro faça a curva é a força de atrito $\vec{f}_s$, orientada segundo um eixo radial r. (*b*) Digrama de corpo livre do carro (fora de escala) em um plano vertical passando por r.

IDÉIAS-CHAVE

1. Como a trajetória do carro é um arco de circunferência, ele está sujeito a uma força centrípeta; essa força aponta para o centro de curvatura do arco (neste caso, é uma força horizontal).
2. A única força horizontal a que o carro está sujeito é a força de atrito exercida pela pista sobre os pneus. Assim, a força centrípeta é uma força de atrito.
3. Como o carro não está derrapando, a força de atrito é a força de atrito *estático* $\vec{f}_s$ (Fig. 6-12*a*).
4. Como o carro se encontra na iminência de derrapar, o módulo f_s da força de atrito é igual ao valor máximo $f_{s,\text{máx}} = \mu_s FN$, onde F_N é o módulo da força normal $\vec{F}_N$ que a pista exerce sobre o carro.

Cálculo para a direção radial: A força de atrito $\vec{f}_s$ aparece no diagrama de corpo livre da Fig. 6-12*b*. Ela aponta no sentido negativo do eixo radial r que se estende do centro de curvatura até o carro. A força produz uma aceleração centrípeta de módulo v^2/R. Podemos relacionar a força e a aceleração escrevendo a segunda lei de Newton para as componentes ao longo do eixo r ($F_{\text{res},r} = ma_r$) na forma

$$-f_s = m\left(-\frac{v^2}{R}\right). \qquad (6\text{-}22)$$

Substituindo f_s por $f_{s,\text{máx}} = \mu_s F_N$ temos:

$$\mu_s F_N = m\left(\frac{v^2}{R}\right). \qquad (6\text{-}23)$$

Cálculo para a direção vertical: Vamos considerar em seguida as forças verticais que agem sobre o carro. A força normal $\vec{F}_N$ aponta para cima, no sentido positivo do eixo y da Fig. 6-12*b*. A força gravitacional $\vec{F}_g = m\vec{g}$ e a sustentação negativa $\vec{F}_S$ apontam para baixo. A aceleração do carro ao longo do eixo y é zero. Assim, podemos escrever a segunda lei de Newton para as componentes ao longo do eixo y ($F_{\text{res},y} = ma_y$) na forma

$$F_N - mg - F_S = 0,$$

ou

$$F_N = mg + F_S. \qquad (6\text{-}24)$$

Combinação dos resultados: Agora podemos combinar os resultados ao longo dos dois eixos explicitando F_N na Eq. 6-23 e substituindo na Eq. 6-24. Fazendo isso e explicitando F_S, obtemos

$$F_S = m\left(\frac{v^2}{\mu_s R} - g\right)$$
$$= (600\text{ kg})\left(\frac{(28{,}6\text{ m/s})^2}{(0{,}75)(100\text{ m})} - 9{,}8\text{ m/s}^2\right)$$
$$= 663{,}7\text{ N} \approx 660\text{ N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Como a força de arrasto (Eq. 6-14), o módulo F_S da sustentação negativa do carro é proporcional a v^2, o quadrado da velocidade do carro. Assim, a sustentação negativa é maior quando o carro está se movendo mais depressa, como acontece quando ele se desloca em um trecho reto da pista. Qual é o módulo da sustentação negativa para uma velocidade de 90 m/s?

IDÉIA-CHAVE F_S é proporcional a v^2.

Cálculos: Podemos escrever a razão entre a sustentação negativa $F_{S,90}$ para $v = 90$ m/s e o nosso resultado para a sustentação negativa F_S correspondente a $v = 28{,}6$ m/s como

$$\frac{F_{S,90}}{F_S} = \frac{(90\text{ m/s})^2}{(28{,}6\text{ m/s})^2}.$$

Fazendo $F_S = 663{,}7$ N e explicitando $F_{S,90}$, obtemos

$$F_{S,90} = 6572\text{ N} \approx 6600\text{ N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Correndo de cabeça para baixo: A força gravitacional é

$$F_g = mg = (600\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)$$
$$= 5880\text{ N}.$$

Com o carro de cabeça para baixo, a sustentação negativa é uma força *para cima* de 6600 N, que excede a força gravitacional para baixo de 5880 N. Assim, um carro de corrida pode se sustentar de cabeça para baixo *contanto* que sua velocidade seja da ordem de 90 m/s (= 324 km/h).

Exemplo 6-10

As curvas das rodovias costumam ser compensadas (inclinadas) para evitar que os carros derrapem. Quando a estrada está seca, a força de atrito entre os pneus e o piso pode ser suficiente para evitar as derrapagens. Quando a pista está molhada, porém, a força de atrito diminui muito e a compensação se torna essencial. A Fig. 6-13*a* mostra um carro de massa m que se move com uma velocidade escalar constante v de 20 m/s em uma pista circular compensada com R = 190 m de raio. (Trata-se de um carro normal, e não de um carro de corrida, o que significa que não existe sustentação negativa.) Se a força de atrito exercida pelo piso é desprezível, qual é o menor valor do ângulo de elevação θ para o qual o carro não derrapa?

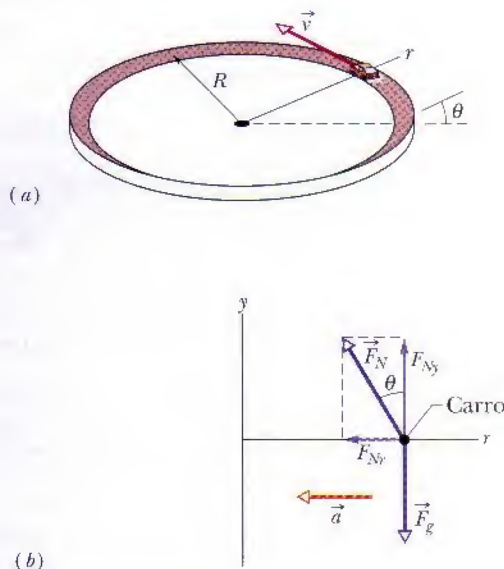


FIG. 6-13 (*a*) Um carro faz uma curva compensada com velocidade escalar constante v. O ângulo de inclinação está exagerado para maior clareza. (*b*) Diagrama de corpo livre do carro, supondo que o atrito entre os pneus e a estrada é nulo e que o carro não possui sustentação negativa. A componente radial para dentro F_{Nr} da força normal (ao longo do eixo radial r) fornece a força centrípeta e a aceleração radial necessárias.

IDÉIA-CHAVE Ao contrário do que acontece no Exemplo 6-9, a pista possui uma inclinação para que a força normal $\vec{F}_N$ que age sobre o carro tenha uma componente na direção do centro da curva (Fig. 6-13*b*). Assim, $\vec{F}_N$ possui agora uma componente centrípeta, de módulo F_{Nr}, na direção radial r. Queremos calcular o valor do ângulo de inclinação θ para que esta componente centrípeta mantenha o carro na pista circular sem necessidade do atrito.

Cálculo na direção radial: Como mostra a Fig. 6-13*b* (e o leitor pode verificar), o ângulo que a força $\vec{F}_N$ faz com a vertical é igual ao ângulo de inclinação θ da pista. Assim, a componente radial F_{Nr} é igual a F_N sen θ. Podemos agora escrever a segunda lei de Newton para as componentes ao longo do eixo r ($F_{\text{res},r} = ma_r$) como

$$-F_N \text{ sen } \theta = m\left(-\frac{v^2}{R}\right). \tag{6-25}$$

Não podemos obter o valor de θ nesta equação, porque ela também contém as incógnitas F_N e m.

Cálculo na direção vertical: Vamos considerar as forças e acelerações ao longo do eixo y da Fig. 6-13*b*. A componente vertical da força normal é $F_{Ny} = F_N \cos\theta$, a força gravitacional $\vec{F}_g$ tem módulo mg e a aceleração do carro ao longo do eixo y é zero. Assim, podemos escrever a segunda lei de Newton para as componentes ao longo do eixo y ($F_{\text{res},y} = ma_y$) como

$$F_N \cos\theta - mg = m(0),$$

e portanto

$$F_N \cos\theta = mg. \tag{6-26}$$

Combinação dos resultados: A Eq. 6-26 também contém as incógnitas F_N e m, mas observe que, dividindo a Eq. 6-25 pela Eq. 6-26, eliminamos as duas incógnitas. Procedendo dessa forma, substituindo (sen θ)/(cos θ) por tan θ e explicitando θ, obtemos

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v^2}{gR}$$

$$= \tan^{-1}\frac{(20 \text{ m/s})^2}{(9{,}8 \text{ m/s}^2)(190 \text{ m})} = 12°. \qquad \text{(Resposta)}$$

REVISÃO E RESUMO

Atrito Quando uma força $\vec{F}$ tende a fazer um corpo deslizar sobre uma superfície, uma **força de atrito** é exercida pela superfície sobre o corpo. A força de atrito é paralela à superfície e está orientada de modo a se opor ao movimento. Esta força se deve às ligações entre os átomos do corpo e os átomos da superfície.

Se o corpo não se move, a força de atrito é a **força de atrito estático** $\vec{f}_s$. Se o corpo se move, a força de atrito é a **força de atrito cinético** $\vec{f}_k$.

1. Se um corpo não se move, a força de atrito estático $\vec{f}_s$ e a componente de $\vec{F}$ paralela à superfície têm módulos iguais e sentidos opostos. Se a componente de $\vec{F}$ aumenta, f_s também aumenta.

2. O módulo de $\vec{f}_s$ tem um valor máximo $f_{s,\text{máx}}$ dado por

$$f_{s,\text{máx}} = \mu_s F_N, \tag{6-1}$$

onde μ_s é o **coeficiente de atrito estático** e F_N é o módulo da força normal. Se a componente de $\vec{F}$ paralela à superfície excede o valor de $f_{s,máx}$, o corpo escorrega sobre a superfície.

3. Se o corpo começa a escorregar sobre a superfície, o módulo da força de atrito diminui rapidamente para um valor constante f_k dado por

$$f_k = \mu_k F_N, \tag{6-2}$$

onde μ_k é o **coeficiente de atrito cinético**.

Força de Arrasto Quando há movimento relativo entre o ar (ou algum outro fluido) e um corpo, o corpo sofre a ação de uma **força de arrasto** $\vec{D}$ que se opõe ao movimento relativo e aponta na direção em que o fluido se move em relação ao corpo. O módulo de $\vec{D}$ está relacionado à velocidade relativa v através de um **coeficiente de arrasto** C (determinado experimentalmente) através da equação

$$D = \tfrac{1}{2} C\rho A v^2, \tag{6-14}$$

onde ρ é a densidade do fluido (massa por unidade de volume) e A é a **área da seção reta efetiva** do corpo (área de uma seção reta tomada perpendicular à velocidade relativa $\vec{v}$).

Velocidade Terminal Quando um objeto rombudo cai por uma distância suficiente no ar, os módulos da força de arrasto $\vec{D}$ e da força gravitacional $\vec{F}_g$ tornam-se iguais. Nesse caso, o corpo passa a cair com uma **velocidade terminal** v_t dada por

$$v_t = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho A}}. \tag{6-16}$$

Movimento Circular Uniforme Se uma partícula se move em uma circunferência ou em um arco de circunferência de raio R com uma velocidade escalar constante v, dizemos que a partícula está em **movimento circular uniforme**. Nesse caso, ela possui uma **aceleração centrípeta** $\vec{a}$ cujo módulo é dado por

$$a = \frac{v^2}{R}. \tag{6-17}$$

Esta aceleração se deve a uma **força centrípeta** cujo módulo é dado por

$$F = \frac{mv^2}{R}, \tag{6-18}$$

onde m é a massa da partícula. As grandezas vetoriais $\vec{a}$ e $\vec{F}$ apontam para o centro de curvatura da trajetória da partícula.

PERGUNTAS

1 Na Fig. 6-14, uma força horizontal $\vec{F}_1$ de módulo 10 N é aplicada a uma caixa que está sobre um piso, mas a caixa não se move. Quando o módulo da força vertical $\vec{F}_2$ aumenta a partir de zero, as grandezas a seguir aumentam, diminuem ou permanecem as mesmas: (a) o módulo da força de atrito estático $\vec{f}_s$ a que a caixa está submetida; (b) o módulo da força normal $\vec{F}_N$ exercida pelo piso sobre a caixa; (c) o valor máximo $f_{s,máx}$ do módulo da força de atrito estático a que a caixa está submetida? (d) A caixa acaba escorregando?

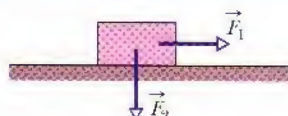


FIG. 6-14 Pergunta 1.

2 Em três experimentos, três forças horizontais diferentes são aplicadas ao mesmo bloco que está sobre a mesma bancada. Os módulos das forças são $F_1 = 12$ N, $F_2 = 8$ N e $F_3 = 4$ N. Em cada experimento o bloco permanece estacionário, mesmo com a aplicação da força. Ordene as forças, em ordem decrescente, de acordo (a) com o módulo f_s da força de atrito estático que a bancada exerce sobre o bloco e (b) com o valor máximo $f_{s,máx}$ dessa força.

3 Na Fig. 6-15, se a caixa está parada e o ângulo θ entre a horizontal e a força $\vec{F}$ aumenta, as grandezas a seguir aumentam, diminuem ou permanecem com o mesmo valor: (a) F_x; (b) f_s; (c) F_N; (d) $f_{s,máx}$? (e) Se, ao contrário, a caixa está em movimento e θ aumenta, o módulo da força de atrito a que a caixa está submetida aumenta, diminui ou permanece o mesmo?

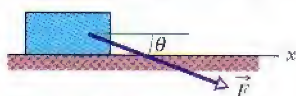


FIG. 6-15 Pergunta 3.

4 Repita a Pergunta 3 para o caso de a força $\vec{F}$ estar orientada para cima e não para baixo, como na figura.

5 Se você pressiona um caixote de maçãs contra uma parede com tanta força que o caixote não escorrega parede abaixo, qual é a orientação (a) da força de atrito estático $\vec{f}_s$ que a parede exerce sobre o caixote e (b) da força normal $\vec{F}_N$ que a parede exerce sobre o caixote? Se empurra o caixote com mais força, o que acontece (c) com f_s (d) com F_N e (e) com $f_{s,máx}$?

6 Na Fig. 6-16, um bloco de massa m é mantido estacionário sobre uma rampa pela força de atrito que a rampa exerce sobre ele. Uma força $\vec{F}$, dirigida para cima ao longo da rampa, é aplicada ao bloco e seu módulo aumentado gradualmente a partir de zero. Durante esse aumento, o que acontece com a orientação e o módulo da força de atrito que age sobre o bloco?



FIG. 6-16 Pergunta 6.

7 Responda à Pergunta 6 se a força $\vec{F}$ estiver orientada para baixo ao longo da rampa. Quando o módulo de $\vec{F}$ aumenta a partir de zero, o que acontece com a orientação e o módulo da força de atrito que age sobre o bloco?

8 Na Fig. 6-17, uma força horizontal de 100 N vai ser aplicada a uma prancha de 10 kg, que está inicialmente em repouso sobre um piso liso sem atrito, para acelerar a prancha. Um bloco de 10 kg repousa sobre a superfície da prancha; o coeficiente de atrito μ entre o bloco e a prancha não é conhecido e o bloco está solto, podendo escorregar sobre a prancha. (a) Considerando essa possibilidade, qual é o intervalo de valores possíveis para o módulo a_p da aceleração da prancha? (*Sugestão:* Não é preciso fazer nenhum cálculo complicado; basta considerar valores extremos de μ.) (b) Qual é o intervalo de valores possíveis para o módulo a_b da aceleração do bloco?



FIG. 6-17 Pergunta 8.

9 Uma pessoa que está andando de roda-gigante passa pelas seguintes posições: (1) ponto mais alto da roda, (2) ponto mais baixo da roda; (3) ponto médio da roda. Se a roda está girando com velocidade angular constante, ordene as três posições, em ordem decrescente, de acordo (a) com o módulo da aceleração centrípeta da pessoa; (b) com o módulo da força centrípeta resultante a que a pessoa está sujeita e (c) com o módulo da força normal a que a pessoa está sujeita.

10 Em 1987, para comemorar o dia de Halloween, dois pára-quedistas trocaram uma abóbora entre si enquanto estavam em queda livre, a oeste de Chicago. A brincadeira foi muito divertida até que o homem que estava com a abóbora abriu o pára-quedas. A abóbora foi arrancada de suas mãos, despencou 0,5 km, atravessou o telhado de uma casa, bateu no chão da cozinha e se espalhou por toda a cozinha recém-reformada. O que fez o pára-quedista deixar cair a abóbora, do ponto de vista do pára-quedista e do ponto de vista da abóbora?

11 A Fig. 6-18 mostra a trajetória de um carrinho de parque de diversões que passa, com velocidade escalar constante, por cinco arcos circulares de raios R_0, $2R_0$ e $3R_0$. Ordene os arcos, de acordo com o módulo da força centrípeta que age sobre o carrinho ao passar pelos arcos, começando pelo maior.

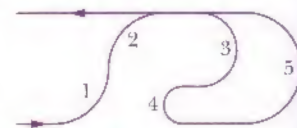


FIG. 6-18 Pergunta 11.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

 Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 6-3 Propriedades do Atrito

•1 Uma cômoda com uma massa de 45 kg, incluindo as gavetas e as roupas, está em repouso sobre o piso. (a) Se o coeficiente de atrito estático entre a cômoda e o piso é 0,45, qual é o módulo da menor força horizontal necessária para fazer a cômoda entrar em movimento? (b) Se as gavetas e as roupas, com uma massa total de 17 kg, são removidas antes de empurrar a cômoda, qual é o novo módulo mínimo?

•2 *As misteriosas pedras que migram.* Na remota Racetrack Playa, no Vale da Morte, Califórnia, as pedras às vezes deixam rastros no chão do deserto, como se estivessem migrando (Fig. 6-19). Há muitos anos que os cientistas tentam explicar como as pedras se movem. Uma possível explicação é que, durante uma tempestade ocasional, os fortes ventos arrastam as pedras no solo amolecido pela chuva. Quando o solo seca, os rastros deixados pelas pedras são endurecidos pelo calor. Segundo medições realizadas no local, o coeficiente de atrito cinético entre as pedras e o solo úmido do deserto é aproximadamente 0,80. Qual é a força horizontal necessária para manter em movimento uma pedra de 20 kg (uma massa típica) depois que uma rajada de vento a coloca em movimento? (A história continua no Problema 39.)



FIG. 6-19 Problema 2. O que fez a pedra se mover? *(Jerry Schad/Photo Researchers)*

•3 Uma pessoa empurra horizontalmente um caixote de 55 kg com uma força de 220 N para deslocá-lo em um piso plano. O coeficiente de atrito cinético é 0,35. (a) Qual é o módulo da força de atrito? (b) Qual é o módulo da aceleração do caixote?

•4 Um jogador de beisebol de massa $m = 79$ kg, deslizando para chegar à segunda base, é retardado por uma força de atrito de módulo 470 N. Qual é o coeficiente de atrito cinético μ_k entre o jogador e o chão?

•5 O piso de um vagão de trem está carregado de caixas soltas cujo coeficiente de atrito estático com o piso é 0,25. Se o trem está se movendo inicialmente com uma velocidade de 48 km/h, qual é a menor distância na qual o trem pode ser parado com aceleração constante sem que as caixas deslizem no piso?

•6 Um porco brincalhão escorrega em uma certa rampa com uma inclinação de 35° e leva o dobro do tempo que levaria se não houvesse atrito. Qual é o coeficiente de atrito cinético entre o porco e a rampa?

•7 Um bloco de 3,5 kg é empurrado ao longo de um piso horizontal por uma força $\vec{F}$ de módulo 15 N que faz um ângulo $\theta = 40°$ com a horizontal (Fig. 6-20). O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso é 0,25. Calcule (a) o módulo da força de atrito que o piso exerce sobre o bloco e (b) o módulo da aceleração do bloco.

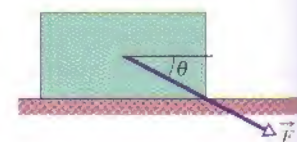


FIG. 6-20 Problemas 7 e 24.

•8 Em um jogo de shuffleboard improvisado, estudantes enlouquecidos pelos exames finais usam uma vassoura para movimentar um livro de cálculo no corredor do dormitório. Se o livro de 3,5 kg adquire uma velocidade de 1,60 m/s ao ser empurrado pela vassoura, a partir do repouso, com uma força horizontal de 25 N, por uma distância de 0,90 m, qual é o coeficiente de atrito cinético entre o livro e o piso?

•9 Um bloco de 2,5 kg está inicialmente em repouso em uma superfície horizontal. Uma força horizontal $\vec{F}$ de módulo 6,0 N e uma força vertical $\vec{P}$ são aplicadas ao bloco (Fig. 6-21). Os coeficientes de atrito entre o bloco e a superfície são $\mu_s = 0,40$ e μ_k

= 0,25. Determine o módulo da força de atrito que age sobre o bloco se o módulo de $\vec{P}$ é (a) 8,0 N, (b) 10 N e (c) 12 N.

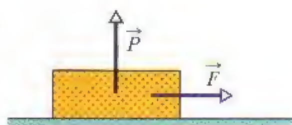


FIG. 6-21 Problema 9.

•**10** Por volta de 1915 Henry Sincosky, de Filadélfia, pendurou-se no caibro de um telhado, apertando-o com os polegares de um lado e os outros dedos do outro lado (Fig. 6-22). A massa de Sincosky era de 79 kg. Se o coeficiente de atrito estático entre as mãos e o caibro era de 0,70, qual foi, no mínimo, o módulo da força normal exercida sobre o caibro pelos polegares ou os dedos do lado oposto? (Depois de se pendurar, Sincosky ergueu o corpo e deslocou-se ao longo do caibro, trocando de mão. Se você não dá valor ao feito de Sincosky, tente repetir a proeza.)



FIG. 6-22 Problema 10.

•**11** Um operário empurra um engradado de 35 kg com uma força horizontal de módulo 110 N. O coeficiente de atrito estático entre o engradado e o piso é 0,37. (a) Qual é o valor de $f_{s,\text{máx}}$ nessas circunstâncias? (b) O engradado se move? (c) Qual é a força de atrito que o piso exerce sobre o engradado? (d) Suponha que um segundo operário, no intuito de ajudar, puxe o engradado para cima. Qual é o menor puxão vertical que permite ao primeiro operário mover o engradado com o empurrão de 110 N? (e) Se, em vez disso, o segundo operário tenta ajudar puxando horizontalmente o engradado, qual é o menor puxão que coloca o engradado em movimento?

•**12** A Fig. 6-23 mostra a seção transversal de uma estrada na encosta de uma montanha. A reta AA' representa um plano de estratificação ao longo do qual pode ocorrer um deslizamento. O bloco B, situado acima da estrada, está separado do resto da montanha por uma grande fenda (chamada *junta*), de modo que somente o atrito entre o bloco e o plano de estratificação evita o deslizamento. A massa do bloco é $1{,}8 \times 10^7$ kg, o *ângulo de mergulho* θ do plano de estratificação é 24° e o coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano é 0,63. (a) Mostre que o bloco não desliza. (b) A água penetra na junta e se expande após congelar, exercendo sobre o bloco uma força $\vec{F}$ paralela a AA'. Qual é o valor mínimo do módulo F da força para o qual haverá um deslizamento?

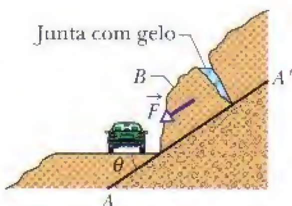


FIG. 6-23 Problema 12.

•**13** Um caixote de 68 kg é arrastado sobre um piso, puxado por uma corda inclinada 15° acima da horizontal. (a) Se o coeficiente de atrito estático é 0,50, qual é o valor mínimo do módulo da força para que o caixote comece a se mover? (b) Se $\mu_s = 0{,}35$, qual é o módulo da aceleração inicial do caixote?

•**14** A Fig. 6-24 mostra um bloco inicialmente estacionário de massa m sobre um piso. Uma força de módulo $0{,}500mg$ é aplicada com um ângulo $\theta = 20°$ para cima. Qual é o módulo da aceleração do bloco se (a) $\mu_s = 0{,}600$ e $\mu_k = 0{,}500$ e (b) $\mu_s = 0{,}400$ e $\mu_k = 0{,}300$?

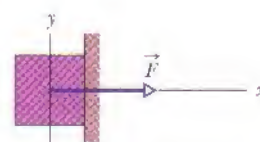


FIG. 6-24 Problema 14.

•**15** O coeficiente de atrito estático entre o Teflon e ovos mexidos é cerca de 0,04. Qual é o menor ângulo com a horizontal que faz com que os ovos deslizem no fundo de uma frigideira revestida com Teflon?

••**16** Você depõe como *perito* em um caso envolvendo um acidente no qual um carro A bateu na traseira de um carro B que estava parado em um sinal vermelho no meio de uma ladeira (Fig. 6-25). Você descobre que a inclinação da ladeira é $\theta = 12°$, que os carros estavam separados por uma distância $d = 24{,}0$ m quando o motorista do carro A freou bruscamente, travando as rodas (o carro não dispunha de freios ABS), e que a velocidade do carro A no momento em que o motorista pisou no freio era $v_0 = 18$ m/s. Com que velocidade o carro A bateu no carro B se o coeficiente de atrito cinético era (a) 0,60 (estrada seca) e (b) 0,10 (estrada coberta de folhas molhadas)?

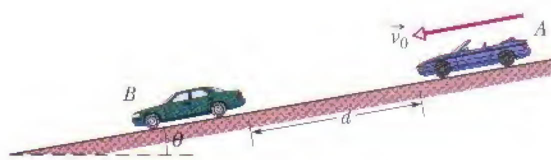


FIG. 6-25 Problema 16.

••**17** Uma força horizontal $\vec{F}$ de 12 N empurra um bloco de 5,0 N de peso contra uma parede vertical (Fig. 6-26). O coeficiente de atrito estático entre a parede e o bloco é 0,60 e o coeficiente de atrito cinético é 0,40. Suponha que o bloco não esteja se movendo inicialmente. (a) O bloco vai se mover? (b) Qual é a força que a parede exerce sobre o bloco em termos dos vetores unitários?

FIG. 6-26 Problema 17.

••**18** Um bloco de 4,10 kg é empurrado sobre um piso pela aplicação de uma força horizontal constante de módulo 40,0 N. A Fig. 6-27 mostra velocidade do bloco v em função do tempo t quando o bloco se desloca sobre o piso ao longo de um eixo x. A escala vertical do gráfico é definida por $v_s = 5{,}0$ m/s. Qual é o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso?

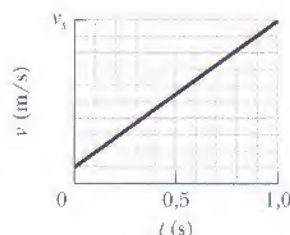


FIG. 6-27 Problema 18.

••**19** Uma caixa de areia, inicialmente estacionária, vai ser puxada em um piso por meio de um cabo no qual a tensão não deve exceder 1100 N. O coeficiente de atrito estático entre a caixa e o piso é de 0,35. (a) Qual deve ser o ângulo entre o cabo e a horizontal para que se consiga puxar a maior quantidade possível de areia e (b) qual é o peso da areia e da caixa nessa situação?

••**20** Um trenó com um pingüim, pesando 80 N, está em repouso sobre uma ladeira de ângulo $\theta = 20°$ com a horizontal (Fig. 6-28). Entre o trenó e a ladeira o coeficiente de atrito estático é

0,25 e o coeficiente de atrito cinético é 0,15. (a) Qual é o menor módulo da força $\vec{F}$, paralela ao plano, que impede o trenó de deslizar ladeira abaixo? (b) Qual é o menor módulo F que faz o trenó começar a subir a ladeira? (c) Qual é o valor de F que faz o trenó subir a ladeira com velocidade constante?

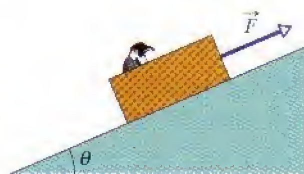


FIG. 6-28 Problemas 20 e 26.

••21 Na Fig. 6-29, uma força $\vec{P}$ atua sobre um bloco com 45 N de peso. O bloco está inicialmente em repouso sobre um plano inclinado de ângulo $\theta = 15°$ com a horizontal. O sentido positivo do eixo x é para cima ao longo do plano. Os coeficientes de atrito entre o bloco e o plano são $\mu_s = 0{,}50$ e $\mu_k = 0{,}34$. Em termos dos vetores unitários, qual é a força de atrito exercida pelo plano sobre o bloco quando $\vec{P}$ é igual a (a) $(-5{,}0\ \text{N})\hat{\text{i}}$, (b) $(-8{,}0\ \text{N})\hat{\text{i}}$ e (c) $(-15{,}0\ \text{N})\hat{\text{i}}$?

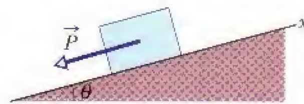


FIG. 6-29 Problema 21.

••22 Na Fig. 6-30, uma caixa de cereal Cheerios (massa $m_C = 1{,}0$ kg) e uma caixa de cereal Wheaties (massa $m_W = 3{,}0$ kg) são aceleradas sobre uma superfície horizontal por uma força horizontal $\vec{F}$ aplicada à caixa de cereal Cheerios. O módulo da força de atrito que age sobre a caixa de Cheerios é de 2,0 N, e o módulo da força de atrito que age sobre a caixa de Wheaties é de 4,0 N. Se o módulo de $\vec{F}$ é de 12 N, qual é o módulo da força que a caixa de Cheerios exerce sobre a caixa de Wheaties?

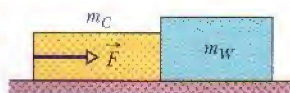


FIG. 6-30 Problema 22.

••23 O bloco B da Fig. 6-31 pesa 711 N. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a mesa é de 0,25; o ângulo θ é de 30°; suponha que o trecho da corda entre o bloco B e o nó é horizontal. Determine o peso máximo do bloco A para o qual o sistema permanece em repouso.

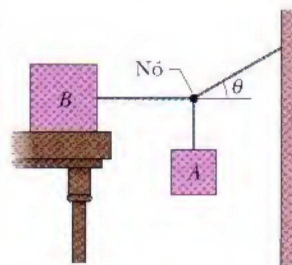


FIG. 6-31 Problema 23.

••24 Um bloco é empurrado sobre um piso horizontal por uma força constante que é aplicada fazendo um ângulo θ para baixo (Fig. 6-20). A Fig. 6-32 mostra o módulo da aceleração a em função do coeficiente de atrito cinético μ_k entre o bloco e o piso. Se $a_1 = 3{,}0$ m/s², $\mu_{k2} = 0{,}20$ e $\mu_{k3} = 0{,}40$, qual é o valor de θ?

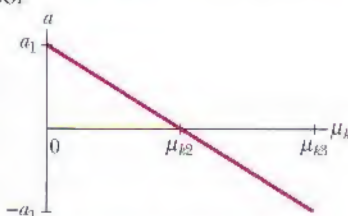


FIG. 6-32 Problema 24.

••25 Quando os três blocos da Fig. 6-33 são liberados a partir do repouso, aceleram com um módulo de 0,500 m/s². O bloco 1 tem massa M, o bloco 2 tem massa $2M$ e o bloco 3 tem massa $2M$. Qual é o coeficiente de atrito cinético entre o bloco 2 e a mesa?

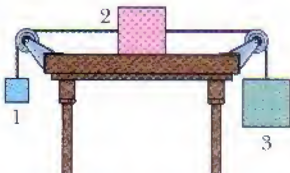


FIG. 6-33 Problema 25.

••26 Na Fig. 6-28, um trenó é sustentado em um plano inclinado por uma corda que o puxa para cima paralelamente ao plano. O trenó está na iminência de começar a subir. A Fig. 6-34 mostra o módulo F da força aplicada à corda em função do coeficiente de atrito estático μ_s entre o trenó e o plano. Se $F_1 = 2{,}0$ N, $F_2 = 2{,}0$ N e $\mu_2 = 0{,}50$, qual é o valor do ângulo θ do plano inclinado?

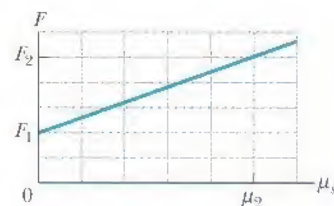


FIG. 6-34 Problema 26.

••27 Dois blocos, com 3,6 N e 7,2 N de peso, estão ligados por uma corda sem massa e deslizam para baixo em um plano inclinado de 30°. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco mais leve e o plano é de 0,10, e o coeficiente de atrito cinético entre o bloco mais pesado e o plano é de 0,20. Supondo que o bloco mais leve desce na frente, determine (a) o módulo da aceleração dos blocos e (b) a tensão da corda.

••28 A Fig. 6-35 mostra três caixotes sendo empurrados sobre um piso de concreto por uma força horizontal $\vec{F}$ de módulo 440 N. As massas dos caixotes são $m_1 = 30{,}0$ kg, $m_2 = 10{,}0$ kg e $m_3 = 20{,}0$ kg. O coeficiente de atrito cinético entre o piso e cada um dos caixotes é de 0,700. (a) Qual é o módulo F_{32} da força exercida sobre o bloco 3 pelo bloco 2? (b) Se os caixotes deslizassem sobre um piso polido, cujo coeficiente de atrito cinético fosse menor que 0,700, o módulo F_{32} seria maior, menor ou igual ao seu valor quando o coeficiente de atrito era 0,700?

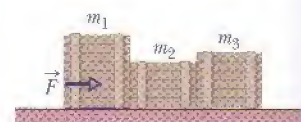


FIG. 6-35 Problema 28.

••29 O bloco A da Fig. 6-36 pesa 102 N, e o bloco B pesa 32 N. Os coeficientes de atrito entre A e a rampa são $\mu_s = 0{,}56$ e $\mu_k = 0{,}25$. O ângulo θ é igual a 40°. Suponha que o eixo x é paralelo à rampa, com o sentido positivo para cima. Em termos dos vetores unitários, qual é a aceleração de A se A está inicialmente (a) em repouso, (b) subindo a rampa e (c) descendo a rampa?

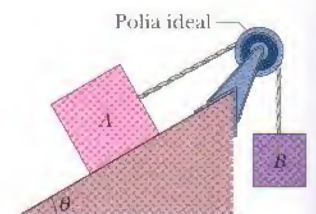


FIG. 6-36 Problemas 29 e 30.

••30 Na Fig. 6-36, dois blocos estão ligados por um fio que passa por uma polia. A massa do bloco A é de 10 kg e o coeficiente de atrito cinético entre A e a rampa é de 0,20. O ângulo θ da rampa é de 30°. O bloco A desliza para baixo ao longo da rampa com velocidade constante. Qual é a massa do bloco B?

••31 Na Fig. 6-37, os blocos A e B pesam 44 N e 22 N, respectivamente. (a) Determine o menor peso do bloco C que evita que o bloco A deslize, se μ_s entre A e a mesa é 0,20. (b) O bloco C é removido bruscamente de cima do bloco A. Qual é a aceleração do bloco A se μ_k entre A e a mesa é 0,15?

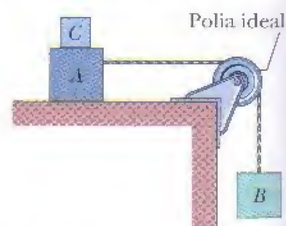


FIG. 6-37 Problema 31.

••32 Uma caixa de brinquedos e seu conteúdo têm um peso total de 180 N. O coeficiente de atrito estático entre a caixa de brinquedos e o piso é de 0,42. A criança da Fig. 6-38 tenta arrastar a caixa puxando-a por uma corda. (a) Se $\theta = 42°$, qual é o módulo da força $\vec{F}$ que a criança deve fazer sobre a corda para que a

caixa esteja na iminência de se mover? (b) Escreva uma expressão para o menor valor do módulo de $\vec{F}$ necessário para que a caixa se mova em função do ângulo θ. Determine (c) o valor de θ para o qual F é mínimo e (d) o valor desse módulo mínimo.

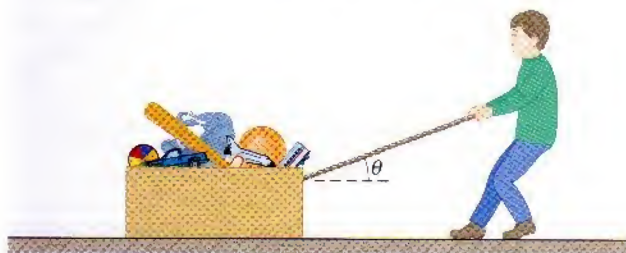


FIG. 6-38 Problema 32.

••33 Os dois blocos (m = 16 kg e M = 88 kg) da Fig. 6-39 não estão ligados. O coeficiente de atrito estático entre os blocos é μ_s = 0,38, mas não há atrito na superfície abaixo do bloco maior. Qual é o menor valor do módulo da força horizontal $\vec{F}$ para o qual o bloco menor não escorregue para baixo ao longo do bloco maior?

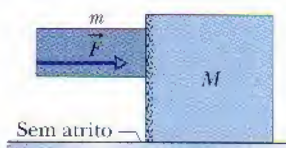


FIG. 6-39 Problema 33.

•••34 Na Fig. 6-40, uma prancha de massa m_1 = 40 kg repousa em um piso sem atrito e um bloco de massa m_2 = 10 kg repousa sobre a prancha. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a prancha é de 0,60, e o coeficiente de atrito cinético é de 0,40. O bloco é puxado por uma força horizontal $\vec{F}$ de módulo 100 N. Em termos dos vetores unitários, quais são as acelerações (a) do bloco e (b) da prancha?

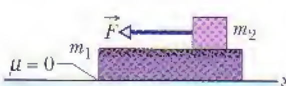


FIG. 6-40 Problema 34.

•••35 Um barco de 1000 kg está navegando a 90 km/h quando o motor é desligado. O módulo da força de atrito $\vec{f}_k$ entre o barco e a água é proporcional à velocidade v do barco: $f_k = 70v$, onde v está em metros por segundo e f_k em newtons. Determine o tempo necessário para o barco reduzir a velocidade para 45 km/h.

seção 6-4 Força de Arrasto e Velocidade Terminal

•36 A velocidade terminal de um pára-quedista é de 160 km/h na posição de águia e 310 km/h na posição de mergulho de cabeça. Supondo que o coeficiente de arrasto C do pára-quedista não mude de uma posição para outra, determine a razão entre a área da seção reta efetiva A na posição de menor velocidade e a área na posição de maior velocidade.

••37 Calcule a razão entre a força de arrasto experimentada por um avião a jato voando a 1000 km/h a uma altitude de 10 km e a força de arrasto experimentada por um avião a hélice voando com metade da velocidade e a metade da altitude. A densidade do ar é de 0,38 kg/m^3 a 10 km e 0,67 kg/m^3 a 5,0 km. Suponha que os aviões possuem a mesma área de seção reta efetiva e o mesmo coeficiente de arrasto C.

••38 Ao descer uma encosta, um esquiador é freado pela força de arrasto que o ar exerce sobre o seu corpo e pela força de atrito cinético que a neve exerce sobre os esquis. (a) Suponha que o ângulo da encosta é θ = 40,0°, que a neve é neve seca, com um coeficiente de atrito cinético μ_k = 0,0400, que a massa do esquiador e seu equipamento é m = 85,0 kg, que a área da seção reta do esquiador (agachado) é A = 1,30 m^2, que o coeficiente de arrasto é C = 0,150 e que a massa específica do ar é 1,20 kg/m^3. (a) Qual é a velocidade terminal? (b) Se o esquiador pode fazer o coeficiente de arrasto C sofrer uma pequena variação dC alterando, por exemplo, a posição das mãos, qual é a variação correspondente da velocidade terminal?

••39 *Continuação do Problema 2.* Suponha agora que a Eq. 6-14 forneça o módulo da força de arrasto que age sobre uma pedra típica de 20 kg, que apresenta ao vento uma área de seção reta vertical de 0,040 m^2 e tem um coeficiente de arrasto C de 0,80. Tome a massa específica do ar como sendo de 1,21 kg/m^3 e o coeficiente de atrito cinético como sendo de 0,80. (a) Em quilômetros por hora, que velocidade V de um vento paralelo ao solo é necessária para manter a pedra em movimento depois que ela começa a se mover? Como a velocidade do vento perto do solo é reduzida pela presença do solo, a velocidade do vento informada nos boletins meteorológicos é freqüentemente medida a uma altura de 10 m. Suponha que a velocidade do vento a esta altura seja 2,00 vezes maior que junto ao solo. (b) Para a resposta do item (a), que velocidade do vento deveria ser informada nos boletins meteorológicos? (c) Este valor é razoável para um vento de alta velocidade durante uma tempestade? (A história continua com o Problema 61.)

••40 Suponha que a Eq. 6-14 forneça a força de arrasto a que estão sujeitos um piloto e seu assento de ejeção imediatamente após terem sido ejetados de um avião voando horizontalmente a 1300 km/h. Suponha também que a massa do assento seja igual à massa do piloto e que o coeficiente de arrasto seja o mesmo de um pára-quedista. Fazendo uma estimativa razoável para a massa do piloto e usando o valor apropriado de v_t da Tabela 6-1, estime o módulo (a) da força de arrasto sobre o conjunto *piloto + assento* e (b) da desaceleração horizontal (em termos de g), do conjunto, ambos imediatamente após a ejeção. [O resultado do item (a) deve servir de alerta para os projetistas: o assento precisa dispor de um anteparo para desviar o vento da cabeça do piloto.]

seção 6-5 Movimento Circular Uniforme

•41 Qual é o menor raio de uma curva sem compensação (plana) que permite que um ciclista a 29 km/h faça a curva sem derrapar se o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista é de 0,32?

•42 Durante uma corrida de trenós nas Olimpíadas de Inverno, a equipe jamaicana fez uma curva de 7,6 m de raio com uma velocidade de 96,6 km/h. Qual foi a sua aceleração em unidades de g?

•43 Um gato está cochilando em um carrossel parado, a uma distância de 5,4 m do centro. O brinquedo é ligado e logo atinge a velocidade normal de funcionamento, na qual completa uma volta a cada 6,0 s. Qual deve ser, no mínimo, o coeficiente de atrito estático entre o gato e o carrossel para que o gato permaneça no mesmo lugar, sem escorregar?

•44 Suponha que o coeficiente de atrito estático entre a estrada e os pneus de um carro é de 0,60 e que o carro não tem sustentação negativa. Que velocidade deixa o carro na iminência de derrapar quando ele faz uma curva não-compensada com 30,5 m de raio?

••45 Um viciado em movimentos circulares, com 80 kg de massa, está andando em uma roda-gigante que descreve uma circunferência vertical de 10 m de raio a uma velocidade escalar constante de 6,1 m/s. (a) Qual é o período do movimento? Qual é o módulo da força normal exercida pelo assento sobre o viciado

quando ambos passam (b) pelo ponto mais alto da trajetória circular e (c) pelo ponto mais baixo?

••46 Um carro de montanha-russa tem uma massa de 1200 kg quando está lotado. Quando o carro passa pelo alto de uma elevação circular com 18 m de raio sua velocidade escalar se mantém constante. Nesse instante, quais são (a) o módulo F_N e (b) o sentido (para cima ou para baixo) da força normal exercida pelo trilho sobre o carro se a velocidade do carro é $v = 11$ m/s? Quais são (c) F_N e (d) o sentido da força normal se $v = 14$ m/s?

••47 Na Fig. 6-41, um carro passa com velocidade constante por uma elevação circular e por uma depressão circular de mesmo raio. No alto da elevação a força normal exercida sobre o motorista pelo assento do carro é zero. A massa do motorista é de 70,0 kg. Qual é o módulo da força normal exercida pelo assento sobre o motorista quando o carro passa pelo fundo do vale?

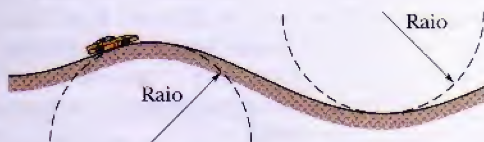


FIG. 6-41 Problema 47.

••48 Uma policial de 55,0 kg, que está perseguindo um suspeito de carro, faz uma curva circular de 300 m de raio a uma velocidade escalar constante de 80 km/h. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação à vertical) da força *resultante* que a policial exerce sobre o assento do carro. (*Sugestão:* Considere as forças horizontais e verticais.)

••49 Um estudante que pesa 667 N está sentado, com as costas eretas, em uma roda-gigante em movimento. No ponto mais alto o módulo da força normal $\vec{F}_N$ exercida pelo assento sobre o estudante é de 556 N. (a) O estudante se sente mais leve ou mais pesado neste ponto? (b) Qual é o módulo de $\vec{F}_N$ no ponto mais baixo? Se a velocidade da roda-gigante é duplicada, qual é o módulo F_N da força normal (c) no ponto mais alto e (d) no ponto mais baixo?

••50 Em um brinquedo de parque de diversão ("Kamikaze"), um carro se move em uma circunferência vertical na extremidade de uma haste rígida de massa desprezível. O peso do carro com os passageiros é de 5,0 kN, e o raio da circunferência é de 10 m. No ponto mais alto da circunferência, quais são (a) o módulo F_H e (b) o sentido (para cima ou para baixo) da força exercida pela haste sobre o carro se a velocidade do carro é $v = 5{,}0$ m/s? Quais são (c) F_H e (d) o sentido se $v = 12$ m/s?

••51 Um bonde antigo dobra uma esquina fazendo uma curva plana com 9,1 m de raio a 16 km/h. Qual é o ângulo que as alças de mão penduradas no teto fazem com a vertical?

••52 Ao projetar brinquedos para parques de diversão que envolvem movimentos circulares, os engenheiros mecânicos devem levar em conta o fato de que pequenas variações de certos parâmetros podem alterar significativamente a força resultante experimentada pelos passageiros. Considere um passageiro de massa m que descreve uma trajetória circular de raio r com velocidade v. Determine a variação dF do módulo da força resultante para (a) uma variação do raio r da trajetória, sem que v varie; (b) uma variação dv da velocidade, sem que r varie; (c) uma variação dT do período, sem que r varie.

••53 Um avião está voando em uma circunferência horizontal com uma velocidade de 480 km/h (Fig. 6-42). Se as asas estão inclinadas de um ângulo $\theta = 40°$ com a horizontal, qual é o raio da circunferência? Suponha que a força necessária para manter o avião nessa trajetória resulte inteiramente de uma "sustentação aerodinâmica" perpendicular à superfície das asas.



FIG. 6-42 Problema 53.

••54 Um passageiro de 85,0 kg descreve uma trajetória circular de raio $r = 3{,}50$ m em movimento circular uniforme. (a) A Fig. 6-43*a* mostra um gráfico do módulo F da força centrípeta em função da velocidade v do passageiro. Qual é a inclinação do gráfico para $v = 8{,}30$ m/s? (b) A Fig. 6-43b mostra um gráfico do módulo F da força em função de T, o período do movimento. Qual é a inclinação do gráfico para $T = 2{,}50$ s?

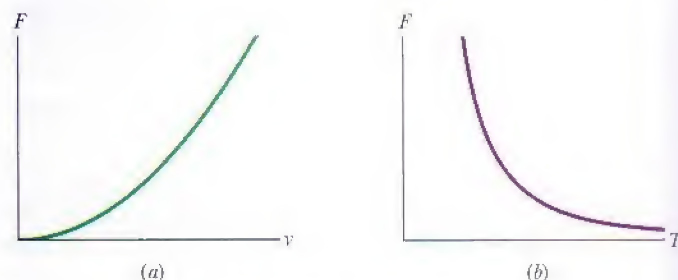


FIG. 6-43 Problema 54.

••55 Um disco de metal de massa $m = 1{,}50$ kg descreve uma circunferência de raio $r = 20{,}0$ cm sobre uma mesa sem atrito, enquanto permanece ligado a um cilindro de massa $M = 2{,}50$ kg pendurado por um fio que passa por um furo no centro da mesa (Fig. 6-44). Que velocidade do disco mantém o cilindro em repouso?

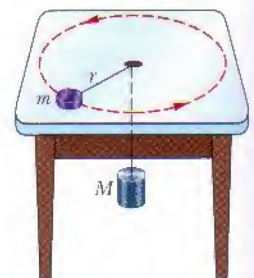


FIG. 6-44 Problema 55.

••56 *Frear ou desviar?* A Fig. 6-45 mostra uma vista superior de um carro que se aproxima de um muro. Suponha que o motorista começa a frear quando a distância entre o carro e o muro é $d = 107$ m, que a massa do carro é $m = 1400$ kg, que sua velocidade inicial é $v_0 = 35$ m/s e que o coeficiente de atrito estático é $\mu_s = 0{,}50$. Suponha também que o peso do carro está distribuído igualmente pelas quatro rodas, mesmo durante a frenagem. (a) Qual é o valor mínimo do módulo do atrito estático (entre os pneus e o piso) para que o carro pare antes de se chocar com o muro? (b) Qual é o valor máximo possível do atrito estático $f_{s,máx}$? (c) Se o coeficiente de atrito cinético entre os pneus (das rodas travadas) e o piso é $\mu_k = 0{,}40$, com que velocidade o carro se choca com o muro? Para evitar o choque, o motorista pode tentar se desviar do muro, como mostra a figura. (d) Qual é o módulo da força de atrito necessária

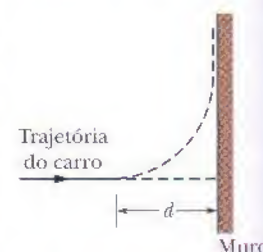


FIG. 6-45 Problema 56.

para fazer o carro descrever uma trajetória circular de raio d e velocidade v_0? (e) A força calculada no item (d) é menor que $f_{s,máx}$, o que tornaria o plano viável?

••57 Um parafuso está enroscado em uma das extremidades de uma haste fina horizontal que gira em torno da outra extremidade. Um engenheiro monitora o movimento iluminando o parafuso e a haste com uma lâmpada estroboscópica, ajustando a freqüência dos lampejos até o parafuso parecer estar nas mesmas oito posições a cada rotação completa da haste (Fig. 6-46). A freqüência dos lampejos é 2000 por segundo; a massa do parafuso é 30 g e a haste tem 3,5 cm de comprimento. Qual é o módulo da força exercida pela haste sobre o parafuso?

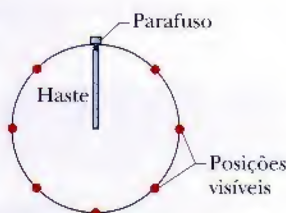


FIG. 6-46 Problema 57.

••58 Uma curva circular compensada de uma rodovia foi planejada para uma velocidade de 60 km/h. O raio da curva é de 200 m. Em um dia chuvoso a velocidade dos carros diminui para 40 km/h. Qual é o menor coeficiente de atrito entre os pneus e a estrada para que os carros façam a curva sem derrapar? (Suponha que os carros não possuem sustentação negativa.)

•••59 Na Fig. 6-47, uma bola de 1,34 kg é ligada por meio de dois fios de massa desprezível, cada um com comprimento L = 1,70 m, a uma haste vertical giratória. Os fios estão amarrados à haste a uma distância d = 1,70 m um do outro e estão esticados. A tensão do fio de cima é de 35 N. Determine (a) a tensão do fio de baixo; (b) o módulo da força resultante $\vec{F}_{res}$ a que está sujeita a bola; (c) a velocidade escalar da bola; (d) a orientação de $\vec{F}_{res}$.

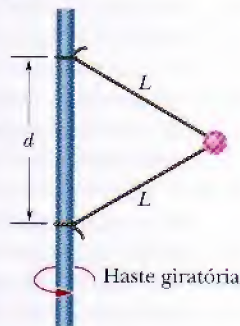


FIG. 6-47 Problema 59.

Problemas Adicionais

60 A Fig. 6-48 mostra um *pêndulo cônico*, no qual um peso (pequeno objeto na extremidade inferior da corda) se move em uma circunferência horizontal com velocidade constante. (A corda descreve um cone quando o peso gira.) O peso tem uma massa de 0,040 kg, a corda tem um comprimento L = 0,90 m e massa desprezível, e o peso descreve uma circunferência de 0,94 m. Determine (a) a tensão da corda e (b) o período do movimento.

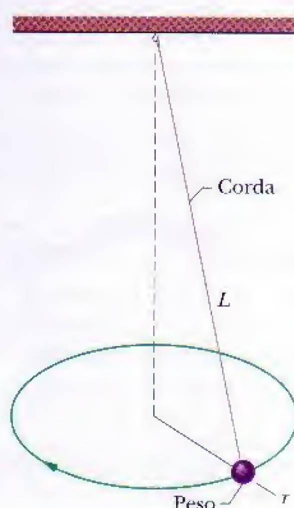


FIG. 6-48 Problema 60.

61 *Continuação dos Problemas 2 e 39.* Uma outra explicação é que as pedras se movem apenas quando a água que cai na região durante uma tempestade congela, formando uma fina camada de gelo. As pedras ficam presas no gelo. Quando o vento sopra, o gelo e as pedras são arrastados e as pedras deixam as trilhas. O módulo da força de arrasto do ar sobre essa "vela de gelo" é dado por $D_{gelo} = 4C_{gelo}\rho A_{gelo}v^2$, onde C_{gelo} é o coeficiente de arrasto ($2{,}0 \times 10^{-3}$), ρ a massa específica do ar (1,21 kg/m³), A_{gelo} a área horizontal da camada de gelo e v a velocidade do vento.

Suponha o seguinte: A camada de gelo mede 400 m por 500 m por 4,0 mm e tem um coeficiente de atrito cinético 0,10 com o solo e uma massa específica de 917 kg/m³. Suponha ainda que 100 pedras idênticas à do Problema 2 estão aprisionadas no gelo. Para manter o movimento da camada, quais são as velocidades do vento necessárias (a) nas proximidade da camada e (b) a uma altura de 10 m? (c) Esses valores são razoáveis para ventos fortes durante uma tempestade?

62 *Projetando uma curva de uma rodovia.* Se um carro entra muito depressa em uma curva, tende a derrapar. No caso de uma curva compensada, a força de atrito age sobre um carro em alta velocidade no sentido de se opor à tendência do carro de derrapar para fora da estrada; a força aponta para o lado mais baixo da pista (o lado para o qual a água escoaria). Considere uma curva circular de raio R = 200 m e um ângulo de compensação θ, na qual o coeficiente de atrito estático entre os pneus e o pavimento é μ_s. Um carro (sem sustentação negativa) começa a fazer a curva, como mostra a Fig. 6-13. (a) Escreva uma expressão para a velocidade do carro $v_{máx}$ que o coloca na iminência de derrapar. (b) No mesmo gráfico, plote $v_{máx}$ em função de θ para o intervalo de 0° a 50°, primeiro para μ_s = 0,60 (pista seca) e depois para μ_s = 0,050 (pista molhada). Calcule $v_{máx}$, em km/h, para um ângulo de compensação θ = 10° e para (c) μ_s = 0,60 e (d) μ_s = 0,050. (Agora você pode entender por que ocorrem acidentes nas curvas das estradas quando os motoristas não percebem que a estrada está molhada e continuam dirigindo na velocidade normal.)

63 Na Fig. 6-49, o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano inclinado é de 0,20 e o ângulo θ é de 60°. Quais são (a) o módulo a e (b) o sentido (para cima ou para baixo ao longo do plano) da aceleração do bloco se ele está escorregando para baixo? Quais são (c) o módulo a e (d) o sentido da aceleração se o bloco está escorregando para cima?

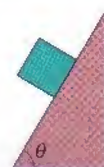


FIG. 6-49 Problema 63.

64 Na Fig. 6-50, o bloco 1, de massa m_1 = 2,0 kg, e o bloco 2, de massa m_2 = 3,0 kg, estão ligados por um fio de massa desprezível e são inicialmente mantidos em repouso. O bloco 2 está sobre uma superfície sem atrito com uma inclinação θ = 30°. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco 1 e a superfície horizontal é de 0,25. A polia tem massa e atrito desprezíveis. Uma vez soltos, os blocos entram em movimento. Qual é a tensão do fio?

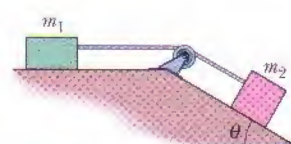


FIG. 6-50 Problema 64.

65 Um bloco de massa m_a = 4,0 kg é colocado em cima de um outro bloco de massa m_b = 5,0 kg. Para fazer o bloco de cima deslizar sobre o de baixo enquanto este é mantido fixo é preciso aplicar ao bloco de cima uma força horizontal de no mínimo 12 N. O conjunto de blocos é colocado sobre uma mesa horizontal sem atrito (Fig. 6-51). Determine o módulo (a) da maior força horizontal $\vec{F}$ que pode ser aplicada ao bloco de baixo sem que os blocos deixem de se mover juntos e (b) a aceleração resultante dos blocos.

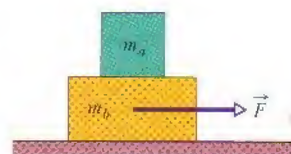


FIG. 6-51 Problema 65.

66 Uma caixa de enlatados escorrega em uma rampa do nível da rua até o subsolo de um armazém com uma aceleração de 0,75 m/s² dirigida para baixo ao longo da rampa. A rampa faz um ângulo de 40° com a horizontal. Qual é o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a rampa?

67 Um bloco de aço de 8,00 kg repousa sobre uma mesa horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a mesa é 0,450. Uma força é aplicada ao bloco. Com três algarismos significativos, qual é o módulo dessa força se ela coloca o bloco na iminência de deslizar quando a força é dirigida (a) horizontalmente, (b) para cima, formando um ângulo de 60,0° com a horizontal e (c) para baixo, formando um ângulo de 60,0° com a horizontal?

68 Na Fig. 6-52, uma caixa com formigas vermelhas (massa total m_1 = 1,65 kg) e uma caixa com formigas pretas (massa total m_2 = 3,30 kg) deslizam para baixo em um plano inclinado, ligadas por uma haste sem massa paralela ao plano. O ângulo de inclinação é θ = 30°. O coeficiente de atrito cinético entre a caixa com formigas vermelhas e a rampa é $\mu_1 = 0{,}226$; entre a caixa com formigas pretas e a rampa é $\mu_2 = 0{,}113$. Calcule (a) a tensão da haste e (b) o módulo da aceleração comum das duas caixas. (c) Como as respostas dos itens (a) e (b) mudariam se as posições das caixas fossem invertidas?

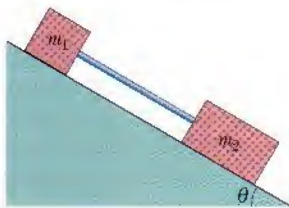


FIG. 6-52 Problema 68.

69 Na Fig. 6-53, um caixote escorrega para baixo em uma vala cujos lados fazem um ângulo reto. O coeficiente de atrito cinético entre o caixote e a vala é μ_k. Qual é a aceleração do caixote em termos de μ_k, θ e g?

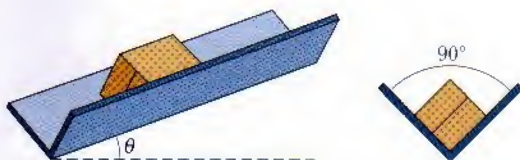


FIG. 6-53 Problema 69.

70 Uma estudante pretende determinar os coeficientes de atrito estático e atrito cinético entre uma caixa e uma tábua. Ela coloca a caixa sobre a tábua e levanta lentamente uma das extremidades da tábua. Quando o ângulo de inclinação em relação à horizontal chega a 30°, a caixa começa a escorregar e percorre 2,5 m ao longo da tábua em 4,0 s, com aceleração constante. Quais são (a) o coeficiente de atrito estático e (b) o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a tábua?

71 Uma locomotiva acelera um trem de 25 vagões em uma linha férrea plana. Cada vagão possui uma massa de $5{,}0 \times 10^4$ kg e está sujeito a uma força de atrito $f = 250v$, onde a velocidade v está em metros por segundo e a força f está em newtons. No instante em que a velocidade do trem é de 30 km/h, o módulo da aceleração é 0,20 m/s². (a) Qual é a tensão no engate entre o primeiro vagão e a locomotiva? (b) Se esta tensão é igual à força máxima que a locomotiva pode exercer sobre o trem, qual é o maior aclive que a linha férrea pode ter para que a locomotiva consiga puxar o trem a 30 km/h?

72 Uma casa é construída no alto de uma colina, perto de uma encosta com uma inclinação θ = 45° (Fig. 6-54). Um estudo de engenharia indica que o ângulo do declive deve ser reduzido porque as camadas superiores do solo podem deslizar sobre as camadas inferiores. Se o coeficiente de atrito estático entre duas dessas camadas é 0,5, qual é o menor ângulo ϕ de que a inclinação atual deve ser reduzida para evitar deslizamentos?

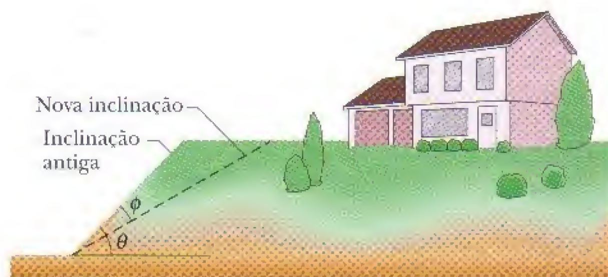


FIG. 6-54 Problema 72.

73 Qual é a velocidade terminal de uma bola esférica de 6,00 kg que possui um raio de 3,00 cm e um coeficiente de arrasto de 1,60? A massa específica do ar no local onde a bola está caindo é 1,20 kg/m³.

74 Um vagão de um trem de alta velocidade faz uma curva horizontal de 470 m de raio, sem compensação, com velocidade constante. Os módulos das componentes horizontal e vertical da força que o vagão exerce sobre um passageiro de 51,0 kg são 210 N e 500 N, respectivamente. (a) Qual é o módulo da força resultante (de *todas* as forças) sobre o passageiro? (b) Qual é a velocidade do vagão?

75 Um bloco de aço de 11 kg está em repouso sobre uma mesa horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a mesa é 0,52. (a) Qual é o módulo da força horizontal que coloca o bloco na iminência de se mover? (b) Qual é o módulo de uma força que, atuando a 60° acima da horizontal, coloca o bloco na iminência de se mover? (c) Se a força atua a 60° abaixo da horizontal, qual o valor máximo do seu módulo para que o bloco não se mova?

76 Calcule o módulo da força de arrasto a que está sujeito um míssil de 53 cm de diâmetro voando a 250 m/s em baixa altitude. Suponha que a massa específica do ar é de 1,2 kg/m³ e o coeficiente de arrasto C é de 0,75.

77 Um ciclista se move em um círculo de 25,0 m de raio com uma velocidade constante de 9,00 m/s. A massa do conjunto ciclista-bicicleta é de 85,0 kg. Calcule os módulos (a) da força de atrito que a pista exerce sobre a bicicleta e (b) da força *resultante* que a pista exerce sobre a bicicleta.

78 Um disco de metal de 110 g que desliza sobre o gelo é parado em 15 m pela força de atrito que o gelo exerce sobre o disco. (a) Se a velocidade inicial do disco é de 60 m/s, qual é o módulo da força de atrito? (b) Qual é o coeficiente de atrito entre o disco e o gelo?

79 Na Fig. 6-55, uma alpinista de 49 kg está subindo uma "chaminé". O coeficiente de atrito estático entre os sapatos e a pedra é 1,2; entre as costas e a pedra é 0,80. A moça reduziu a força que está fazendo contra a pedra até se encontrar na


FIG. 6-55 Problema 79.

iminência de escorregar. (a) Desenhe um diagrama de corpo livre da moça. (b) Qual é o módulo da força que a moça exerce contra a pedra? (c) que fração do peso da moça é sustentada pelo atrito dos sapatos?

80 Uma pedra de 5,00 kg é deslocada em contato com o teto horizontal de uma caverna (Fig. 6-56). Se o coeficiente de atrito cinético é de 0,65 e a força aplicada à pedra faz um ângulo θ = 70° para cima com a horizontal, qual deve ser o módulo para que a pedra se mova com velocidade constante?

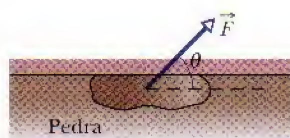


FIG. 6-56 Problema 80.

81 O bloco A da Fig. 6-57 possui massa m_A = 4,0 kg e o bloco B possui massa m_B = 2,0 kg. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco B e o plano horizontal é μ_k = 0,50. O ângulo do plano inclinado sem atrito é θ = 30°. A polia serve apenas para mudar a direção do fio que liga os blocos. O fio possui massa desprezível. Determine (a) a tensão do fio e (b) o módulo da aceleração dos blocos.

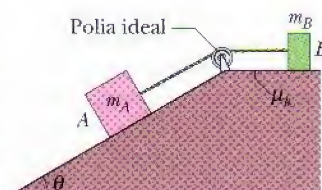


FIG. 6-57 Problema 81.

82 Um esqui adere à neve quando é simplesmente deixado sobre ela. Quando o esqui se desloca sobre a neve, porém, o atrito o aquece e derrete parcialmente a neve, reduzindo o coeficiente de atrito cinético e facilitando o deslizamento. Encerar o esqui torna-o repelente à água e reduz ainda mais o atrito com a camada de água. Uma loja anuncia que um novo tipo de esqui de plástico é especialmente repelente à água e que, em um declive moderado de 200 m nos Alpes, um esquiador reduziu o tempo de descida de 61 s com esquis convencionais para 42 s com os novos esquis. Determine o módulo da aceleração média do esquiador (a) com os esquis convencionais e (b) com os novos esquis. Supondo uma inclinação de 3,0°, calcule o coeficiente de atrito cinético (c) para os esquis convencionais e (d) para os novos esquis.

83 Brincando nas vizinhanças do canteiro de obras de uma estrada, uma criança cai em uma encosta que faz um ângulo de 35° com a horizontal. Enquanto a criança escorrega encosta *abaixo*, sofre uma aceleração *para cima* com um módulo de 0,50 m/s^2. Qual é o coeficiente de atrito cinético entre a criança e a encosta?

84 Na Fig. 6-58, um carro (sem sustentação negativa) dirigido por um dublê passa pelo alto de um morro cuja seção transversal pode ser aproximada por uma circunferência de raio R = 250 m. Qual é a maior velocidade para a qual o carro não perde contato com a estrada no alto do morro?

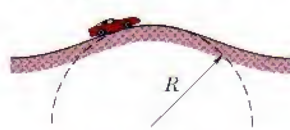


FIG. 6-58 Problema 84.

85 Um carro com 10,7 kN de peso, viajando a 13,4 m/s sem sustentação negativa, tenta fazer uma curva não-compensada com um raio de 61,0 m. (a) Qual é o módulo da força de atrito entre os pneus e a estrada necessária para manter o carro em uma trajetória circular? (b) Se o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a estrada é de 0,350, o carro consegue fazer a curva sem derrapar?

86 Uma força de 100 N, que faz um ângulo θ para cima com um piso horizontal, é aplicada a uma cadeira de 25,0 kg em repouso sobre o piso. Se θ = 0°, determine (a) a componente horizontal F_h da força aplicada e (b) o módulo F_N da força normal exercida pelo piso sobre a cadeira. Se θ = 30,0°, determine (c) F_h e (d) F_N. Se θ = 60,0°, determine (e) F_h e (f) F_N. Suponha que o coeficiente de atrito estático entre a cadeira e o piso é de 0,420. A cadeira escorrega ou permanece em repouso se θ é (g) 0°, (h) 30,0° e (i) 60,0°?

87 Um estudante, enlouquecido pelos exames finais, usa uma força $\vec{P}$ de módulo 80 N e ângulo θ = 70° para empurrar um bloco de 5,0 kg no teto do seu quarto (Fig. 6-59). Se o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o teto é de 0,40, qual é o módulo da aceleração do bloco?

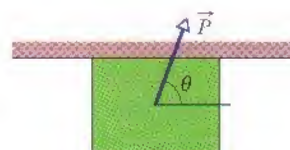


FIG. 6-59 Problema 87.

88 Uma certa corda pode suportar uma tensão máxima de 40 N sem se partir. Uma criança amarra uma pedra de 0,37 kg em uma das extremidades da corda e, segurando a outra extremidade, faz a pedra girar em uma circunferência vertical de 0,91 m de raio, aumentando lentamente a velocidade até a corda arrebentar. (a) Em que ponto da trajetória está a pedra quando a corda arrebenta? (b) Qual é a velocidade da pedra quando a corda arrebenta?

89 Você precisa empurrar um caixote até um atracadouro. O caixote pesa 165 N. O coeficiente de atrito estático entre o caixote e o piso é de 0,510, e o coeficiente de atrito cinético é de 0,32. Sua força sobre o caixote é horizontal. (a) Qual deve ser o módulo da força que você aplica ao caixote para que ele comece a se mover? (b) Qual deve ser o módulo da força que você aplica ao caixote depois que está em movimento para que se mova com velocidade constante? (c) Se, em vez disso, o módulo da força tiver o valor calculado em (a), qual será o módulo da aceleração do caixote?

90 Uma criança com 140 N de peso está sentada no alto de um escorrega que faz um ângulo de 25° com a horizontal. A criança se mantém no mesmo lugar segurando os lados do escorrega. Quando solta as mãos, a criança adquire uma aceleração constante de 0,86 m/s^2 (dirigida para baixo, naturalmente). Qual é o coeficiente de atrito cinético entre a criança e o escorrega? (b) Que valores máximo e mínimo do coeficiente de atrito estático entre a criança e o escorrega são compatíveis com as informações do enunciado?

91 Um pequeno armário com 556 N de peso está em repouso. O coeficiente de atrito estático entre o armário e o piso é 0,68 e o coeficiente de atrito cinético é de 0,56. Em quatro diferentes tentativas para deslocá-lo ele é empurrado com forças horizontais de módulos (a) 222 N, (b) 334 N, (c) 445 N e (d) 556 N. Para cada tentativa, calcule o módulo da força de atrito exercida sobre ele pelo piso. (Em cada tentativa, o armário está inicialmente em repouso.) (e) Em quais das tentativas o armário se move?

92 Um menino com uma atiradeira coloca uma pedra (0,250 kg) na bolsa (0,010 kg) da atiradeira e faz girar a pedra e a bolsa em uma circunferência vertical de raio 0,650 m. O elástico entre a bolsa e a mão do menino tem massa desprezível e arrebentará se a tensão exceder 33,0 N. Suponha que o menino aumente aos poucos a velocidade da pedra. (a) O elástico vai arrebentar no ponto mais baixo da circunferência ou no ponto mais alto? (b) Para que valor da velocidade da pedra o elástico vai arrebentar?

93 Um trenó para quatro pessoas (massa total = 630 kg) desce um trecho reto no alto de uma encosta. O trecho reto tem 80,0 m de comprimento e uma inclinação constante de 10,2° com a hori-

zontal. Suponha que o efeito combinado do atrito e do arrasto do ar produz sobre o trenó uma força constante de 62,0 N para cima, paralela à encosta. Responda às perguntas a seguir usando três algarismos significativos. (a) Se a velocidade do trenó no início da reta é de 6,20 m/s, quanto tempo o trenó leva para chegar ao final da reta? (b) Suponha que os ocupantes reduzam os efeitos do atrito e do arrasto do ar para 42,0 N. Para a mesma velocidade inicial, quanto tempo o trenó agora leva para descer o trecho reto?

94 Na Fig. 6-60, uma força $\vec{F}$ é aplicada a um caixote de massa m que repousa sobre um piso; o coeficiente de atrito estático entre o caixote e o piso é μ_s. O ângulo θ é inicialmente 0°, mas é gradualmente aumentado, de modo que o vetor força gira no sentido horário da figura. Durante a rotação, a intensidade da força é continuamente ajustada, de modo que o caixote permanece sempre na iminência de escorregar. Para μ_s = 0,70, (a) plote a razão F/mg em função de θ e (b) determine o ângulo θ_{inf} para o qual a razão se torna infinita. (c) Se o piso é lubrificado, o valor de θ_{inf} aumenta, diminui ou permanece inalterado? (d) Qual é o valor de θ_{inf} para μ_s = 0,60?

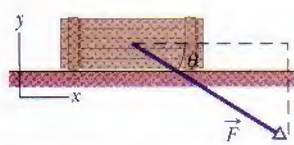


FIG. 6-60 Problema 94.

95 Durante a tarde, um carro é estacionado em uma ladeira que faz um ângulo de 35,0° com a horizontal. Nesse momento, o coeficiente de atrito estático entre os pneus e o asfalto é de 0,725. Quando anoitece começa a nevar e o coeficiente de atrito diminui, tanto por causa da neve como por causa das mudanças químicas do asfalto causadas pela queda de temperatura. Qual deve ser a redução percentual do coeficiente de atrito para que o carro comece a escorregar ladeira abaixo?

96 Na Fig. 6-61, o bloco 1 de massa m_1 = 2,0 kg e o bloco 2 de massa m_2 = 1,0 kg estão ligados por um fio de massa desprezível. O bloco 2 é empurrado por uma força $\vec{F}$ de módulo 20 N que faz um ângulo θ = 35° com a horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre cada bloco e a horizontal é de 0,20. Qual é a tensão do fio?

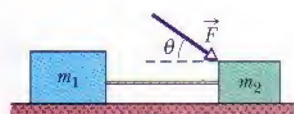


FIG. 6-61 Problema 96.

97 Na Fig. 6-62, um faxineiro caprichoso limpa o piso aplicando ao cabo do esfregão uma força $\vec{F}$. O cabo faz um ângulo θ com a vertical, e μ_s e μ_k são os coeficientes de atrito estático e cinético entre o esfregão e o piso. Ignore a massa do cabo e suponha que toda a massa m do esfregão está concentrada no pano de chão. (a) Se o pano de chão se move ao longo do piso com velocidade constante, qual é o valor de F? (b) Mostre que se θ for menor que um certo valor θ_0, a força $\vec{F}$ (ainda orientada ao longo do cabo) será insuficiente para fazer o pano de chão se mover. Determine θ_0.



FIG. 6-62 Problema 97.

98 Uma curva circular em uma rodovia é projetada para uma velocidade máxima de 60 km/h. Suponha que os carros não possuem sustentação negativa. (a) Se o raio da curva é 150 m, qual é o ângulo de compensação correto? (b) Se a curva não fosse compensada, qual deveria ser o menor coeficiente de atrito entre os pneus e o piso para que os carros não derrapassem ao entrar na curva a 60 km/h?

99 Um bloco escorrega para baixo com velocidade constante em um plano inclinado de ângulo θ. Em seguida, o bloco é lançado para cima no mesmo plano com velocidade inicial v_0. (a) Que distância o bloco sobe até parar? (b) Depois de parar, o bloco torna a escorregar para baixo? Justifique sua resposta.

100 Na Fig. 6-63, um bloco com 22 N de peso é mantido em repouso contra uma parede vertical por uma força horizontal $\vec{F}$ de módulo 60 N. O coeficiente de atrito estático entre a parede e o bloco é de 0,55 e o coeficiente de atrito cinético é de 0,38. Em seis experimentos uma segunda força $\vec{P}$ é aplicada ao bloco, paralelamente à parede, com os seguintes módulos e sentidos: (a) 34 N, para cima, (b) 12 N, para cima, (c) 48 N, para cima, (d) 62 N, para cima, (e) 10 N, para baixo e (f) 18 N, para baixo. Em cada experimento, qual é o módulo da força de atrito sobre o bloco? Em que experimentos o bloco se move (g) para cima e (h) para baixo? (i) Em que experimentos a força de atrito é para baixo?

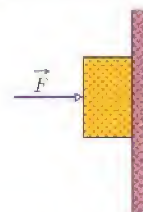


FIG. 6-63 Problema 100.

101 Quando uma pequena moeda de 2,0 g é colocada a uma distância de 5,0 cm do centro de um prato giratório horizontal que executa três rotações completas em 3,14 s, a moeda não escorrega. Determine (a) a velocidade escalar da moeda, (b) o módulo e (c) o sentido (radialmente para dentro ou para fora) da aceleração da moeda e (d) o módulo e (e) o sentido (para dentro ou para fora) da força de atrito sobre a moeda. A moeda fica na iminência de escorregar quando é colocada a uma distância de 10 cm do centro. (f) Qual é o coeficiente de atrito estático entre a moeda e o prato giratório?

102 Uma criança coloca uma cesta de piquenique na borda de um carrossel com 4,6 m de raio que dá uma volta completa a cada 30 s. (a) Qual é a velocidade de um ponto da borda? (b) Qual é o menor valor do coeficiente de atrito estático entre a cesta e o carrossel para que a cesta não saia do lugar?

103 Uma caixa de 1,5 kg está em repouso sobre uma superfície quando, em t = 0, uma força horizontal $\vec{F} = (1{,}8t)\hat{i}$ N (com t em segundos) é aplicada à caixa. A aceleração da caixa em função do tempo t é dada por $\vec{a}$ = 0 para $0 \le t \le 2{,}8$ s e $\vec{a} = (1{,}2t - 2{,}4)\hat{i}$ m/s² para $t > 2{,}8$ s. (a) Qual é o coeficiente de atrito estático entre a caixa e a superfície? (b) Qual é o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a superfície?

104 Um baú com 220 N de peso repousa sobre o piso. O coeficiente de atrito estático entre o baú e o piso é de 0,41 e o coeficiente de atrito cinético é de 0,32. (a) Qual é o módulo da menor força horizontal com a qual uma pessoa deve empurrar o baú para colocá-lo em movimento? (b) Depois que o baú está em movimento, qual o módulo da força horizontal que uma pessoa deve aplicar para mantê-lo em movimento com velocidade constante? (c) Se a pessoa continuar a empurrá-lo com a força usada para iniciar o movimento, qual será o módulo da aceleração do baú?

105 Um operário aplica uma força constante de módulo 85 N a uma caixa de 40 kg que está inicialmente em repouso sobre o piso horizontal de um armazém. Após a caixa ter percorrido uma distância de 1,4 m, sua velocidade é de 1,0 m/s. Qual é o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e o piso?

106 Imagine que o quilograma-padrão seja colocado no equador terrestre, onde se move em uma circunferência de raio 6,40 ×

10^6 m (raio da Terra) com uma velocidade escalar constante de 465 m/s devido à rotação da Terra. (a) Qual é o módulo da força centrípeta que age sobre o quilograma-padrão durante a rotação? Imagine que o quilograma-padrão está pendurado em uma balança de mola nesse local e que ele pesaria exatamente 9,80 N se a Terra não girasse. (b) Qual é a leitura da balança de mola, ou seja, qual é o módulo da força exercida pelo quilograma-padrão sobre a balança de mola?

107 Quando um bloco de 40 N desliza para baixo em um plano inclinado de 25° com a horizontal, sua aceleração é de 0,80 m/s², dirigida para cima ao longo do plano. Qual é o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano?

108 Bagagens são transportadas de um local a outro de um aeroporto por uma esteira. Em um certo local a esteira tem uma inclinação de 2,5° com a horizontal. Suponha que para ângulo tão pequeno as malas não escorreguem. Determine o módulo da força de atrito exercida pela esteira sobre uma caixa de 69 N de peso quando a caixa está na parte inclinada da esteira e a velocidade da esteira é (a) nula e constante, (b) 0,65 m/s e constante, (c) 0,65 e aumentando a uma taxa de 0,20 m/s², (d) 0,65 m/s e diminuindo a uma taxa de 0,20 m/s² e (e) 0,65 m/s e aumentando a uma taxa de 0,57 m/s². (f) Para quais dessas cinco situações a força de atrito é dirigida para baixo ao longo da rampa?

109 Na Fig. 6-64 um bloco de 5,0 kg é lançado para cima ao longo de um plano inclinado de ângulo $\theta = 37°$, enquanto uma força horizontal $\vec{F}$ de módulo 50 N atua sobre ele. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é de 0,30. Quais são (a) o módulo e (b) o sentido (para cima ou para baixo no plano) da aceleração do bloco? A velocidade inicial do bloco é de 4,0 m/s. (c) Que distância o bloco sobe no plano? (d) Quando o bloco atinge o ponto mais alto, ele permanece em repouso ou escorrega de volta?

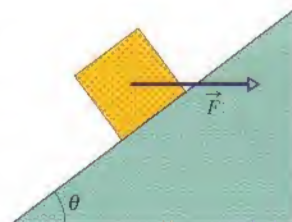


FIG. 6-64 Problema 109.

7 Energia Cinética e Trabalho



UPI Photo/Dilip Vishwanat/Landov LLC

O piloto de um funny car *se prepara para uma tomada de tempo na pista de um quarto de milha fazendo girar as rodas, de modo a tornar os pneus e a pista mais aderentes, aumentando assim a tração. Em seguida, o piloto espera na linha de partida até que a contagem regressiva das lâmpadas coloridas chegue ao verde. O impulso do carro para a frente é tão forte que o carro é lançado como se fosse um foguete horizontal. A ciência e a engenharia dos* funny cars *está tão avançada hoje em dia que a diferença entre a vitória e a derrota pode depender de intervalos de tempo menores que 1 ms.*

Que propriedade de um funny car determina se ele será o vencedor de uma drag race?

A resposta está neste capítulo.

7-1 O QUE É FÍSICA?

Um dos objetivos fundamentais da física é investigar algo de que se fala muito hoje em dia: a energia. O tópico é obviamente importante; na verdade, nossa civilização se baseia na obtenção e no uso eficiente de energia.

Todo mundo sabe, por exemplo, que é preciso energia para executar qualquer movimento. Atravessar o Oceano Pacífico de avião exige energia. Transportar um equipamento para o último andar de um edifício ou para uma estação espacial em órbita exige energia. Arremessar uma bola exige energia. Gastamos verdadeiras fortunas para obter e utilizar energia. Guerras foram travadas por causa de fontes de energia. Guerras foram decididas pelo uso de armas que liberam grandes quantidades de energia de forma explosiva. Qualquer um é capaz de citar muitos exemplos de energia e de sua utilização, mas o que realmente significa o termo *energia*?

7-2 | O que É Energia?

O termo *energia* é tão amplo que é difícil pensar em uma definição concisa. Tecnicamente, a energia é uma grandeza escalar associada ao estado de um ou mais objetos; entretanto, esta definição é excessivamente vaga para ser útil para quem está começando.

Uma definição menos rigorosa pode servir pelo menos de ponto de partida. Energia é um número que associamos a um sistema de um ou mais objetos. Se uma força muda um dos objetos, fazendo-o entrar em movimento, por exemplo, o número que descreve a energia do sistema varia. Após um número muito grande de experimentos, os cientistas e engenheiros confirmaram que se o método através do qual atribuímos números à energia é definido adequadamente, esses números podem ser usados para prever os resultados de experimentos e, mais importante, para construir máquinas capazes de realizar proezas fantásticas, como voar. Esse sucesso se baseia em uma propriedade fascinante de nosso universo: a energia pode ser transformada de uma forma para outra e transferida de um objeto para outro, mas a quantidade total é sempre a mesma (a energia é *conservada*). Até hoje, nunca foi encontrada uma exceção desta *lei de conservação da energia*.

Pense nas muitas formas de energia como se fossem os números que representam as quantias depositadas nas contas bancárias. Algumas regras foram estabelecidas para o significado desses números e a forma como podem ser modificados. Você pode transferir números que representam dinheiro de uma conta para outra, talvez eletronicamente, sem que qualquer objeto material seja movimentado; entretanto, a quantidade total de dinheiro (o total de todos os números) deve permanecer constante: Ela é conservada em todas as transações bancárias.

Neste capítulo concentramos nossa atenção em um único tipo de energia (a *energia cinética*) e uma única forma de transferência de energia (o *trabalho*). No próximo capítulo examinaremos algumas outras formas de energia e o modo como a lei de conservação da energia pode ser expressa através de equações.

7-3 | Energia Cinética

A **energia cinética** K é a energia associada ao *estado de movimento* de um objeto. Quanto mais depressa o objeto se move, maior é a energia cinética. Quando um objeto está em repouso, a energia cinética é nula.

Para um objeto de massa m cuja velocidade v é muito menor que a velocidade da luz,

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 \quad \text{(energia cinética).} \qquad (7\text{-}1)$$

Um pato de 3,0 kg que voa a 2,0 m/s, por exemplo, tem uma energia cinética de 6,0 kg · m^2/s^2, ou seja, associamos esse número ao movimento do pato.

A unidade de energia cinética (e de qualquer outra forma de energia) no SI é o **joule** (J), em homenagem a James Prescott Joule, um cientista inglês do século XIX. Ela é definida a partir da Eq. 7-1 em termos das unidades de massa e velocidade:

$$1 \text{ joule} = 1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2. \qquad (7\text{-}2)$$

Assim, o pato do exemplo anterior tem uma energia cinética de 6,0 J.

Exemplo 7-1

Em 1896, em Waco, Texas, William Crush posicionou duas locomotivas em extremidades opostas de uma linha férrea com 6,4 km de extensão, acendeu as caldeiras, amarrou os aceleradores para que permanecessem acionados e fez com que as locomotivas sofressem uma colisão frontal, em alta velocidade, diante de 30.000 espectadores. Centenas de pessoas foram feridas pelos destroços; várias morreram. Supondo que cada locomotiva pesava $1,2 \times 10^6$ N e tinha uma aceleração constante de 0,26 m/s^2, qual era a energia cinética das duas locomotivas imediatamente antes da colisão?



FIG. 7-1 O resultado de uma colisão entre duas locomotivas em 1896. *(Cortesia da Library of Congress)*

IDÉIAS-CHAVE (1) Para calcular a energia cinética de cada locomotiva usando a Eq. 7-1 precisamos conhecer a velocidade de cada locomotiva imediatamente antes da colisão e sua massa. (2) Como podemos supor que cada locomotiva sofreu uma aceleração constante, podemos usar as equações na Tabela 2-1 para calcular a velocidade v imediatamente antes da colisão.

Cálculos: Escolhemos a Eq. 2-16 porque conhecemos os valores de todos os parâmetros, exceto v:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

Com $v_0 = 0$ e $x - x_0 = 3,2 \times 10^3$ m (metade da distância inicial), temos:

$$v^2 = 0 + 2(0,26 \text{ m/s}^2)(3,2 \times 10^3 \text{ m}),$$

ou

$$v = 40,8 \text{ m/s}$$

(cerca de 150 km/h).

Podemos encontrar a massa de cada locomotiva dividindo o peso por g:

$$m = \frac{1,2 \times 10^6 \text{ N}}{9,8 \text{ m/s}^2} = 1,22 \times 10^5 \text{ kg}.$$

Em seguida, usando a Eq. 7-1, calculamos a energia cinética total das duas locomotivas imediatamente antes da colisão:

$$K = 2(\tfrac{1}{2}mv^2) = (1,22 \times 10^5 \text{ kg})(40,8 \text{ m/s})^2$$
$$= 2,0 \times 10^8 \text{ J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Esta colisão foi como a explosão de uma bomba.

7-4 | Trabalho

Quando você aumenta a velocidade de um objeto aplicando a ele uma força, a energia cinética $K(= mv^2/2)$ do objeto aumenta. Da mesma forma, quando você diminui a velocidade do objeto aplicando a ele uma força, a energia cinética do objeto diminui. Explicamos essas variações da energia cinética dizendo que a força que você aplicou transferiu energia *de você para o objeto* ou *do objeto para você*. Nas transferências de energia através de uma força, dizemos que um **trabalho** W é *realizado pela força sobre o objeto*. Mais formalmente, definimos o trabalho da seguinte forma:

Trabalho (W) é a energia transferida para um objeto ou de um objeto através de uma força que age sobre o objeto. Quando a energia é transferida para o objeto, o trabalho é positivo; quando a energia é transferida do objeto, o trabalho é negativo.

"Trabalho", portanto, é energia transferida; "realizar trabalho" é o ato de transferir energia. O trabalho tem a mesma unidade que a energia e é uma grandeza escalar.

O termo *transferência* pode ser enganador. Ele não significa que um objeto material entre ou saia do objeto; a transferência não é como um fluxo de água. Ela se parece mais com a transferência eletrônica de dinheiro entre duas contas bancárias: o valor de uma das contas aumenta, enquanto o valor da outra conta diminui, mas nenhum objeto material é transferido de uma conta para a outra.

Note que não estamos usando a palavra "trabalho" no sentido coloquial, segundo o qual *qualquer* esforço físico ou mental representa trabalho. Assim, por exemplo, se você faz força contra uma parede você se cansa por causa das contrações musculares repetidas e está, no sentido coloquial, realizando um trabalho. Entretanto, como esse esforço não produz uma transferência de energia para a parede ou da parede, o trabalho, de acordo com nossa definição, é nulo.

7-5 | Trabalho e Energia Cinética

Encontrando uma Expressão para o Trabalho

Para encontrar uma expressão para o trabalho, considere uma conta que pode deslizar ao longo de um fio sem atrito ao longo de um eixo x horizontal (Fig. 7-2). Uma força constante $\vec{F}$, fazendo um ângulo ϕ com o fio, é usada para acelerar a conta. Podemos relacionar a força à aceleração através da segunda lei de Newton, escrita para as componentes em relação ao eixo x:

$$F_x = ma_x, \tag{7-3}$$

onde m é a massa da esfera. Quando a conta sofre um deslocamento $\vec{d}$, a força muda a velocidade da conta de um valor inicial $\vec{v}_0$ para um outro valor, $\vec{v}$. Como a força é constante, sabemos que a aceleração também é constante. Assim, podemos usar a Eq. 2-16 para escrever, para as componentes em relação ao eixo x,

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x d. \tag{7-4}$$

Explicitando a_x, substituindo na Eq. 7-3 e reagrupando os termos, obtemos:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = F_x d. \tag{7-5}$$

O primeiro termo do lado esquerdo da equação é a energia cinética K_f da conta no fim do deslocamento d; o segundo termo é a energia cinética K_i da conta no início do deslocamento. Assim, o lado esquerdo da Eq. 7-5 nos diz que a energia cinética foi alterada pela força, e o lado direito nos diz que esta mudança é igual a $F_x d$. Assim, o trabalho W realizado pela força sobre a conta (a transferência de energia em conseqüência da aplicação da força) é

$$W = F_x d. \tag{7-6}$$

Se conhecemos os valores de F_x e d, podemos usar esta equação para calcular o trabalho W realizado pela força sobre a conta.

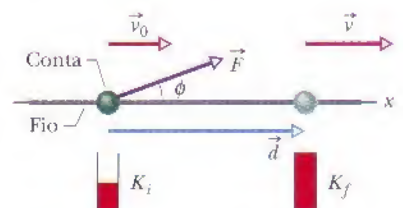


FIG. 7-2 Uma força constante $\vec{F}$, que faz um ângulo ϕ com o deslocamento $\vec{d}$ de uma conta em um fio, acelera a conta ao longo do fio fazendo sua velocidade mudar de $\vec{v}_0$ para $\vec{v}$. Um "medidor de energia cinética" indica a variação resultante da energia cinética da conta do valor K_i para o valor K_f.

Para calcular o trabalho que uma força realiza sobre um objeto quando este sofre um deslocamento, usamos apenas a componente da força em relação ao deslocamento do objeto. A componente da força perpendicular ao deslocamento não realiza trabalho.

Como se pode ver na Fig. 7-2, podemos escrever F_x na forma $F \cos \phi$, onde F é o módulo de $\vec{F}$ e ϕ é o ângulo entre o deslocamento $\vec{d}$ e a força $\vec{F}$. Assim,

$$W = Fd \cos \phi \quad \text{(trabalho executado por uma força constante).} \tag{7-7}$$

Como o lado direito desta equação é equivalente ao produto escalar $\vec{F} \cdot \vec{d}$, também podemos escrever

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad \text{(trabalho executado por uma força constante),} \tag{7-8}$$

(Os produtos escalares são discutidos na Seção 3-8.) A Eq. 7-8 é especialmente útil para calcular o trabalho quando $\vec{F}$ e $\vec{d}$ são dados em termos dos vetores unitários.

Atenção: Existem duas restrições ao uso das Eqs. 7-6 a 7-8 para calcular o trabalho realizado por uma força sobre um objeto. Em primeiro lugar, a força deve ser uma *força constante*, ou seja, o módulo e a orientação da força não devem variar durante o deslocamento do objeto. (Mais tarde discutiremos o que fazer no caso de uma *força variável* cujo módulo não é constante.) Em segundo lugar, o objeto deve se comportar *como uma partícula*. Isso significa que o objeto deve ser *rígido*; todas as suas partes devem se mover da mesma forma. Neste capítulo consideramos apenas objetos que se comportam como partículas, como a cama e seu ocupante na Fig. 7-3.

O sinal do trabalho. O trabalho realizado por uma força sobre um objeto pode ser positivo ou negativo. Assim, por exemplo, se o ângulo ϕ da Eq. 7-7 é menor que 90°, cos ϕ é positivo e o trabalho é positivo. Se ϕ é maior do que 90° (até 180°), cos ϕ é negativo e o trabalho é negativo. (Você é capaz de explicar por que o trabalho é zero quando $\phi = 90°$?) Esses resultados levam a uma regra simples: para determinar o sinal do trabalho realizado por uma força considere a componente da força paralela ao deslocamento:

Uma força realiza trabalho positivo se possui uma componente vetorial no mesmo sentido do deslocamento, e realiza um trabalho negativo quando possui uma componente vetorial no sentido oposto. A força realiza um trabalho nulo quando não possui uma componente vetorial na direção do deslocamento.

Unidade de trabalho. A unidade de trabalho no SI é o joule, a mesma da energia cinética. Entretanto, de acordo com as Eqs. 7-6 e 7-7 uma unidade equivalente é o newton-metro (N·m). A unidade correspondente no **sistema britânico** é pé-libra (ft·lb). De acordo com a Eq. 7-2, temos:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 0{,}738 \text{ ft} \cdot \text{lb}. \tag{7-9}$$

Trabalho total realizado por várias forças. Quando duas ou mais forças atuam sobre um objeto, o **trabalho total** realizado sobre o objeto é a soma dos trabalhos realizados separadamente pelas forças. Podemos calcular o trabalho total de duas formas. (1) Podemos determinar o trabalho realizado separadamente pelas forças e somar os resultados. (2) Podemos determinar primeiro a resultante $\vec{F}_{res}$ de todas as forças e aplicar a Eq. 7-7, substituindo F por F_{res} e ϕ pelo ângulo entre $\vec{F}_{res}$ e $\vec{d}$. Também podemos usar a Eq. 7-8, substituindo $\vec{F}$ por $\vec{F}_{res}$.

Teorema do Trabalho e Energia Cinética

A Eq. 7-5 relaciona a variação da energia cinética da conta (de um valor inicial $K_i = \frac{1}{2}mv_0^2$ a um valor final $K_f = \frac{1}{2}mv^2$) ao trabalho W (= $F_x d$) realizado sobre a conta. No caso de objetos que se comportam como partículas, podemos generalizar essa equação. Seja ΔK a variação da energia cinética do objeto e W o trabalho resultante realizado sobre ele. Nesse caso, podemos escrever

$$\Delta K = K_f - K_i = W, \tag{7-10}$$

que significa o seguinte:

$$\left(\begin{array}{c}\text{variação da energia cinética}\\ \text{de uma partícula}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{trabalho total executado}\\ \text{sobre a partícula}\end{array}\right).$$

Podemos também escrever

$$K_f = K_i + W, \tag{7-11}$$

que significa o seguinte:

$$\begin{pmatrix}\text{energia cinética depois}\\ \text{da execução do trabalho}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{energia cinética antes}\\ \text{da execução do trabalho}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{trabalho}\\ \text{executado}\end{pmatrix}.$$

Essas relações, conhecidas tradicionalmente como **teorema do trabalho e energia cinética** para partículas, valem para trabalhos positivos e negativos; se o trabalho total realizado sobre uma partícula é positivo, a energia cinética da partícula aumenta de um valor igual ao trabalho realizado. Se o trabalho total é negativo, a energia cinética da partícula diminui de um valor igual ao trabalho realizado.

Por exemplo, se a energia cinética de uma partícula é inicialmente 5 J e a partícula recebe uma energia de 2 J (trabalho total positivo), a energia cinética final é 7 J. Por outro lado, se a partícula cede uma energia total de 2 J (trabalho total negativo), a energia cinética final é 3 J.



FIG. 7-3 Um competidor em uma corrida de camas. Podemos considerar a cama e seu ocupante como uma partícula para calcular o trabalho realizado sobre eles pela força aplicada pelo estudante.

TESTE 1 Uma partícula está se movendo ao longo do eixo x. A energia cinética aumenta, diminui ou permanece a mesma se a velocidade da partícula varia (a) de -3 m/s para -2 m/s e (b) de -2 m/s para 2 m/s? (c) Nas situações dos itens (a) e (b), o trabalho realizado sobre a partícula é positivo, negativo ou nulo?

Exemplo 7-2

A Fig. 7-4*a* mostra dois espiões industriais arrastando um cofre de 225 kg a partir do repouso e, assim, produzindo um deslocamento $\vec{d}$ de módulo 8,50 m, em direção a um caminhão. O empurrão $\vec{F}_1$ do espião 001 tem um módulo de 12,0 N e faz um ângulo de 30,0° para baixo com a horizontal; o empurrão $\vec{F}_2$ do espião 002 tem um módulo de 10,0 N e faz um ângulo de 40,0° para cima com a horizontal. Os módulos e orientações das forças não variam quando o cofre se desloca, e o atrito entre o cofre e o piso é desprezível.

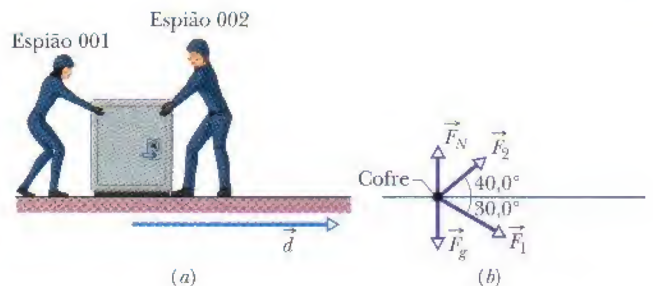


FIG. 7-4 (*a*) Dois espiões arrastam um cofre, produzindo um deslocamento $\vec{d}$. (*b*) Diagrama de corpo livre do cofre.

(a) Qual é o trabalho total realizado pelas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ sobre o cofre durante o deslocamento $\vec{d}$?

IDÉIAS-CHAVE (1) O trabalho total W realizado sobre o cofre é a soma dos trabalhos realizados separadamente pelas duas forças. (2) Como podemos tratar o cofre como uma partícula e as forças são constantes, podemos usar a Eq. 7-7 ($W = Fd\cos\phi$) ou a Eq. 7-8 ($W = \vec{F}\cdot\vec{d}$) para calcular esses trabalhos. Como conhecemos os módulos e as orientações das forças, escolhemos a Eq. 7-7.

Cálculos: De acordo com a Eq. 7-7 e o diagrama de corpo livre do cofre (Fig. 7-4*b*), o trabalho realizado por $\vec{F}_1$ é

$$W_1 = F_1 d\cos\phi_1 = (12{,}0\text{ N})(8{,}50\text{ m})(\cos 30{,}0°)$$
$$= 88{,}33\text{ J},$$

e o trabalho realizado por $\vec{F}_2$ é

$$W_2 = F_2 d\cos\phi_2 = (10{,}0\text{ N})(8{,}50\text{ m})(\cos 40{,}0°)$$
$$= 65{,}11\text{ J}.$$

Assim, o trabalho total W é

$$W = W_1 + W_2 = 88{,}33\text{ J} + 65{,}11\text{ J}$$
$$= 153{,}4\text{ J} \approx 153\text{ J}. \quad \text{(Resposta)}$$

Durante o deslocamento de 8,50 m, portanto, os espiões transferem 153 J para a energia cinética do cofre.

(b) Qual é o trabalho W_g realizado pela força gravitacional $\vec{F}_g$ sobre o cofre durante o deslocamento, e qual é o trabalho W_N realizado pela força normal $\vec{F}_N$ sobre o cofre durante o deslocamento?

IDÉIA-CHAVE Como tanto o módulo como a orientação das duas forças são constantes, podemos calcular o trabalho realizado por elas usando a Eq. 7-7.

Cálculos: Como o módulo da força gravitacional é mg, onde m é a massa do cofre, temos:

$$W_g = mgd \cos 90° = mgd(0) = 0 \quad \text{(Resposta)}$$

e

$$W_N = F_N d \cos 90° = F_N d(0) = 0. \quad \text{(Resposta)}$$

Esses resultados já eram esperados. Como as duas forças são perpendiculares ao deslocamento do cofre, não realizam trabalho e não transferem energia do cofre ou para o cofre.

(c) O cofre está inicialmente em repouso. Qual é sua velocidade v_f após o deslocamento de 8,50 m?

IDÉIA-CHAVE A velocidade do cofre varia porque sua energia cinética muda quando $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ transferem energia para ele.

Cálculos: Podemos relacionar a velocidade ao trabalho realizado combinando as Eqs. 7-10 e 7-1:

$$W = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2.$$

A velocidade inicial v_i é zero, e agora sabemos que o trabalho realizado é 153,4 J. Explicitando v_f e substituindo os valores conhecidos, obtemos:

$$v_f = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2(153{,}4\ \text{J})}{225\ \text{kg}}}$$
$$= 1{,}17\ \text{m/s}. \quad \text{(Resposta)}$$

Exemplo 7-3

Durante uma tempestade, um caixote desliza pelo piso escorregadio de um estacionamento, sofrendo um deslocamento $\vec{d} = (-3{,}0\ \text{m})\hat{\text{i}}$ ao ser empurrado pelo vento com uma força $\vec{F} = (2{,}0\ \text{N})\hat{\text{i}} + (-6{,}0\ \text{m})\hat{\text{j}}$. A situação e os eixos de coordenadas estão representados na Fig. 7-5.

(a) Qual é o trabalho realizado pelo vento sobre o caixote?

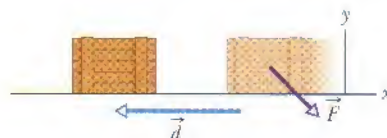


FIG. 7-5 Uma força $\vec{F}$ desacelera um caixote durante um deslocamento $\vec{d}$.

IDÉIA-CHAVE Como podemos tratar o caixote como uma partícula e como a força do vento é constante, podemos usar a Eq. 7-7 ($W = Fd \cos \phi$) ou a Eq. 7-8 ($W = \vec{F} \cdot \vec{d}$) para calcular o trabalho. Como conhecemos $\vec{F}$ e $\vec{d}$ em termos dos vetores unitários, escolhemos a Eq. 7-8.

Cálculos: Temos:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = [(2{,}0\ \text{N})\hat{\text{i}} + (-6{,}0\ \text{m})\hat{\text{j}}] \cdot [(-3{,}0\ \text{m})\hat{\text{i}}].$$

De todos os produtos entre vetores unitários, apenas $\hat{\text{i}} \cdot \hat{\text{i}}$, $\hat{\text{j}} \cdot \hat{\text{j}}$, e $\hat{\text{k}} \cdot \hat{\text{k}}$ são diferentes de zero (veja o Apêndice E). Em nosso caso, temos:

$$W = (2{,}0\ \text{N})(-3{,}0\ \text{m})\hat{\text{i}} \cdot \hat{\text{i}} + (-6{,}0\ \text{N})(-3{,}0\ \text{m})\hat{\text{j}} \cdot \hat{\text{i}}$$
$$= (-6{,}0\ \text{J})(1) + 0 = -6{,}0\ \text{J}. \quad \text{(Resposta)}$$

Assim, a força realiza um trabalho negativo de 6,0 J sobre o caixote, cedendo 6,0 J de energia de sua energia cinética.

(b) Se o caixote tem uma energia cinética de 10 J no início do deslocamento $\vec{d}$, qual é a sua energia ao final do deslocamento?

IDÉIA-CHAVE Como a força realiza um trabalho negativo sobre o caixote, reduz a energia cinética do caixote.

Cálculo: Usando o teorema do trabalho e energia cinética na forma da Eq. 7-11, temos:

$$K_f = K_i + W = 10\ \text{J} + (-6{,}0\ \text{J}) = 4{,}0\ \text{J}. \quad \text{(Resposta)}$$

A redução da energia elétrica indica que o caixote foi freado.

7-6 | Trabalho Realizado pela Força Gravitacional

Vamos examinar agora o trabalho realizado sobre um objeto por uma força gravitacional. A Fig. 7-6 mostra um tomate de massa m que se comporta como partícula arremessado para cima com velocidade inicial v_0 e, portanto, com uma energia cinética inicial $K_i = \frac{1}{2}mv_0^2$. Na subida o tomate é desacelerado por uma força gravitacional $\vec{F}_g$, ou seja, a energia cinética do tomate diminui porque $\vec{F}_g$ realiza trabalho sobre o tomate durante a subida. Uma vez que o tomate pode ser tratado como uma partícula, podemos usar a Eq. 7-7 ($W = Fd \cos \phi$) para expressar o trabalho realizado durante um deslocamento $\vec{d}$. No lugar de F, usamos mg, o módulo de $\vec{F}_g$. Assim, o trabalho W_g realizado pela força gravitacional $\vec{F}_g$ é

$$W_g = mgd \cos \phi \quad \text{(trabalho executado por uma força gravitacional).} \quad (7\text{-}12)$$

Durante a subida, a força $\vec{F}_g$ tem o sentido contrário ao do deslocamento $\vec{d}$, como mostra a Fig. 7-6. Assim, $\phi = 180°$ e

$$W_g = mgd\cos 180° = mgd(-1) = -mgd. \tag{7-13}$$

O sinal negativo indica que, durante a subida, a força gravitacional remove uma energia mgd da energia cinética do objeto. Isto está de acordo com o fato de que o objeto perde velocidade na subida.

Depois que o objeto atinge a altura máxima e começa a descer, o ângulo ϕ entre a força $\vec{F}_g$ e o deslocamento $\vec{d}$ é zero. Assim,

$$W_g = mgd\cos 0° = mgd(+1) = +mgd. \tag{7-14}$$

O sinal positivo significa que agora a força gravitacional transfere uma energia mgd para a energia cinética do objeto. Isto está de acordo com o fato de que o objeto ganha velocidade na descida. (Na realidade, como vamos ver no Capítulo 8, transferências de energia associadas à subida e à descida de um objeto envolvem o sistema completo objeto-Terra.)

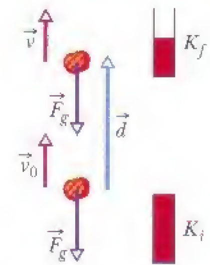


FIG. 7-6 Por causa da força gravitacional $\vec{F}_g$, um tomate de massa m atirado para cima diminui a velocidade de $\vec{v}_0$ para $\vec{v}$ durante um deslocamento $\vec{d}$. Um medidor de energia cinética indica a variação resultante da energia cinética do tomate, de $K_i(=\frac{1}{2}mv_0^2)$ para $K_f(=\frac{1}{2}mv^2)$.

Trabalho Realizado para Levantar e Baixar um Objeto

Suponha agora que levantamos um objeto que se comporta como uma partícula aplicando a ele uma força vertical $\vec{F}$. Durante o deslocamento para cima, esta força aplicada realiza trabalho positivo W_a sobre o objeto, enquanto a força gravitacional realiza um trabalho negativo W_g. A força aplicada tende a transferir energia para o objeto, enquanto a força gravitacional tende a remover energia do objeto. De acordo com a Eq. 7-10, a variação ΔK da energia cinética do objeto devido a essas duas transferências de energia é

$$\Delta K = K_f - K_i = W_a + W_g, \tag{7-15}$$

onde K_f é a energia cinética no fim do deslocamento e K_i é a energia cinética no início do deslocamento. Esta equação também se aplica à descida do objeto, mas nesse caso a força gravitacional tende a transferir energia *para* o objeto, enquanto a força aplicada tende a remover energia *do* objeto.

Em muitos casos, o objeto está em repouso antes e depois do levantamento. Isso acontece, por exemplo, quando você levanta um livro do chão e o coloca em uma estante. Nesse caso, K_f e K_i são nulas e a Eq. 7-15 se reduz a

$$W_a + W_g = 0$$

ou

$$W_a = -W_g. \tag{7-16}$$

Note que obtemos o mesmo resultado se K_f e K_i forem iguais, mesmo que não sejam nulas. De qualquer forma, o resultado significa que o trabalho realizado pela força aplicada é o negativo do trabalho realizado pela força gravitacional, ou seja, a força aplicada transfere para o objeto a mesma quantidade de energia que a força gravitacional remove do objeto. Usando a Eq. 7-12, podemos escrever a Eq. 7-16 na forma

$$W_a = -mgd\cos\phi \quad \text{(trabalho para levantar e baixar; } K_f = K_i\text{)}, \tag{7-17}$$

onde ϕ é o ângulo entre $\vec{F}_g$ e $\vec{d}$. Se o deslocamento é verticalmente para cima (Fig. 7-7*a*), $\phi = 180°$ e o trabalho realizado pela força aplicada é igual a mgd. Se o deslocamento é verticalmente para baixo (Fig. 7-7*b*), $\phi = 0°$ e o trabalho realizado pela força aplicada é igual a $-mgd$.

As Eqs. 7-16 e 7-17 se aplicam a qualquer situação em que um objeto é levantado ou baixado, com o objeto em repouso antes e depois do deslocamento. Elas são independentes do módulo da força usada. Assim, por exemplo, se você levanta acima da cabeça uma caneca que estava no chão, a força que você exerce sobre a caneca varia consideravelmente durante o levantamento. Mesmo assim, como a caneca está em repouso antes e depois do levantamento, o trabalho que a força aplicada por você realiza sobre o caneco é dado pelas Eqs. 7-16 e 7-17, onde, na Eq. 7-17, mg é o peso da caneca e d é a diferença entre a altura inicial e a altura final da caneca.

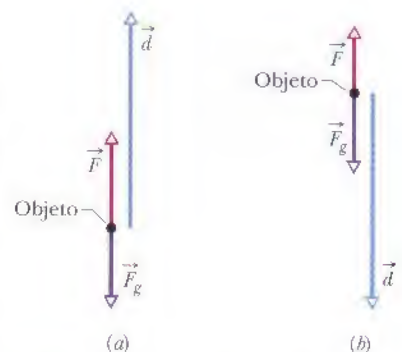


FIG. 7-7 (*a*) Uma força $\vec{F}$ faz um objeto subir. O deslocamento $\vec{d}$ do objeto faz um ângulo $\phi = 180°$ com a força gravitacional $\vec{F}_g$. A força aplicada realiza um trabalho positivo sobre o objeto. (*b*) A força $\vec{F}$ é insuficiente para fazer o objeto subir. O deslocamento $\vec{d}$ do objeto faz um ângulo $\phi = 0°$ com a força gravitacional $\vec{F}_g$. A força aplicada realiza um trabalho negativo sobre o objeto.

Exemplo 7-4

O recorde estabelecido em um dos levantamentos realizados por Paul Anderson (Fig. 7-8) na década de 1950 não foi batido até hoje. Anderson posicionou-se debaixo de uma plataforma de madeira reforçada, apoiou as mãos em um banquinho para se equilibrar e empurrou a plataforma para cima com as costas, fazendo-a subir cerca de 1,0 cm. Sobre a plataforma estavam peças de automóvel e um cofre cheio de chumbo, com um peso total de 27 900 N.

(a) Que trabalho foi realizado sobre a carga pela força gravitacional $\vec{F}_g$ durante este levantamento de Anderson?

IDÉIA-CHAVE Podemos tratar a carga como uma única partícula porque suas componentes se moveram juntas. Assim, podemos usar a Eq. 7-12 ($W_g = mgd \cos \phi$) para calcular o trabalho W_g realizado por $\vec{F}_g$ sobre a carga.

Cálculo: O ângulo ϕ entre a força gravitacional para baixo e o deslocamento para cima é 180°. Substituindo este valor e os outros valores conhecidos na Eq. 7-12, encontramos

$$W_g = mgd \cos \phi = (27\,900 \text{ N})(0{,}010 \text{ m})(\cos 180°)$$
$$= -280 \text{ J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual foi o trabalho realizado pela força que Anderson usou para realizar o levantamento?

IDÉIAS-CHAVE A força usada por Anderson certamente não foi constante. Assim, *não podemos* simplesmente substituir F por um valor constante na Eq. 7-7 para calcular o trabalho realizado. Entretanto, sabemos que o trabalho W_A realizado pela força aplicada por Anderson foi o negativo do trabalho W_g realizado pela força gravitacional $\vec{F}_g$.



FIG. 7-8 Usando um arnês amarrado nas costas, Paul Anderson levantou uma plataforma com uma tropa de escoteiros. *(©AP/ WideWorld Photos)*

Cálculo: De acordo com a Eq. 7-16,

$$W_A = -W_g = +280 \text{ J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Comentário: Este valor não é muito maior que o trabalho necessário para levantar do chão até a altura dos ombros uma mochila escolar cheia de livros. Por que, então, o feito de Anderson foi considerado surpreendente? Trabalho (transferência de energia) e força são grandezas diferentes: embora o levantamento de Anderson não tenha exigido uma transferência de energia muito grande, exigiu uma força realmente excepcional.

Exemplo 7-5

Um caixote de queijo de 15,0 kg, inicialmente em repouso, percorre uma distância $d = 5{,}70$ m, puxado por um cabo em uma rampa sem atrito, até uma altura h de 2,50 m, parando em seguida (Fig. 7-9*a*).

(a) Qual é o trabalho W_g realizado pela força gravitacional $\vec{F}_g$ sobre o caixote durante a subida?

IDÉIA-CHAVE Podemos tratar o caixote como uma partícula e usar a Eq. 7-12 ($W_g = mgd \cos \phi$) para calcular o trabalho W_g realizado por $\vec{F}_g$.

Cálculos: Não conhecemos o ângulo ϕ entre $\vec{F}_g$ e o deslocamento $\vec{d}$. Entretanto, de acordo com o diagrama de corpo livre do caixote (Fig. 7-9*b*), $\phi = \theta + 90°$, onde θ é o ângulo (desconhecido) da rampa. A Eq. 7-12 nos dá, portanto,

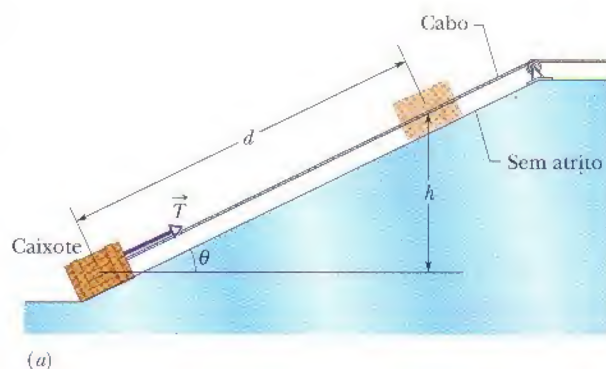
$$W_g = mgd \cos(\theta + 90°) = -mgd \operatorname{sen} \theta, \qquad (7\text{-}18)$$

onde usamos uma identidade trigonométrica para simplificar a expressão. O resultado parece inútil, pois θ não é conhecido. Entretanto (prosseguindo sem esmorecer), vemos pela Fig. 7-9*a* que $d \operatorname{sen} \theta = h$, onde h é uma grandeza conhecida. Com esta substituição, a Eq. 7-18 nos dá

$$W_g = -mgh \qquad (7\text{-}19)$$
$$= -(15{,}0 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2)(2{,}50 \text{ m})$$
$$= -368 \text{ J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Note que, de acordo com a Eq. 7-19, o trabalho W_g realizado pela força gravitacional depende do deslocamento vertical, mas (surpreendentemente) não depende do deslocamento horizontal. (Voltaremos a este ponto no Capítulo 8.)

(b) Qual foi o trabalho W_T realizado sobre o caixote pela força $\vec{T}$ exercida pelo cabo durante a subida?



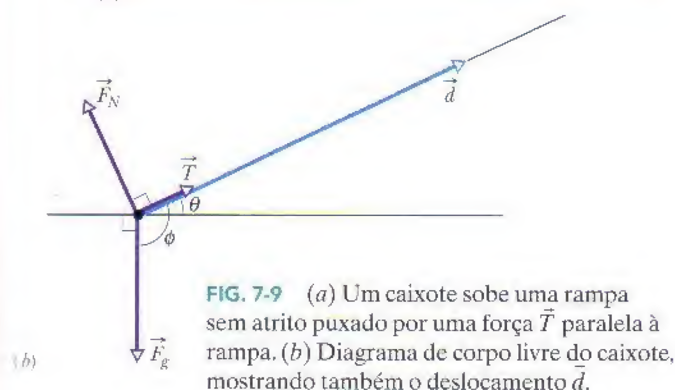


FIG. 7-9 (*a*) Um caixote sobe uma rampa sem atrito puxado por uma força $\vec{T}$ paralela à rampa. (*b*) Diagrama de corpo livre do caixote, mostrando também o deslocamento $\vec{d}$.

IDÉIA-CHAVE Não podemos simplesmente substituir F pelo módulo T da força na Eq. 7-7 ($W = Fd \cos \phi$) porque não conhecemos o valor de T. Entretanto, podemos tratar o caixote como uma partícula e aplicar o teorema do trabalho e energia cinética ($\Delta K = W$).

Cálculos: Como o caixote está em repouso antes e depois da subida, a variação ΔK da energia cinética é zero e, portanto, o trabalho total W realizado sobre o caixote também é zero. Acontece que W é a soma dos trabalhos realizados pelas três forças que agem sobre o caixote. De acordo com o item (a), o trabalho W_g realizado pela força gravitacional $\vec{F}_g$ é -368 J. O trabalho W_N realizado pela força normal $\vec{F}_N$ da rampa sobre o caixote é zero, pois $\vec{F}_N$ é perpendicular ao deslocamento. O trabalho W_T realizado pela forma $\vec{T}$ é a grandeza que queremos determinar. Assim, de acordo com o teorema do trabalho e energia cinética,

$$\Delta K = W_T + W_g + W_N$$

ou

$$0 = W_T - 368 \text{ J} + 0,$$

e portanto

$$W_T = 368 \text{ J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Exemplo 7-6 Aumente sua capacidade

Um elevador de massa $m = 500$ kg está descendo com velocidade $v_i = 4{,}0$ m/s quando o cabo de sustentação começa a deslizar, permitindo que o elevador caia com aceleração constante $\vec{a} = \vec{g}/5$ (Fig. 7-10*a*).

(a) Se o elevador cai de uma altura $d = 12$ m, qual é o trabalho W_g realizado sobre o elevador pela força gravitacional $\vec{F}_g$?

IDÉIA-CHAVE Podemos tratar o elevador como uma partícula e, portanto, usar a Eq. 7-12 ($W_g = mgd \cos \phi$) para calcular o trabalho W_g.

Cálculo: De acordo com a Fig. 7-10*b*, o ângulo entre $\vec{F}_g$ e o deslocamento $\vec{d}$ do elevador é 0°. Assim, de acordo com a Eq. 7-12,

$$W_g = mgd \cos 0° = (500 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2)(12 \text{ m})(1)$$
$$= 5{,}88 \times 10^4 \text{ J} \approx 59 \text{ kJ}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é o trabalho W_T realizado sobre o elevador pela força $\vec{T}$ exercida pelo cabo?

IDÉIAS-CHAVE (1) Podemos calcular o trabalho W_T usando a Eq. 7-7 ($W = Fd \cos \phi$) se obtivermos uma expressão para o módulo T da tensão do cabo. (2) Podemos obter essa expressão escrevendo a segunda lei de Newton para as componentes das forças em relação ao eixo y da Fig. 7-10*b* ($F_{res,y} = ma_y$).

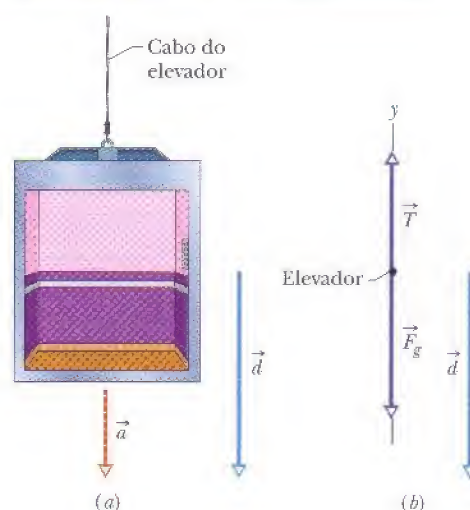


FIG. 7-10 Um elevador, que estava descendo com velocidade v, de repente começa a acelerar para baixo. (*a*) O elevador sofre um deslocamento $\vec{d}$ com uma aceleração constante $\vec{a} = \vec{g}/5$. (*b*) Diagrama de corpo livre do elevador, mostrando também o deslocamento.

Cálculos: Temos:

$$T - F_g = ma.$$

Explicitando T, substituindo F_g por mg e substituindo o resultado na Eq. 7-7, obtemos

$$W_T = Td\cos\phi = m(a+g)d\cos\phi.$$

Em seguida, substituindo a aceleração a (para baixo) por $-g/5$ e o ângulo ϕ entre as forças $\vec{T}$ e $m\vec{g}$ por 180°, obtemos

$$W_T = m\left(-\frac{g}{5}+g\right)d\cos\phi = \frac{4}{5}mgd\cos\phi$$

$$= \frac{4}{5}(500\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)(12\ \text{m})\cos 180°$$

$$= -4{,}70\times10^4\ \text{J} \approx -47\ \text{kJ}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Atenção: Note que W_T não é simplesmente o negativo de W_g. A razão disso é que como o elevador acelera durante a queda, sua velocidade varia e, conseqüentemente, a energia cinética também varia. Assim, a Eq. 7-16 (que envolve a suposição de que a energia é igual no início e no final do processo) *não se aplica* a este caso.

(c) Qual é o trabalho total W realizado sobre o elevador durante a queda?

Cálculo: O trabalho total é a soma dos trabalhos realizados pelas forças a que o elevador está sujeito:

$$W = W_g + W_T = 5{,}88\times10^4\ \text{J} - 4{,}70\times10^4\ \text{J}$$

$$= 1{,}18\times10^4\ \text{J} \approx 12\ \text{kJ}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(d) Qual é a energia cinética do elevador no final da queda de 12 m?

IDÉIA-CHAVE A energia cinética muda *por causa* do trabalho total realizado sobre o elevador, de acordo com a Eq. 7-11 ($K_f = K_i + W$).

Cálculo: De acordo com a Eq. 7-1, podemos escrever a energia cinética no início da queda como $K_i = \frac{1}{2}mv_i^2$. Nesse caso, a Eq. 7-11 se torna

$$K_f = K_i + W = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + W$$

$$= \tfrac{1}{2}(500\ \text{kg})(4{,}0\ \text{m/s})^2 + 1{,}18\times10^4\ \text{J}$$

$$= 1{,}58\times10^4\ \text{J} \approx 16\ \text{kJ}. \qquad \text{(Resposta)}$$

7-7 | Trabalho Realizado por uma Força Elástica

Vamos agora discutir o trabalho realizado sobre uma partícula por um tipo particular de *força variável*: a **força elástica** exercida por uma mola. Muitas forças na natureza têm a mesma forma matemática que a força exercida por uma mola. Assim, examinando esta força em particular, podemos compreender muitas outras.

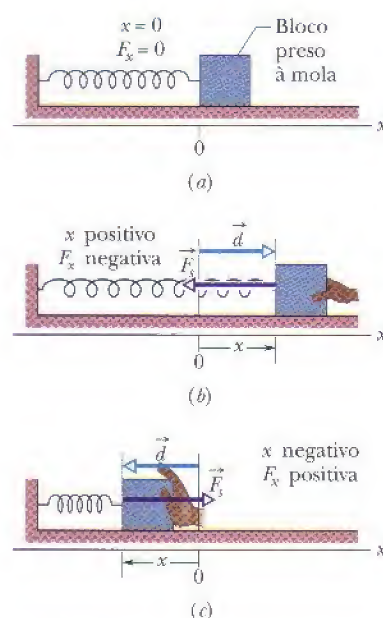


FIG. 7-11 (*a*) Uma mola no estado relaxado. A origem do eixo x foi colocada na extremidade da mola que está presa ao bloco. (*b*) O bloco sofre um deslocamento $\vec{d}$ e a mola sofre uma distensão (variação positiva de x). Observe a força restauradora $\vec{F}_s$ exercida pela mola. (*c*) A mola sofre uma compressão (variação negativa de x). Observe novamente a força restauradora.

A Força Elástica

A Fig. 7-11a mostra uma mola no **estado relaxado**, ou seja, nem comprimida nem alongada. Uma das extremidades está fixa, e um objeto que se comporta como uma partícula, um bloco, por exemplo, está preso na outra extremidade. Se alongamos a mola puxando o bloco para a direita, como na Fig. 7-11*b*, a mola puxa o bloco para a esquerda. (Como a força elástica tende a restaurar o estado relaxado, ela também é chamada de *força restauradora*.) Se comprimimos a mola empurrando o bloco para a esquerda, como na Fig. 7-11*c*, a mola empurra o bloco para a direita.

Como uma boa aproximação para muitas molas, a força $\vec{F}_s$ de uma mola é proporcional ao deslocamento $\vec{d}$ da extremidade livre a partir da posição que ocupa quando a mola está no estado relaxado. A *força elástica* é dada por

$$\vec{F}_s = -k\vec{d} \qquad \text{(Lei de Hooke)}, \qquad (7\text{-}20)$$

conhecida como **lei de Hooke**, em homenagem a Robert Hooke, cientista inglês do final do século XVII. O sinal negativo na Eq. 7-20 indica que o sentido da força elástica é sempre oposto ao sentido do deslocamento da extremidade livre da mola. A constante k é chamada de **constante elástica** (ou **constante de força**), e é uma medida da rigidez da mola. Quanto maior o valor de k, mais rígida é a mola, ou seja, maior é a força exercida pela mola para um dado deslocamento. A unidade de k no SI é o newton por metro.

Na Fig. 7-11 foi traçado um eixo x paralelo à maior dimensão da mola, com a origem ($x = 0$) na posição da extremidade livre quando a mola está no estado relaxado. Para esta configuração comum, podemos escrever a Eq. 7-20 na forma

$$F_x = -kx \qquad \text{(Lei de Hooke)}, \qquad (7\text{-}21)$$

onde mudamos o índice. Se x é positivo (ou seja, se a mola está alongada para a direita), F_x é negativa (é um puxão para a esquerda). Se x é negativo (ou seja, se a mola está comprimida para a esquerda), F_x é positiva (ela é um empurrão para a direita). Note que a força elástica é uma *força variável*, uma vez que depende de x, a posição da extremidade livre. Assim, F_x pode ser representada na forma $F(x)$. Note também que a lei de Hooke é uma relação *linear* entre F_x e x.

O Trabalho Realizado por uma Força Elástica

Para determinar o trabalho realizado pela mola quando o bloco da Fig. 7-11*a* se move, vamos fazer duas hipóteses simplificadoras a respeito da mola. (1) Trata-se de uma mola *sem massa*, ou seja, uma mola cuja massa é desprezível em relação à massa do bloco. (2) Trata-se de uma *mola ideal*, ou seja, uma mola que obedece exatamente à lei de Hooke. Vamos supor também que não existe atrito entre o bloco e o piso, e que o bloco se comporta como uma partícula.

Vamos dar ao bloco um impulso para a direita, apenas para colocá-lo em movimento. Quando o bloco se move para a direita a força elástica F_x realiza trabalho sobre ele, diminuindo a energia cinética e desacelerando o bloco. Entretanto, *não podemos* calcular o trabalho usando a Eq. 7-7 ($W = Fd \cos \phi$) porque essa equação supõe que a força é constante. A força elástica é uma força variável.

Para determinar o trabalho realizado pela mola usamos os métodos do cálculo. Seja x_i a posição inicial do bloco e x_f a posição do bloco em um instante posterior. Vamos dividir a distância entre essas duas posições em muitos segmentos, cada um com um pequeno comprimento Δx. Rotulamos esses segmentos, a partir de x_i, como segmentos 1, 2 e assim por diante. Quando o bloco se move no interior de um desses segmentos, a força elástica praticamente não varia, já que o segmento é tão curto que x é praticamente constante. Assim, podemos aproximar o módulo da força como sendo constante dentro de cada segmento. Vamos rotular esses módulos como F_{x1} no segmento 1, F_{x2} no segmento 2, e assim por diante.

Com uma força constante em cada segmento, *podemos* calcular o trabalho realizado dentro de cada segmento usando a Eq. 7-7. Neste caso, $\phi = 180°$, de modo que $\cos \phi = -1$. Assim, o trabalho realizado é $-F_{x1}\Delta x$ no segmento 1, $-F_{x2}\Delta x$ no segmento 2, e assim por diante. O trabalho total W_s realizado pela mola de x_i a x_f é a soma de todos esses trabalhos:

$$W_s = \sum -F_{xj}\Delta x, \tag{7-22}$$

onde $j = 1, 2...$ é o número de ordem de cada segmento. No limite em que Δx tende a zero, a Eq. 7-22 se torna

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} -F_x\,dx. \tag{7-23}$$

De acordo com a Eq. 7-21, o módulo da força F_x é kx. Assim, temos:

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} -kx\,dx = -k\int_{x_i}^{x_f} x\,dx$$

$$= (-\tfrac{1}{2}k)[x^2]_{x_i}^{x_f} = (-\tfrac{1}{2}k)(x_f^2 - x_i^2). \tag{7-24}$$

ou seja

$$W_s = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2 \quad \text{(trabalho de uma força elástica).} \tag{7-25}$$

Este trabalho W_s realizado pela mola pode ser negativo ou positivo, dependendo do fato de a transferência *total* de energia ser do bloco para a mola ou da mola para o bloco quando este se move de x_i para x_f. *Atenção*: A posição final x_f aparece no *segundo* termo do lado direito da Eq. 7-25. Assim, de acordo com a Eq. 7-25:

O trabalho W_s é positivo se a posição final do bloco está mais próxima da posição no estado relaxado ($x = 0$) que a posição inicial, e negativo se a posição final está mais afastada de $x = 0$ que a posição inicial. O trabalho é zero se a posição final do bloco está à mesma distância de $x = 0$ que a posição inicial.

Supondo que $x_i = 0$ e chamando a posição final de x, a Eq. 7-25 se torna

$$W_s = -\tfrac{1}{2}kx^2 \quad \text{(trabalho de uma força elástica).} \tag{7-26}$$

O Trabalho Realizado por uma Força Aplicada

Suponha agora que deslocamos o bloco ao longo do eixo x mantendo uma força $\vec{F}_a$ aplicada ao bloco. Durante o deslocamento, a força aplicada realiza sobre o bloco um trabalho W_a, enquanto a força elástica realiza um trabalho W_s. De acordo com a Eq. 7-10, a variação ΔK da energia cinética do bloco devido a essas duas transferências de energia é

$$\Delta K = K_f - K_i = W_a + W_s, \tag{7-27}$$

onde K_f é a energia cinética no final do deslocamento e K_i é a energia cinética no início do deslocamento. Se o bloco está em repouso no início e no fim do deslocamento, K_i e K_f são iguais a zero e a Eq. 7-27 se reduz a

$$W_a = -W_s. \tag{7-28}$$

Se um bloco que está preso a uma mola se encontra em repouso antes e depois de um deslocamento, o trabalho realizado sobre o bloco pela força aplicada responsável pelo deslocamento é o negativo do trabalho realizado sobre o bloco pela força elástica.

Atenção: Se o bloco não estiver em repouso antes e depois do deslocamento, esta afirmação não é verdadeira.

TESTE 2 Em três situações, as posições inicial e final, respectivamente, ao longo do eixo x da Fig. 7-11 são: (a) -3 cm, 2 cm; (b) 2 cm, 3 cm; (c) -2 cm, 2 cm. Em cada situação, o trabalho realizado sobre o bloco pela força elástica é positivo, negativo ou nulo?

Exemplo 7-7

Um pacote de pralina está sobre um piso sem atrito, preso à extremidade livre de uma mola, como na Fig. 7-11*a*. Uma força aplicada para a direita, de módulo $F_a = 4{,}9$ N, seria necessária para manter o bloco em $x_1 = 12$ mm.

(a) Qual é o trabalho realizado sobre o bloco pela força elástica da mola se o bloco é puxado para a direita de $x_0 = 0$ até $x_2 = 17$ mm?

IDÉIA-CHAVE Quando o bloco se move de uma posição para outra, a força elástica realiza trabalho sobre ele, de acordo com a Eq. 7-25 ou a Eq. 7-26.

Cálculos: Sabemos que a posição inicial x_i é 0 e que a posição final é 17 mm, mas não conhecemos a constante elástica k. Podemos calcular k usando a Eq. 7-21 (lei de Hooke), mas precisamos da seguinte informação adicional: Para que o bloco se mantenha em repouso em $x_1 = 12$ mm, a força elástica deve equilibrar a força aplicada (é o que diz a segunda lei de Newton). Assim, a força elástica F_x tem que ser $-4{,}9$ N (para a esquerda na Fig. 7-11*b*) e, portanto, de acordo com a Eq. 7-21 ($F_x = -kx$), temos:

$$k = \frac{F_x}{x_1} = -\frac{-4{,}9\ \text{N}}{12 \times 10^{-3}\ \text{m}} = 408\ \text{N/m}.$$

Com o bloco em $x_2 = 17$ mm, a Eq. 7-26 nos dá

$$W_s = -\tfrac{1}{2}kx_2^2 = -\tfrac{1}{2}(408\ \text{N/m})(17 \times 10^{-3}\ \text{m})^2$$
$$= -0{,}059\ \text{J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Em seguida, o bloco é deslocado para a esquerda até $x_3 = -12$ mm. Que trabalho a força elástica realiza sobre o bloco neste deslocamento? Explique o sinal deste trabalho.

Cálculo: Agora, $x_i = +17$ mm, $x_f = -12$ mm, e a Eq. 7-25 nos dá

$$\begin{aligned}W_s &= \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2 = \tfrac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2)\\ &= \tfrac{1}{2}(408\ \text{N/m})[(17\times10^{-3}\ \text{m})^2 - (-12\times10^{-3}\ \text{m})^2]\\ &= 0{,}030\ \text{J} = 30\ \text{mJ}. \qquad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

Este trabalho realizado sobre o bloco pela força elástica é positivo porque a força elástica realiza mais trabalho positivo quando o bloco é deslocado de $x_i = +17$ mm para a posição relaxada da mola do que trabalho negativo quando o bloco é deslocado da posição relaxada da mola até $x_f = -12$ mm.

Exemplo 7-8

Na Fig. 7-12, depois de deslizar sobre uma superfície horizontal sem atrito com velocidade $v = 0{,}50$ m/s, um pote de cominho de massa $m = 0{,}40$ kg colide com uma mola de constante elástica $k = 750$ N/m e começa a comprimi-la. No instante em que o pote pára momentaneamente por causa da força exercida pela mola, de que distância d a mola foi comprimida?

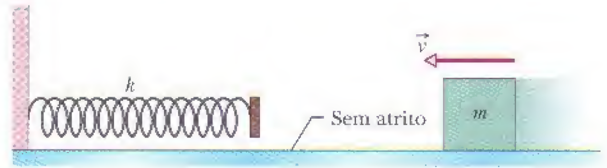


FIG. 7-12 Um pote de massa m se move com velocidade $\vec{v}$ em direção a uma mola de constante k.

IDÉIAS-CHAVE

1. O trabalho W_s realizado sobre o pote pela força elástica está relacionado à distância d pedida através da Eq. 7-26 ($W_s = -\tfrac{1}{2}kx^2$) com d substituindo x.
2. O trabalho W_s também está relacionado à energia cinética do pote através da Eq. 7-10 ($K_f - K_i = W$).
3. A energia cinética do pote tem um valor inicial $K = \tfrac{1}{2}mv^2$ e é nula quando o pote está momentaneamente em repouso.

Cálculos: Combinando as duas primeiras idéias, escrevemos o teorema do trabalho e energia cinética para o pote na seguinte forma:

$$K_f - K_i = -\tfrac{1}{2}kd^2.$$

Substituindo as energias cinéticas inicial e final pelos seus valores, obtidos através da terceira idéia, temos:

$$0 - \tfrac{1}{2}mv^2 = -\tfrac{1}{2}kd^2.$$

Simplificando, explicitando d e substituindo os valores conhecidos, obtemos:

$$\begin{aligned}d &= v\sqrt{\frac{m}{k}} = (0{,}50\ \text{m/s})\sqrt{\frac{0{,}40\ \text{kg}}{750\ \text{N/m}}}\\ &= 1{,}2\times10^{-2}\ \text{m} = 1{,}2\ \text{cm}. \qquad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

7-8 | Trabalho Realizado por uma Força Variável Genérica

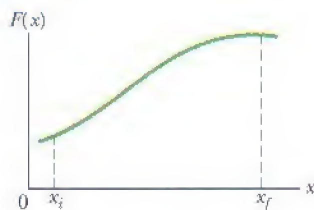
Análise Unidimensional

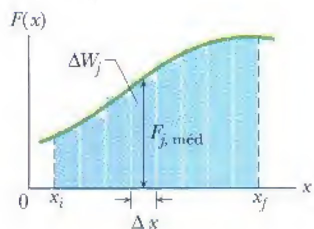
Vamos voltar à situação da Fig. 7-2, mas agora suponha que a força aponta no sentido positivo do eixo x e que o módulo da força varia com a posição x. Assim, quando a conta (partícula) se move, o módulo $F(x)$ da força que realiza trabalho sobre ela varia. Apenas o módulo da força varia; sua orientação permanece a mesma. Além disso, o módulo da força em qualquer posição não varia com o tempo.

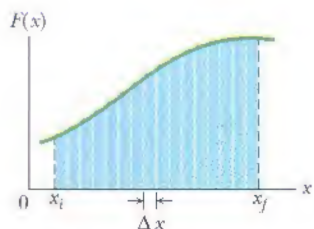
A Fig. 7-13a mostra o gráfico de uma *força variável unidimensional* como a que acabamos de descrever. Queremos obter uma expressão para o trabalho realizado por esta força sobre a partícula quando ela se desloca de uma posição inicial x_i para uma posição final x_f. Entretanto, não podemos usar a Eq. 7-7 ($W = Fd\cos\phi$) porque ela só é válida no caso de uma força constante $\vec{F}$. Assim, usaremos novamente os métodos do cálculo. Dividimos a área sob a curva da Fig. 7-13a em um grande número de faixas estreitas de largura Δx (Fig. 7-13b). Escolhemos Δx suficientemente pequeno para que possamos considerar a força $F(x)$ aproximadamente constante nesse intervalo. Vamos chamar de $F_{j,\text{méd}}$ o valor médio de $F(x)$ no intervalo de ordem j. Nesse caso, $F_{j,\text{méd}}$ na Fig. 7-13b é a altura da faixa de ordem j.

Com $F_{j,\text{méd}}$ constante, o incremento (pequena quantidade) de trabalho ΔW_j realizado pela força no intervalo de ordem j pode ser calculado usando a Eq. 7-7:

$$\Delta W_j = F_{j,\text{méd}}\,\Delta x. \qquad (7\text{-}29)$$







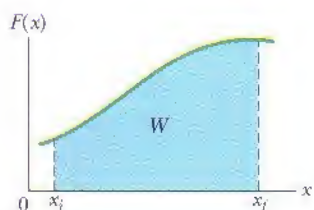


FIG. 7-13 (*a*) Gráfico da amplitude de uma força unidimensional $\vec{F}(x)$ em função da posição x de uma partícula sobre a qual a força atua. A partícula se desloca de x_i a x_f. (*b*) O mesmo que (*a*), mas com a área sob a curva dividida em faixas estreitas. (*c*) O mesmo que (*b*), mas com a área sob a curva dividida em faixas mais estreitas. (*d*) O caso-limite. O trabalho realizado pela força é dado pela Eq. 7-32 e é representado pela área sombreada entre a curva e o eixo x e entre x_i e x_f.

Na Fig. 7-13*b*, ΔW_j é, portanto, igual à área sob a faixa retangular sombreada de ordem *j*.

Para determinar o trabalho total W realizado pela força quando a partícula se desloca de x_i para x_f, somamos as áreas de todas as faixas entre x_i e x_f da Fig. 7-13*b*:

$$W = \Sigma\, \Delta W_j = \Sigma\, F_{j,\text{méd}}\, \Delta x. \tag{7-30}$$

A Eq. 7-30 é uma aproximação, porque a "escada" formada pelos lados superiores dos retângulos da Fig. 7-13*b* é apenas uma aproximação da curva real de $F(x)$.

Podemos melhorar a aproximação reduzindo a largura Δx dos retângulos e usando mais retângulos, como na Fig. 7-13*c*. No limite, fazemos a largura dos retângulos tender a zero; nesse caso, o número de retângulos se torna infinitamente grande e temos, como resultado exato,

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \Sigma\, F_{j,\text{méd}}\, \Delta x. \tag{7-31}$$

Este limite é exatamente a definição da integral da função $F(x)$ entre os limites x_i e x_f. Assim, a Eq. 7-31 se torna

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx \qquad \text{(trabalho de uma força variável).} \tag{7-32}$$

Se conhecemos a função $F(x)$, podemos substituí-la na Eq. 7-32, introduzir os limites de integração apropriados, efetuar a integração e assim calcular o trabalho. (O Apêndice E contém uma lista das integrais mais usadas.) Geometricamente, o trabalho é igual à área entre a curva de $F(x)$ e o eixo x, entre os limites x_i e x_f (área sombreada na Fig. 7-13*d*).

Análise Tridimensional

Considere uma partícula sob a ação de uma força tridimensional

$$\vec{F} = F_x\hat{\text{i}} + F_y\hat{\text{j}} + F_z\hat{\text{k}}, \tag{7-33}$$

cujas componentes F_x, F_y e F_z podem depender da posição da partícula, ou seja, elas podem ser funções da posição. Vamos, porém, fazer três simplificações: F_x pode depender de x mas não de y ou z, F_y pode depender de y mas não de x ou z e F_z pode depender de z mas não de x ou y. Suponha que a partícula sofra um deslocamento incremental

$$d\vec{r} = dx\hat{\text{i}} + dy\hat{\text{j}} + dz\hat{\text{k}}. \tag{7-34}$$

De acordo com a Eq. 7-8, o incremento dW do trabalho realizado sobre a partícula pela força $\vec{F}$ durante o deslocamento $d\vec{r}$ é

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \tag{7-35}$$

O trabalho W realizado por $\vec{F}$ enquanto a partícula se move de uma posição inicial r_i de coordenadas (x_i, y_i, z_i) para uma posição final r_f de coordenadas (x_f, y_f, z_f) é, portanto,

$$W = \int_{r_i}^{r_f} dW = \int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y\, dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z\, dz. \tag{7-36}$$

Se $\vec{F}$ possui apenas a componente x, os termos da Eq. 7-36 que envolvem y e z são nulos e a equação se reduz à Eq. 7-32.

Teorema do Trabalho e Energia Cinética com uma Força Variável

A Eq. 7-32 permite calcular o trabalho realizado por uma força variável sobre uma partícula em uma situação unidimensional. Vamos agora verificar se o trabalho calculado é realmente igual à variação da energia cinética da partícula, como afirma o teorema do trabalho e energia cinética.

Considere uma partícula de massa m que se move ao longo de um eixo x e está sujeita a uma força $F(x)$ paralela ao eixo x. De acordo com a Eq. 7-32, o trabalho realizado por esta força sobre a partícula quando a partícula se desloca da posição x_i para a posição x_f é dado por

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_f} ma\,dx, \tag{7-37}$$

onde usamos a segunda lei de Newton para substituir $F(x)$ por ma. Podemos escrever o integrando $ma\,dx$ da Eq. 7-37 como

$$ma\,dx = m\frac{dv}{dt}\,dx. \tag{7-38}$$

Usando a regra da cadeia para derivadas, temos:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v, \tag{7-39}$$

e a Eq. 7-38 se torna

$$ma\,dx = m\frac{dv}{dt}v\,dx = mv\,dv. \tag{7-40}$$

Substituindo a Eq. 7-40 na Eq. 7-37, obtemos

$$W = \int_{v_i}^{v_f} mv\,dv = m\int_{v_i}^{v_f} v\,dv$$
$$= \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2. \tag{7-41}$$

Observe que quando mudamos a variável de integração de x para v tivemos que expressar os limites da integral em termos da nova variável. Observe também que, como a massa m é constante, pudemos colocá-la do lado de fora da integral.

Reconhecendo os termos do lado direito da Eq. 7-41 como energias cinéticas, podemos escrever esta equação na forma

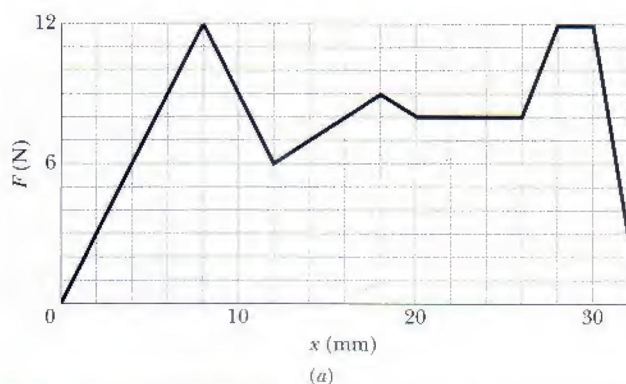
$$W = K_f - K_i = \Delta K,$$

que é o teorema do trabalho e energia cinética.

Exemplo 7-9

Na anestesia epidural, como a usada nos partos, o médico ou anestesista precisa introduzir uma agulha nas costas do paciente e atravessar várias camadas de tecido até chegar a uma região estreita chamada espaço epidural, que envolve a medula espinhal. A agulha é usada para injetar o líquido anestésico. Esse delicado procedimento requer muita prática, já que o médico precisa saber quando chegou ao espaço epidural e não pode ultrapassar a região, um erro que poderia resultar em sérias complicações.

A sensibilidade de um médico em relação à penetração da agulha se baseia no fato de que a força que deve ser aplicada à agulha para fazê-la avançar através dos tecidos é variável. A Fig. 7-14a é um gráfico do módulo F da força em função do deslocamento x da ponta da agulha durante



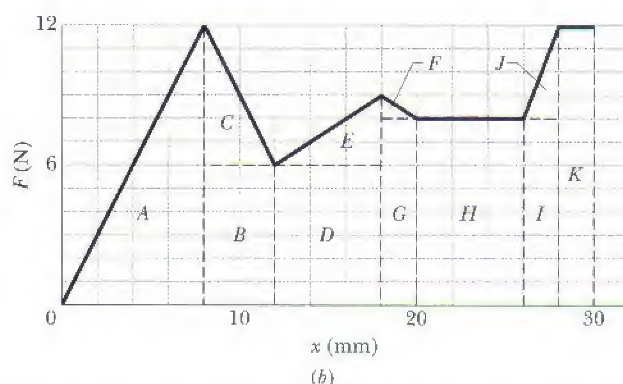


FIG. 7-14 (a) A amplitude F da força em função do deslocamento x da agulha em uma anestesia epidural. (b) Divisão da região entre a curva e o eixo em várias partes para calcular a área.

uma anestesia epidural típica. (Os dados originais foram retificados para produzir os segmentos de reta.) Quando x cresce a partir de 0, a pele oferece resistência à agulha, mas em $x = 8{,}0$ mm a pele é perfurada e a força necessária diminui. Da mesma forma, a agulha perfura o ligamento interespinhoso em $x = 18$ mm e o ligamento amarelo, relativamente duro, em $x = 30$ mm. A agulha entra, então, no espaço epidural (onde deve ser injetado o líquido anestésico) e a força diminui bruscamente. Um médico recém-formado precisa se familiarizar com este comportamento da força com o deslocamento para saber quando parar de empurrar a agulha. (Este é o comportamento a ser programado em uma simulação em realidade virtual de uma anestesia epidural.) Qual é o trabalho W realizado pela força exercida sobre a agulha para levá-la até o espaço epidural em $x = 30$ mm?

IDÉIAS-CHAVE (1) Podemos calcular o trabalho W realizado pela força variável $F(x)$ integrando a força para todas as posições x consideradas. De acordo com a Eq. 7-32,

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx.$$

Queremos calcular o trabalho realizado pela força durante o deslocamento de $x_i = 0$ até $x_f = 0{,}030$ m. (2) Podemos calcular a integral determinando a área sob a curva da Fig. 7-14*a*:

$$W = \begin{pmatrix}\text{área entre a curva da força} \\ \text{e o eixo } x, \text{ de } x_i \text{ a } x_f\end{pmatrix}.$$

Cálculos: Como nosso gráfico é formado por segmentos de reta, podemos calcular a área separando a região sob a curva em regiões retangulares e triangulares, como na Fig. 7-14*b*. Assim, por exemplo, a área da região triangular A é

$$\text{área}_A = \tfrac{1}{2}(0{,}0080\text{ m})(12\text{ N}) = 0{,}048\text{ N}\cdot\text{m} = 0{,}048\text{ J}.$$

Depois de calcular as áreas de todas as regiões da Fig. 7-14*b*, descobrimos que o trabalho total é

$$\begin{aligned} W &= (\text{a soma da áreas das regiões de } A \text{ a } K) \\ &= 0{,}048 + 0{,}024 + 0{,}012 + 0{,}036 + 0{,}009 + 0{,}001 \\ &\quad + 0{,}016 + 0{,}048 + 0{,}016 + 0{,}004 + 0{,}024 \\ &= 0{,}238\text{ J}. \qquad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

Exemplo 7-10

A força $\vec{F} = (3x^2\text{ N})\hat{\text{i}} + (4\text{ N})\hat{\text{j}}$, com x em metros, age sobre uma partícula, mudando apenas a energia cinética da partícula. Qual é o trabalho realizado sobre a partícula quando ela se desloca das coordenadas (2 m, 3 m) para (3 m, 0 m)? A velocidade da partícula aumenta, diminui ou permanece a mesma?

IDÉIA-CHAVE A força é variável porque sua componente x depende do valor de x. Assim, não podemos usar as Eqs. 7-7 e 7-8 para calcular o trabalho realizado. Em vez disso, devemos usar a Eq. 7-36 para integrar a força.

Cálculo: Escrevemos duas integrais, uma para cada eixo:

$$\begin{aligned} W &= \int_2^3 3x^2\,dx + \int_3^0 4\,dy = 3\int_2^3 x^2\,dx + 4\int_3^0 dx^4 \\ &= 3[\tfrac{1}{3}x^3]_2^3 + 4[y]_3^0 = [3^3 - 2^3] + 4[0-3] \\ &= 7{,}0\text{ J}. \qquad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

O resultado positivo significa que a força $\vec{F}$ transfere energia para a partícula. Assim, a energia cinética da partícula aumenta e, como $K = \frac{1}{2}mv^2$, a velocidade escalar também aumenta.

7-9 | Potência

A taxa de variação com o tempo do trabalho realizado por uma força recebe o nome de **potência**. Se uma força realiza um trabalho W em um intervalo de tempo Δt, a **potência média** desenvolvida durante esse intervalo de tempo é

$$P_{\text{méd}} = \frac{W}{\Delta t} \quad \text{(potência média).} \qquad (7\text{-}42)$$

A **potência instantânea** P é a taxa de variação instantânea com a qual o trabalho é realizado, que pode ser escrita como

$$P = \frac{dW}{dt} \quad \text{(potência instantânea).} \qquad (7\text{-}43)$$

Suponha que conhecemos o trabalho $W(t)$ realizado por uma força em função do tempo. Nesse caso, para determinar a potência instantânea P, digamos, no instante $t = 3{,}0$ s da realização do trabalho, basta derivar $W(t)$ em relação ao tempo e calcular o valor da derivada para $t = 3{,}0$ s.

A unidade de potência no SI é o joule por segundo. Essa unidade é usada com tanta freqüência que recebeu um nome especial, o **watt** (W), em homenagem a James Watt, cuja contribuição foi fundamental para o aumento da potência das máquinas a vapor. No sistema britânico a unidade de potência é o pé-libra por segundo. O horsepower também é freqüentemente usado. Seguem as relações entre essas unidades e a unidade de potência no SI.

$$1 \text{ watt} = 1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 0{,}738 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} \tag{7-44}$$

e

$$1 \text{ horsepower} = 1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} = 746 \text{ W}. \tag{7-45}$$



FIG. 7-15 A potência desenvolvida pela força aplicada à carga pela picape é igual à taxa com a qual a força realiza trabalho sobre a carga. (*REGLAIN FREDERIC/Gamma-Presse, Inc.*)

Examinando a Eq. 7-42 vemos que o trabalho pode ser expresso como potência multiplicada por tempo, como na unidade quilowatt-hora, muito usada na prática. A relação entre o quilowatt-hora e o joule é a seguinte:

$$1 \text{ quilowatt-hora} = 1 \text{ kW} \cdot \text{h} = (10^3 \text{ W})(3600 \text{ s})$$
$$= 3{,}60 \times 10^6 \text{ J} = 3{,}60 \text{ MJ}. \tag{7-46}$$

Talvez por aparecer nas contas de luz, o watt e o quilowatt-hora são normalmente associados à energia elétrica. Entretanto, podem ser usados para medir outras formas de potência e energia. Se você apanha um livro do chão e o coloca sobre uma mesa, pode dizer que realizou um trabalho, digamos, de 4×10^{-6} kW·h (ou 4 mW·h).

Também podemos expressar a taxa com a qual uma força realiza trabalho sobre uma partícula (ou um objeto que se comporta como uma partícula) em termos da força e da velocidade da partícula. Para uma partícula que se move em linha reta (ao longo do eixo x, digamos) sob a ação de uma força $\vec{F}$ que faz um ângulo ϕ na direção de movimento da partícula, a Eq. 7-43 se torna

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F\cos\phi \, dx}{dt} = F\cos\phi\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

ou

$$P = Fv\cos\phi. \tag{7-47}$$

Escrevendo o lado direito da Eq. 7-47 como o produto escalar $\vec{F}\cdot\vec{v}$, a equação se torna

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} \quad \text{(potência instantânea)}. \tag{7-48}$$

Assim, por exemplo, a picape da Fig. 7-15 exerce uma força $\vec{F}$ sobre a carga que está sendo rebocada, que tem velocidade $\vec{v}$ em um certo instante. A potência instantânea desenvolvida por $\vec{F}$ é a taxa com a qual $\vec{F}$ realiza trabalho sobre a carga nesse instante e é dada pelas Eqs. 7-47 e 7-48. Podemos dizer que essa potência é "a potência da picape", mas devemos ter em mente o que isso significa: Potência é a taxa com a qual a *força* aplicada realiza trabalho.

TESTE 3 Um bloco descreve um movimento circular uniforme sob a ação de uma corda presa ao bloco e ao centro da trajetória. A potência desenvolvida pela força que a corda exerce sobre o bloco é positiva, negativa ou nula?

Exemplo 7-11

A Fig. 7-16 mostra as forças constantes $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ que agem sobre uma caixa enquanto ela desliza para a direita sobre um piso sem atrito. A força $\vec{F}_1$ é horizontal, de módulo 2,0 N; a força $\vec{F}_2$ está inclinada para cima de um ângulo de 60° em relação ao piso e tem um módulo de 4,0 N. A velocidade escalar v da caixa em um certo instante é 3,0 m/s. Quais são as potências desenvolvidas pelas duas forças que agem sobre a caixa nesse instante? Qual é a

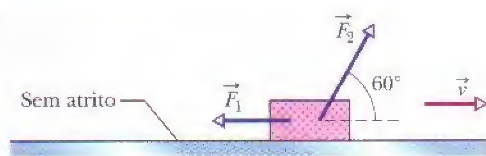


FIG. 7-16 Duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, agem sobre uma caixa que desliza para a direita em um piso sem atrito. A velocidade da caixa é $\vec{v}$.

potência total? A potência total está variando nesse instante?

IDÉIA-CHAVE Estamos interessados na potência instantânea, e não na potência média em um intervalo de tempo. Além disso, conhecemos a velocidade da caixa, e não o trabalho realizado sobre a caixa.

Cálculo: Usamos a Eq. 7-47 duas vezes, uma para cada força. Para a força $\vec{F}_1$, que faz um ângulo ϕ_1 com a velocidade $\vec{v}$, temos:

$$P_1 = F_1 v \cos\phi_1 = (2{,}0\text{ N})(3{,}0\text{ m/s})\cos 180° = -6{,}0\text{ W.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Este resultado negativo indica que a força $\vec{F}_1$ está *recebendo* energia da caixa à taxa de 6,0 J/s.

No caso da força $\vec{F}_2$, que faz um ângulo ϕ_2 com a velocidade $\vec{v}$, temos:

$$P_2 = F_2 v \cos\phi_2 = (4{,}0\text{ N})(3{,}0\text{ m/s})\cos 60° = 6{,}0\text{ W.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Este resultado positivo indica que a força $\vec{F}_2$ está *fornecendo* energia à caixa à taxa de 6,0 J/s.

A potência total é a soma das duas potências:

$$P_{tot} = P_1 + P_2 = -6{,}0\text{ W} + 6{,}0\text{ W} = 0, \qquad \text{(Resposta)}$$

que nos diz que a taxa total de transferência de energia é zero. Assim, a energia cinética ($K = \frac{1}{2}mv^2$) da caixa não está variando, e a velocidade da caixa continua a ser 3,0 m/s. Como as forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ e a velocidade $\vec{v}$ não variam, vemos pela Eq. 7-48 que P_1 e P_2 são constantes e o mesmo acontece com P_{tot}.

Exemplo 7-12

Contanto que um *funny car* não perca tração, o tempo que leva para percorrer uma distância D a partir do repouso depende principalmente da potência P do motor. Supondo que a potência é constante, determine o valor desse tempo em termos de D e P.

IDÉIAS-CHAVE (1) A potência de um motor é a taxa com a qual o motor pode realizar trabalho, expressa pela Eq. 7-43 ($P = dW/dt$). (2) Podemos relacionar o trabalho realizado durante uma corrida à energia cinética através da Eq. 7-10, o teorema do trabalho e energia cinética ($W = K_f - K_i$).

Potência e energia cinética: De acordo com o teorema do trabalho e energia cinética, uma pequena quantidade de trabalho dW produz uma pequena variação dK na energia cinética: $dW = dK$. Substituindo dW por dK na Eq. 7-43 e explicitando dK, obtemos:

$$dK = P\,dt.$$

Integrando ambos os membros e levando em conta o fato de que a energia cinética K é 0 quando a corrida começa em $t = 0$, temos:

$$\int_0^K dK = \int_0^t P dt$$

e

$$K = Pt.$$

Depois de substituir K por $\frac{1}{2}mv^2$, explicitamos v, a velocidade no final da corrida:

$$v = \left(\frac{2Pt}{m}\right)^{1/2} \qquad (7\text{-}49)$$

Distância e velocidade: De acordo com a definição de velocidade do Capítulo 2, $v = dx/dt$. Reagrupando os termos e integrando ambos os membros, obtemos

$$\int_0^D dx = \int_0^t v\,dt.$$

Substituindo a velocidade pelo seu valor, dado pela Eq. 7-49, temos:

$$\int_0^D dx = \int_0^t \left(\frac{2Pt}{m}\right)^{1/2} dt = \left(\frac{2P}{m}\right)^{1/2} \int_0^t t^{1/2}\,dt.$$

Calculando a integral, obtemos

$$D = \left(\frac{2P}{m}\right)^{1/2} \frac{2}{3} t^{3/2}.$$

Explicitando t, encontramos o tempo que um *funny car* leva para percorrer uma distância em termos de D e P:

$$t = \left(\frac{3}{2}D\right)^{2/3} \left(\frac{m}{2P}\right)^{1/3}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Comentários: Em palavras, o tempo é inversamente proporcional à raiz cúbica da potência. Se a equipe consegue extrair mais potência do motor, o tempo diminui porque a proporção é *inversa*, mas apenas modestamente, porque existe uma *raiz cúbica* envolvida.

REVISÃO E RESUMO

Energia Cinética A **energia cinética** K associada ao movimento de uma partícula de massa m e velocidade escalar v, onde v é muito menor que a velocidade da luz, é dada por

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{(energia cinética).} \tag{7-1}$$

Trabalho **Trabalho** W é a energia transferida para um objeto ou de um objeto através de uma força que age sobre o objeto. Quando o objeto recebe energia o trabalho é positivo; quando o objeto cede energia, o trabalho é negativo.

Trabalho Realizado por uma Força Constante O trabalho realizado sobre uma partícula por uma força constante $\vec{F}$ durante um deslocamento $\vec{d}$ é dado por

$$W = Fd\cos\theta = \vec{F}\cdot\vec{d} \quad \text{(trabalho, força constante),} \tag{7-7, 7-8}$$

onde ϕ é o ângulo constante entre $\vec{F}$ e $\vec{d}$. Apenas a componente de $\vec{F}$ na direção do deslocamento $\vec{d}$ pode realizar trabalho sobre o objeto. Quando duas ou mais forças agem sobre um objeto, o **trabalho total** é a soma dos trabalhos realizados pelas forças, que também é igual ao trabalho que seria realizado pela força resultante $\vec{F}_{res}$.

Trabalho e Energia Cinética Para uma partícula, uma variação ΔK da energia cinética é igual ao trabalho total W realizado sobre a partícula:

$$\Delta K = K_f - K_i = W \quad \text{(teorema do trabalho e energia cinética),} \tag{7-10}$$

onde K_i é a energia cinética inicial da partícula e K_f é a energia cinética da partícula após o trabalho ter sido realizado. De acordo com a Eq. 7-10, temos:

$$K_f = K_i + W. \tag{7-11}$$

Trabalho Realizado pela Força Gravitacional O trabalho W_g realizado pela força gravitacional $\vec{F}_g$ sobre um objeto (semelhante a uma partícula) de massa m durante um deslocamento $\vec{d}$ é dado por

$$W_g = mgd\cos\phi, \tag{7-12}$$

onde ϕ é o ângulo entre $\vec{F}_g$ e $\vec{d}$.

Trabalho Realizado para Levantar e Baixar um Objeto O trabalho W_a realizado por uma força aplicada quando um objeto que se comporta como uma partícula é levantado ou baixado está relacionado ao trabalho W_g realizado pela força gravitacional e à variação ΔK da energia cinética do objeto através da equação

$$\Delta K = K_f - K_i = W_a + W_g. \tag{7-15}$$

Se $K_f = K_i$, a Eq. 7-15 se reduz a

$$W_a = -W_g. \tag{7-16}$$

que nos diz que a energia cedida ao objeto pela força aplicada é igual à energia extraída do objeto pela força gravitacional.

Força Elástica A força $\vec{F}_s$ de uma mola é

$$\vec{F}_s = -k\vec{d} \quad \text{(lei de Hooke),} \tag{7-20}$$

onde $\vec{d}$ é o deslocamento da extremidade livre da mola da sua posição quando a mola está no **estado relaxado** (nem comprimida nem alongada), e k é a **constante elástica** (uma medida da rigidez da mola). Se um eixo x é traçado ao longo do comprimento da mola, com a origem na posição da extremidade livre da mola quando ela está no estado relaxado, a Eq. 7-20 pode ser escrita na forma

$$F_x = -kx \quad \text{(lei de Hooke).} \tag{7-21}$$

A força elástica é, portanto, uma força variável: ela varia com o deslocamento da extremidade livre da mola.

Trabalho Realizado por uma Força Elástica Se um objeto está preso à extremidade livre da mola, o trabalho W_s realizado sobre o objeto pela força elástica quando o objeto é deslocado de uma posição inicial x_i para uma posição final x_f é dado por

$$W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2. \tag{7-25}$$

Se $x_i = 0$ e $x_f = x$, a Eq. 7-25 se torna

$$W_s = -\frac{1}{2}kx^2. \tag{7-26}$$

Trabalho Realizado por uma Força Variável Quando a força $\vec{F}$ aplicada a um objeto que se comporta como uma partícula depende da posição do objeto, o trabalho realizado por $\vec{F}$ sobre o objeto enquanto o objeto se move de uma posição inicial r_i de coordenadas (x_i, y_i, z_i) para uma posição final r_f de coordenadas (x_f, y_f, z_f) pode ser calculado integrando a força. Supondo que a componente F_x pode depender de x mas não de y ou z, que a componente F_y pode depender de y mas não de x ou z e que a componente F_z pode depender de z mas não de x ou y, o trabalho é dado por

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y\,dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z\,dz. \tag{7-36}$$

Se $\vec{F}$ possui apenas a componente x, a Eq. 7-36 se reduz a

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx. \tag{7-32}$$

Potência A **potência** desenvolvida por uma força é a taxa com a qual a força realiza trabalho sobre um objeto. Se a força realiza um trabalho W em um intervalo de tempo Δt, a *potência média* desenvolvida pela força neste intervalo de tempo é dada por

$$P_{méd} = \frac{W}{\Delta t}. \tag{7-42}$$

Potência instantânea é a taxa instantânea com a qual o trabalho está sendo realizado:

$$P = \frac{dW}{dt}. \tag{7-43}$$

No caso de uma força $\vec{F}$ que faz um ângulo ϕ com a velocidade instantânea $\vec{v}$ de um objeto, a potência instantânea é

$$P = Fv\cos\phi = \vec{F}\cdot\vec{v}. \tag{7-47, 7-48}$$

PERGUNTAS

1 O trabalho realizado por uma força constante $\vec{F}$ sobre uma partícula durante um deslocamento retilíneo $\vec{d}$ é positivo ou negativo se (a) o ângulo entre $\vec{F}$ e $\vec{d}$ é 30°; (b) o ângulo é 100°; (c) $\vec{F} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ e $\vec{d} = -4\hat{i}$?

2 Em três situações, uma força horizontal aplicada brevemente muda a velocidade de um disco de metal que desliza sobre uma superfície de gelo de atrito desprezível. As vistas superiores da Fig. 7-17 mostram, para cada situação, a velocidade inicial v_i do disco, a velocidade final v_f e as orientações dos vetores velocidade correspondentes. Ordene as situações de acordo com o trabalho realizado sobre o disco pela força aplicada, do mais positivo para o mais negativo.

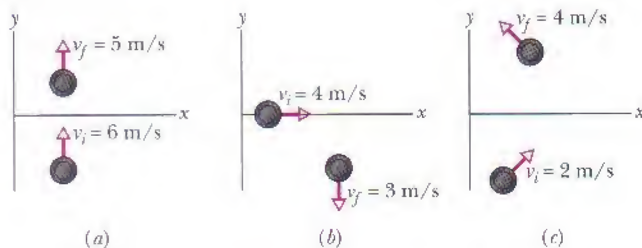


FIG. 7-17 Pergunta 2.

3 Ordene as seguintes velocidades de acordo com a energia cinética que uma partícula teria com cada velocidade, da maior para a menor: (a) $\vec{v} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$, (b) $\vec{v} = -4\hat{i} + 3\hat{j}$, (c) $\vec{v} = -3\hat{i} + 4\hat{j}$, (d) $\vec{v} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$, (e) $\vec{v} = 5\hat{i}$ e (f) v = 5 m/s a 30° com a horizontal.

4 A Fig. 7-18a mostra duas forças horizontais que agem sobre um bloco que está deslizando para a direita sobre um piso sem atrito. A Fig. 7-18b mostra três gráficos da energia cinética K do bloco em função do tempo t. Qual dos gráficos corresponde melhor às três seguintes situações: (a) $F_1 = F_2$, (b) $F_1 > F_2$, (c) $F_1 < F_2$?

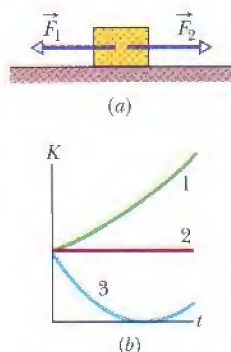


FIG. 7-18 Pergunta 4.

5 Na Fig. 7-19, um porco ensebado pode escolher entre três escorregas para descer. Ordene os escorregas de acordo com o trabalho que a força gravitacional realiza sobre o porco durante cada descida, do maior para o menor.

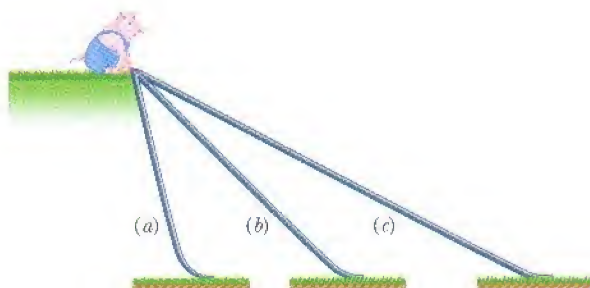


FIG. 7-19 Pergunta 5.

6 A Fig. 7-20a mostra quatro situações nas quais uma força horizontal age sobre um mesmo bloco, que está inicialmente em repouso. Os módulos das forças são $F_2 = F_4 = 2F_1 = 2F_3$. A componente horizontal v_x da velocidade do bloco aparece na Fig. 7-20b para as quatro situações. (a) Que gráfico da Fig. 7-20b melhor corresponde a que força da Fig. 7-20a? (b) Que gráfico da Fig. 7-20c (da energia cinética K em função do tempo t) melhor corresponde a que gráfico na Fig. 7-20b?

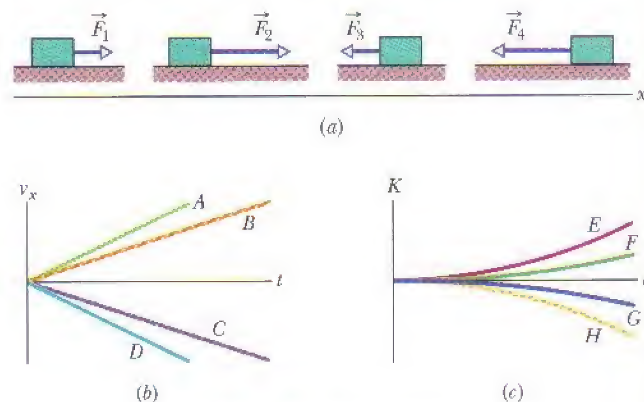


FIG. 7-20 Pergunta 6.

7 A Fig. 7-21 mostra quatro gráficos (traçados na mesma escala) da componente F_x de uma força variável (dirigida ao longo de um eixo x) em função da posição x de uma partícula sobre a qual a força atua. Ordene os gráficos de acordo com o trabalho realizado pela força sobre a partícula de $x = 0$ a $x = x_1$, do mais positivo para o mais negativo.

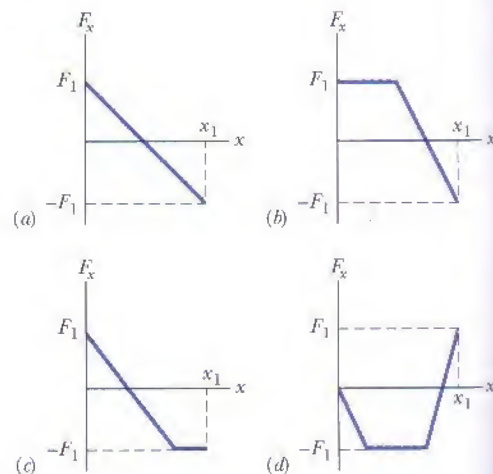


FIG. 7-21 Pergunta 7.

8 A Fig. 7-22 mostra a componente F_x de uma força que pode agir sobre uma partícula. Se a partícula parte do repouso em $x = 0$, qual é sua coordenada quando (a) sua energia cinética é máxima, (b) sua velocidade é máxima e (c) sua velocidade é nula? (d) Qual é o sentido da velocidade da partícula quando ela passa pelo ponto x = 6 m?

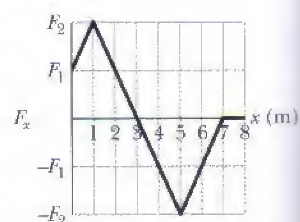


FIG. 7-22 Pergunta 8.

9 Uma mola A é mais rígida que uma mola B ($k_A > k_B$). A força elástica de que mola realiza mais trabalho se as molas são comprimidas (a) de uma mesma distância e (b) por uma mesma força?

10 Uma gota de um líquido viscoso é arremessada ou deixada cair a partir do repouso da borda de um precipício. Qual dos gráficos na Fig. 7-23 poderia mostrar como a energia cinética da gota varia durante a queda?

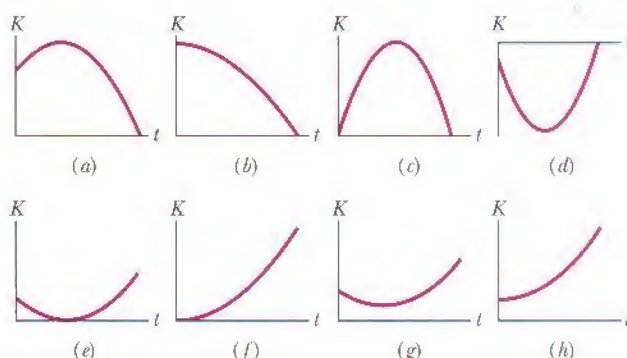


FIG. 7-23 Pergunta 10.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 7-3 Energia Cinética

•1 Em 10 de agosto de 1972 um grande meteorito atravessou a atmosfera sobre o oeste dos Estados Unidos e do Canadá como uma pedra que ricocheteia na água. A bola de fogo resultante foi tão forte que pôde ser vista à luz do dia, e era mais intensa que o rastro deixado por um meteorito comum. A massa do meteorito era aproximadamente de 4×10^6 kg; sua velocidade, cerca de 15 km/s. Se tivesse entrado verticalmente na atmosfera terrestre ele teria atingido a superfície da Terra com aproximadamente a mesma velocidade. (a) Calcule a perda de energia cinética do meteorito (em joules) que estaria associada ao impacto vertical. (b) Expresse a energia como um múltiplo da energia explosiva de 1 megaton de TNT, que é $4{,}2 \times 10^{15}$ J. (c) A energia associada à explosão da bomba atômica de Hiroshima foi equivalente a 13 quilotons de TNT. A quantas bombas de Hiroshima o impacto do meteorito seria equivalente?

•2 Se um foguete Saturno V e uma espaçonave Apollo acoplada a ele tinham uma massa total de $2{,}9 \times 10^5$ kg, qual era a energia cinética quando atingiram uma velocidade de 11,2 km/s?

•3 Um próton (massa $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg) está sendo acelerado em linha reta a $3{,}6 \times 10^{15}$ m/s^2 em um acelerador de partículas. Se o próton tem uma velocidade inicial de $2{,}4 \times 10^7$ m/s e se desloca 3,5 cm, determine (a) sua velocidade e (b) o aumento em sua energia cinética.

•4 Uma força $\vec{F}_a$ é aplicada a uma conta quando esta se move em linha reta, sofrendo um deslocamento de 5,0 cm. O módulo de $\vec{F}_a$ é mantido constante, mas o ângulo ϕ entre $\vec{F}_a$ e o deslocamento da conta pode ser escolhido. A Fig. 7-24 mostra o trabalho W realizado por $\vec{F}_a$ sobre a conta para valores de ϕ dentro de um certo intervalo; $W_0 = 25$ J. Qual é o trabalho realizado por $\vec{F}_a$ se ϕ é igual a (a) 64° e (b) 147°?

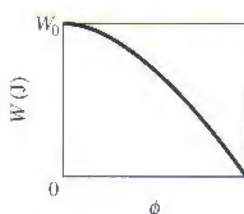


FIG. 7-24 Problema 4.

••5 Em uma corrida, um pai tem metade da energia cinética do filho, que tem metade da massa do pai. Aumentando sua velocidade em 1,0 m/s, o pai passa a ter a mesma energia cinética do filho. Quais são as velocidades escalares iniciais (a) do pai e (b) do filho?

••6 Uma conta com uma massa de $1{,}8 \times 10^{-2}$ kg está se movendo no sentido positivo do eixo x. A partir do instante $t = 0$, em que a conta está passando pela posição $x = 0$ com uma velocidade de 12 m/s, uma força constante passa a agir sobre a conta. A Fig. 7-25 indica a posição da conta nos instantes $t_0 = 0$, $t_1 = 1{,}0$, $t_2 = 2{,}0$ e $t_3 = 3{,}0$ s. A conta pára momentaneamente em $t = 3{,}0$ s. Qual é a energia cinética da conta em $t = 10$ s?

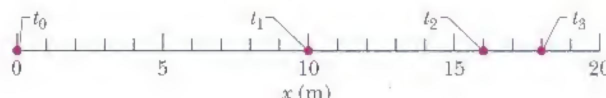


FIG. 7-25 Problema 6.

seção 7-5 Trabalho e Energia Cinética

•7 A única força que age sobre uma lata de 2,0 kg que está se movendo em um plano xy tem um módulo de 5,0 N. Inicialmente, a lata tem uma velocidade de 4,0 m/s no sentido positivo do eixo x; em um instante posterior, a velocidade passa a ser 6,0 m/s no sentido positivo do eixo y. Qual é o trabalho realizado sobre a lata pela força de 5,0 N nesse intervalo de tempo?

•8 Uma moeda desliza sobre um plano sem atrito em um sistema de coordenadas xy, da origem até o ponto de coordenadas (3,0 m; 4,0 m), sob o efeito de uma força constante. A força tem um módulo de 2,0 N e faz um ângulo de 100° no sentido anti-horário com o semi-eixo x positivo. Qual é o trabalho realizado pela força sobre a moeda durante esse deslocamento?

•9 Um corpo de 3,0 kg está em repouso sobre um colchão de ar horizontal de atrito desprezível quando uma força horizontal $\vec{F}$ no sentido positivo de um eixo x ao longo do colchão é aplicada ao corpo. A Fig. 7-26 mostra um gráfico estroboscópico da posição do corpo quando ele se move para a direita. A força $\vec{F}$ é aplicada ao corpo em $t = 0$, e o gráfico mostra a posição da partícula a intervalos de 0,50 s. Qual é o trabalho realizado sobre o corpo pela força $\vec{F}$ no intervalo de $t = 0$ a $t = 2{,}0$ s?

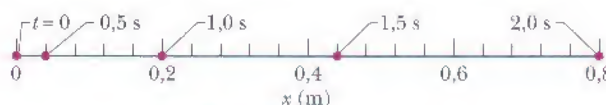


FIG. 7-26 Problema 9.

•**10** Um bloco de gelo flutuante é colhido por uma correnteza que aplica ao bloco uma força $\vec{F} = (210\ \text{m})\hat{\text{i}} - (150\ \text{m})\hat{\text{j}}$, fazendo com que ele sofra um deslocamento $\vec{d} = (15\ \text{m})\hat{\text{i}} - (12\ \text{m})\hat{\text{j}}$. Qual é o trabalho realizado pela força sobre o bloco durante esse deslocamento?

••**11** Um trenó e seu ocupante, com uma massa total de 85 kg, descem uma encosta e atingem um trecho horizontal retilíneo com uma velocidade inicial de 37 m/s. Se uma força desacelera o trenó até o repouso a uma taxa constante de 2,0 m/s², (a) qual é o módulo F da força, (b) que distância d o trenó percorre até parar e (c) que trabalho W é realizado pela força sobre o trenó? Quais são os valores de (d) F, (e) d e (f) W se a taxa de desaceleração é de 4,0 m/s²?

••**12** Um objeto de 8,0 kg está se movendo no sentido positivo de um eixo x. Quando passa por $x = 0$, uma força constante dirigida ao longo do eixo passa a atuar sobre ele. A Fig. 7-27 mostra a energia cinética K em função da posição x quando o objeto se desloca de $x = 0$ a $x = 5,0$ m; $K_0 = 30,0$ J. A força continua a agir. Qual é a velocidade do objeto quando ele passa de volta por $x = -3,0$ m?

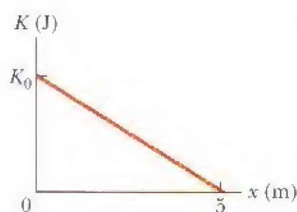


FIG. 7-27 Problema 12.

••**13** A Fig. 7-28 mostra três forças aplicadas a um baú que se desloca 3,00 m para a esquerda sobre um piso sem atrito. Os módulos das forças são $F_1 = 5,00$ N, $F_2 = 9,00$ N, e $F_3 = 3,00$ N; o ângulo indicado é $\theta = 60°$. Nesse deslocamento, (a) qual é o trabalho total realizado sobre o baú pelas três forças e (b) a energia cinética do baú aumenta ou diminui?

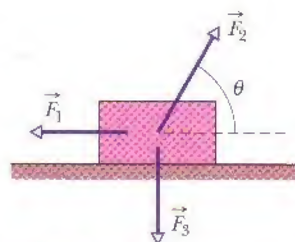


FIG. 7-28 Problema 13.

••**14** Uma lata de parafusos e porcas é empurrada por 2,00 m ao longo de um eixo x por uma vassoura ao longo de um piso sujo de óleo (sem atrito) de uma oficina de automóveis. A Fig. 7-29 mostra o trabalho W realizado sobre a lata pela força horizontal constante da vassoura em função da posição x da lata. A escala vertical do gráfico é definida por $W_s = 6,0$ J. (a) Qual é o módulo da força? (b) Se a lata tivesse uma energia cinética inicial de 3,00 J, movendo-se no sentido positivo do eixo x, qual seria a energia cinética ao final do deslocamento de 2,00 m?

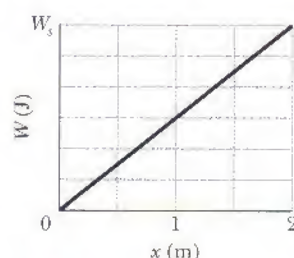


FIG. 7-29 Problema 14.

••**15** Uma força de 12,0 N e orientação fixa realiza trabalho sobre uma partícula que sofre um deslocamento $\vec{d} = (2,00\hat{\text{i}} - 4,00\hat{\text{j}} + 3,00\hat{\text{k}})$ m. Qual é o ângulo entre a força e o deslocamento se a variação da energia cinética da partícula é (a) +30,0 J e (b) −30,0 J?

••**16** A Fig. 7-30 mostra uma vista superior de três forças horizontais atuando sobre uma caixa que estava inicialmente em repouso e passou a se mover sobre um piso sem atrito. Os módulos das forças são $F_1 = 3,00$ N, $F_2 = 4,00$ N e $F_3 = 10,0$ N, e os ângulos indicados são $\theta_2 = 50,0°$ e $\theta_3 = 35,0°$. Qual é o trabalho total realizado sobre a caixa pelas três forças nos primeiros 4,00 m de deslocamento?

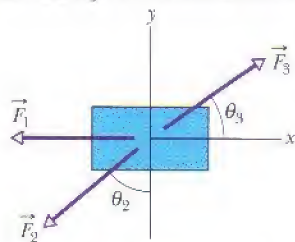


FIG. 7-30 Problema 16.

seção 7-6 Trabalho Realizado pela Força Gravitacional

•**17** Um helicóptero levanta verticalmente uma astronauta de 72 kg 15 m acima da superfície do oceano, por meio de um cabo. A aceleração da astronauta é $g/10$. Qual é o trabalho realizado sobre a astronauta (a) pela força do helicóptero e (b) pela força gravitacional? Imediatamente antes de a astronauta chegar ao helicóptero, quais são (c) sua energia cinética e (d) sua velocidade?

•**18** (a) Em 1975, o teto do velódromo de Montreal, com um peso de 360 kN, foi levantado 10 cm para que pudesse ser centralizado. Que trabalho foi realizado sobre o teto pelas forças que o ergueram? (b) Em 1960, uma mulher de Tampa, na Flórida, levantou uma das extremidades de um carro que havia caído sobre seu filho quando um macaco quebrou. Se a aflição a levou a levantar 4000 N (cerca de 1/4 do peso do carro) por uma distância de 5,0 cm, que trabalho sua força realizou sobre o carro?

••**19** Uma corda é usada para baixar verticalmente um bloco de massa M, inicialmente em repouso, com uma aceleração constante para baixo de $g/4$. Após o bloco descer uma distância d, determine (a) o trabalho realizado pela força da corda sobre o bloco, (b) o trabalho realizado pela força gravitacional sobre o bloco, (c) a energia cinética do bloco, (d) a velocidade do bloco.

••**20** Na Fig. 7-31, uma força horizontal $\vec{F}_a$ de módulo 20,0 N é aplicada a um livro de psicologia de 3,00 kg enquanto o livro escorrega por uma distância $d = 0,500$ m ao longo de uma rampa de inclinação $\theta = 30,0°$, subindo sem atrito. (a) Nesse deslocamento, qual é o trabalho total realizado sobre o livro por $\vec{F}_a$, pela força gravitacional e pela força normal? (b) Se o livro tem energia cinética nula no início do deslocamento, qual é sua energia cinética no final?

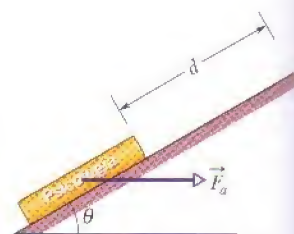


FIG. 7-31 Problema 20.

••**21** Na Fig. 7-32, uma força constante $\vec{F}_a$ de módulo 82,0 N é aplicada a uma caixa de sapatos de 3,00 kg a um ângulo $\phi = 53,0°$, fazendo com que a caixa se mova para cima ao longo de uma rampa sem atrito com velocidade constante. Qual é o trabalho realizado sobre a caixa por $\vec{F}_a$ após ela ter subido uma distância vertical $h = 0,150$ m?

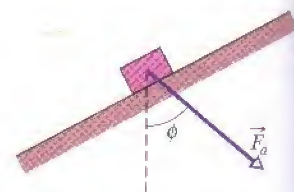


FIG. 7-32 Problema 21.

••**22** Um bloco é lançado para cima em uma rampa sem atrito, ao longo de um eixo x que aponta para cima. A Fig. 7-33 mostra a energia cinética do bloco em função da posição x; a escala vertical do gráfico é definida por $K_s = 40,0$ J. Se a velocidade inicial do bloco é de 4,00 m/s, qual é a força normal que age sobre o bloco?

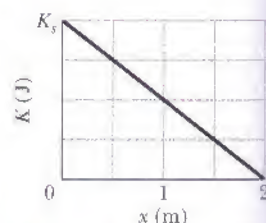


FIG. 7-33 Problema 22.

••23 Na Fig. 7-34 um bloco de gelo escorrega para baixo em uma rampa sem atrito com $\theta = 50°$ enquanto um operário puxa o bloco (através de uma corda) com uma força $\vec{F}_r$ que tem um módulo de 50 N e aponta para cima ao longo da rampa. Quando o bloco desliza uma distância $d = 0,50$ m ao longo da rampa, sua energia cinética aumenta 80 J. Quão maior seria a energia cinética se o bloco não estivesse sendo puxado por uma corda?

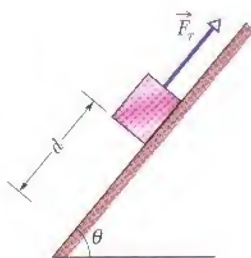
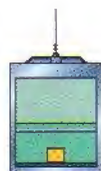


FIG. 7-34 Problema 23.

••24 Uma equipe especializada em resgate em cavernas levanta um espeleólogo ferido com o auxílio de um cabo ligado a um motor. O levantamento é realizado em três estágios, cada um requerendo uma distância vertical de 10,0 m: (a) o espeleólogo está inicialmente em repouso e é acelerado até uma velocidade de 5,00 m/s; (b) ele é levantado com velocidade constante de 5,00 m/s; (c) finalmente, é desacelerado até o repouso. Qual é o trabalho realizado sobre o espeleólogo de 80,0 kg pela força que o levanta em cada estágio?

•••25 Na Fig. 7-35, um bloco de queijo de 0,250 kg está sobre o piso de um elevador de 900 kg que está sendo puxado para cima por um cabo, primeiro por uma distância $d_1 = 2,40$ m e depois por uma distância $d_2 = 10,5$ m. (a) No deslocamento d_1, se a força normal exercida sobre o bloco pelo piso do elevador tem um módulo constante $F_N = 3,00$ N, qual é o trabalho realizado pela força do cabo sobre o elevador? (b) No deslocamento d_2, se o trabalho realizado sobre o elevador pela força (constante) do cabo é 92,61 kJ, qual é o módulo de $\vec{F}_N$?


FIG. 7-35 Problema 25.

seção 7-7 Trabalho Realizado por uma Força Elástica

•26 Durante o semestre de primavera do MIT, os estudantes de dois dormitórios vizinhos travam batalhas com grandes catapultas feitas com meias elásticas montadas nas molduras das janelas. Uma bola de aniversário cheia de corante é colocada em uma bolsa presa na meia, que é esticada até a extremidade do quarto. Suponha que a meia esticada obedeça à lei de Hooke com uma constante elástica de 100 N/m. Se a meia é esticada 5,00 m e liberada, que trabalho a força elástica da meia realiza sobre a bola quando a meia volta ao comprimento normal?

•27 Uma mola e um bloco são montados como na Fig. 7-11. Quando o bloco é puxado para o ponto $x = +4,0$ cm devemos aplicar uma força de 360 N para mantê-lo nessa posição. Puxamos o bloco para o ponto $x = 11$ cm e o liberamos. Qual é o trabalho realizado pela mola sobre o bloco quando este se desloca de $x_i = +5,0$ cm para (a) $x = +3,0$ cm, (b) $x = -3,0$ cm, (c) $x = -5,0$ cm e (d) $x = -9,0$ cm?

•28 Na Fig. 7-11 devemos aplicar uma força de módulo 80 N para manter o bloco em repouso em $x = -2,0$ cm. A partir dessa posição, deslocamos o bloco lentamente de tal modo que nossa força realiza um trabalho de +4,0 J sobre o sistema massa-mola; a partir daí, o bloco permanece em repouso. Qual é a posição do bloco? (*Sugestão:* Existem duas respostas possíveis.)

••29 A única força que age sobre um corpo de 2,0 kg enquanto ele se move no semi-eixo positivo de um eixo x tem uma componente $F_x = -6x$ N, com x em metros. A velocidade do corpo em $x = 3,0$ m é 8,0 m/s. (a) Qual é a velocidade do corpo em $x = 4,0$ m? (b) Para que valor positivo de x o corpo tem uma velocidade de 5,0 m/s?

••30 A Fig. 7-36 mostra a força elástica F_x em função da posição x para o sistema massa-mola da Fig. 7-11. A escala vertical do gráfico é definida por $F_s = 160,0$ N. Puxamos o bloco até $x = 12$ cm e o liberamos. Qual é o trabalho realizado pela mola sobre o bloco enquanto se desloca de $x_i = +8,0$ cm para (a) $x = +5,0$ cm, (b) $x = -5,0$ cm, (c) $x = -8,0$ cm e (d) $x = -10,0$ cm?

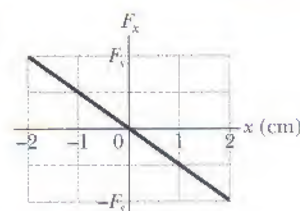


FIG. 7-36 Problema 30.

••31 No arranjo da Fig. 7-11, puxamos gradualmente o bloco de $x = 0$ até $x = +3,0$ cm, onde fica em repouso. A Fig. 7-37 mostra o trabalho que nossa força realiza sobre o bloco. A escala vertical do gráfico é definida por $W_s = 1,0$ J. Em seguida, puxamos o bloco até $x = +5,0$ cm e o liberamos a partir do repouso. Qual é o trabalho realizado pela mola sobre o bloco quando este se desloca de $x_i = +5,0$ cm até (a) $x = +4,0$ cm, (b) $x = -2,0$ cm e (c) $x = -5,0$ cm?

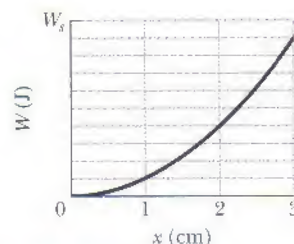


FIG. 7-37 Problema 31.

••32 Na Fig. 7-11*a*, um bloco de massa m repousa em uma superfície horizontal sem atrito e está preso a uma mola horizontal (de constante elástica k) cuja outra extremidade é mantida fixa. O bloco está em repouso na posição onde a mola está relaxada ($x = 0$) quando uma força $\vec{F}$ no sentido positivo do eixo x é aplicada. A Fig. 7-38 mostra o gráfico da energia cinética do bloco em função da posição x após a aplicação da força. A escala vertical do gráfico é definida por $K_s = 4,0$ J. (a) Qual é o módulo de $\vec{F}$? (b) Qual é o valor de k?

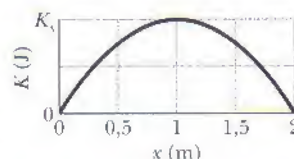


FIG. 7-38 Problema 32.

•••33 O bloco na Fig. 7-11*a* está sobre uma superfície horizontal sem atrito, e a constante elástica é 50 N/m. Inicialmente a mola está relaxada e o bloco está parado no ponto $x = 0$. Uma força com módulo constante de 3,0 N é aplicada ao bloco, puxando-o no sentido positivo do eixo x e alongando a mola até o bloco parar. Quando este ponto é atingido, quais são (a) a posição do bloco, (b) o trabalho realizado sobre o bloco pela força aplicada e (c) o trabalho realizado sobre o bloco pela força elástica? Durante o deslocamento do bloco, quais são (d) a posição do bloco na qual a energia cinética é máxima e (e) o valor desta energia cinética máxima?

seção 7-8 Trabalho Realizado por uma Força Variável Genérica

•34 Um bloco de 5,0 kg se move em uma linha reta sobre uma superfície horizontal sem atrito sob a influência de uma força que varia com a posição, como mostra a Fig. 7-39. A escala vertical do gráfico é definida por $F_s = 10,0$ J. Qual é o trabalho realizado pela força enquanto o bloco se desloca da origem até $x = 8,0$ cm?

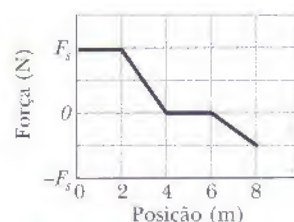


FIG. 7-39 Problema 34.

•35 A força a que uma partícula está submetida aponta ao longo de um eixo x e é dada por $F = F_0(x/x_0 - 1)$. Determine o

trabalho realizado pela força ao mover a partícula de $x = 0$ a $x = 2x_0$ (a) a partir do gráfico de $F(x)$ e (b) integrando $F(x)$.

•36 Um tijolo de 10 kg se move ao longo de um eixo x. A Fig. 7-37 mostra a aceleração do bloco em função da posição. A escala vertical do gráfico é definida por $a_s = 20{,}0$ m/s². Qual é o trabalho total realizado sobre o tijolo pela força responsável pela aceleração quando o bloco se desloca de $x = 0$ a $x = 8{,}0$ m?

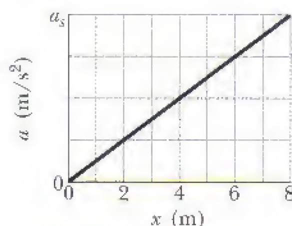


FIG. 7-40 Problema 36.

••37 Uma única força atua sobre um objeto de 3,0 kg que se comporta como uma partícula, de tal forma que a posição do objeto em função do tempo é dada por $x = 3{,}0t - 4{,}0t^2 + 1{,}0t^3$, com x em metros e t em segundos. Determine o trabalho realizado pela força sobre o objeto de $t = 0$ a $t = 4{,}0$ s.

••38 Uma lata de sardinha é deslocada ao longo de um eixo x, de $x = 0{,}25$ m até $x = 1{,}25$ m, por uma força cujo módulo é dado por $F = e^{-4x^2}$, com x em metros e F em newtons. Qual é o trabalho realizado pela força sobre a lata?

••39 A Fig. 7-41 mostra a aceleração de uma partícula de 2,00 kg sob a ação de uma força $\vec{F}_a$ que desloca a partícula ao longo de um eixo x, a partir do repouso, de $x = 0$ a $x = 9{,}0$ m. A escala vertical do gráfico é definida por $a_s = 6{,}0$ m/s². Qual é o trabalho realizado pela força sobre a partícula até a partícula atingir o ponto (a) $x = 4{,}0$ m, (b) $x = 7{,}0$ m e (c) $x = 9{,}0$ m? Quais são o módulo e o sentido da velocidade da partícula quando ela atinge o ponto (d) $x = 4{,}0$ m, (b) $x = 7{,}0$ m e (c) $x = 9{,}0$ m?

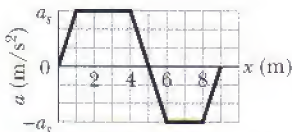


FIG. 7-41 Problema 39.

••40 Um bloco de 1,5 kg está em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito quando uma força ao longo de um eixo x é aplicada ao bloco. A força é dada por $\vec{F}(x) = (2{,}5 - x^2)\hat{i}$ N, onde x está em metros e a posição inicial do bloco é $x = 0$. (a) Qual é a energia cinética do bloco ao passar pelo ponto $x = 2{,}0$ m? (b) Qual é a energia cinética máxima do bloco entre $x = 0$ e $x = 2{,}0$ m?

••41 Uma força $\vec{F} = (cx - 3{,}00x^2)\hat{i}$ age sobre uma partícula enquanto a partícula se desloca ao longo de um eixo x, com $\vec{F}$ em newtons, x em metros e c uma constante. Em $x = 0$, a energia cinética da partícula é 20,0 J; em $x = 3{,}00$ m, é 11,0 J. Determine o valor de c.

•••42 A Fig. 7-42 mostra uma corda presa a um carrinho que pode deslizar sobre um trilho horizontal sem atrito ao longo de um eixo x. A extremidade esquerda da corda é puxada através de uma polia de massa e atrito desprezíveis a uma altura $h = 1{,}20$ m em relação ao ponto onde está presa no carrinho, fazendo o carrinho deslizar de $x_1 = 3{,}00$ m até $x_2 = 1{,}00$ m. Durante o deslocamento, a tensão da corda se mantém constante e igual a 25,0 N. Qual é a variação da energia cinética do carrinho durante o deslocamento?

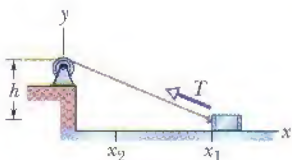


FIG. 7-42 Problema 42.

seção 7-9 Potência

•43 Um bloco de 100 kg é puxado com velocidade constante de 5,0 m/s através de um piso horizontal por uma força de 122 N que faz um ângulo de 37° acima da horizontal. Qual é a taxa com a qual a força realiza trabalho sobre o bloco?

•44 Um elevador carregado tem uma massa de $3{,}0 \times 10^3$ kg e sobe 210 m em 23 s, com velocidade constante. Qual é a taxa média com a qual a força do cabo do elevador realiza trabalho sobre o elevador?

•45 Uma força de 5,0 N age sobre um corpo de 15 kg inicialmente em repouso. Calcule o trabalho realizado pela força (a) no primeiro, (b) no segundo e (c) no terceiro segundo, assim como (d) a potência instantânea da força no fim do terceiro segundo.

•46 Um esquiador é puxado por uma corda para o alto de uma encosta que faz um ângulo de 12° com a horizontal. A corda se move paralelamente à encosta com uma velocidade constante de 1,0 m/s. A força da corda realiza 900 J de trabalho sobre o esquiador quando este percorre uma distância de 8,0 m encosta acima. (a) Se a velocidade constante da corda tivesse sido 2,0 m/s, que trabalho a força da corda teria realizado sobre o esquiador para o mesmo deslocamento? A que taxa a força da corda realiza trabalho sobre o esquiador quando a corda se desloca com uma velocidade de (b) 1,0 m/s e (c) 2,0 m/s?

••47 Um elevador de carga totalmente carregado tem uma massa total de 1200 kg, que deve içar 54 m em 3,0 min, iniciando e terminando a subida em repouso. O contrapeso do elevador tem uma massa de apenas 950 kg e, portanto, o motor do elevador deve ajudar. Que potência média é exigida da força que o motor exerce sobre o elevador através do cabo?

••48 (a) Em um certo instante, um objeto que se comporta como uma partícula sofre a ação de uma força $\vec{F} = (4{,}0\text{ N})\hat{i} - (2{,}0\text{ N})\hat{j} + (9{,}0\text{ N})\hat{k}$ quando sua velocidade é $\vec{v} = -(2{,}0\text{ m/s})\hat{i} + (4{,}0\text{ m/s})\hat{k}$. Qual é a taxa instantânea com a qual a força realiza trabalho sobre o objeto? (b) Em outro instante, a velocidade tem apenas a componente y. Se a força não muda e a potência instantânea é −12 W, qual é a velocidade do objeto nesse instante?

••49 Uma máquina transporta um pacote de 4,0 kg de uma posição inicial $\vec{d}_i = (0{,}50\text{ m})\hat{i} + (0{,}75\text{ m})\hat{j} + (0{,}20\text{ m})\hat{k}$ em $t = 0$ até uma posição final $\vec{d}_f = (7{,}50\text{ m})\hat{i} + (12{,}0\text{ m})\hat{j} + (7{,}20\text{ m})\hat{k}$ em $t = 12$ s. A força constante aplicada pela máquina ao pacote é $\vec{F} = (2{,}00\text{ N})\hat{i} + (4{,}00\text{ N})\hat{j} + (6{,}00\text{ N})\hat{k}$. Para esse deslocamento, determine (a) o trabalho realizado pela força da máquina sobre o pacote e (b) a potência média dessa força.

••50 Uma concha de 0,30 kg escorrega sobre uma superfície horizontal sem atrito presa a uma das extremidades de uma mola horizontal ($k = 500$ N/m) cuja outra extremidade é mantida fixa. A concha possui uma energia cinética de 10 J ao passar pela posição de equilíbrio (o ponto em que a força elástica da mola é zero). (a) Com que taxa a mola está realizando trabalho sobre a concha quando esta passa pela posição de equilíbrio? (b) Com que taxa a mola está realizando trabalho sobre a concha quando a mola está comprimida de 0,10 m e a concha está se afastando da posição de equilíbrio?

••51 Uma força $\vec{F} = (3{,}00\text{ N})\hat{i} + (7{,}00\text{ N})\hat{j} + (7{,}00\text{ N})\hat{k}$ age sobre um objeto de 2,00 kg que se move de uma posição inicial $\vec{d}_i = (3{,}00\text{ m})\hat{i} - (2{,}00\text{ m})\hat{j} + (5{,}00\text{ m})\hat{k}$ para uma posição final $\vec{d}_f = -(5{,}00\text{ m})\hat{i} + (4{,}00\text{ m})\hat{j} + (7{,}00\text{ m})\hat{k}$ em 4,00 s. Determine (a) o trabalho realizado pela força sobre o objeto no intervalo de 4,00 s, (b) a potência média desenvolvida pela força nesse intervalo e (c) o ângulo entre os vetores $\vec{d}_i$ e $\vec{d}_f$.

•••52 Um *funny car* acelera a partir do repouso, percorrendo uma certa distância no tempo T, com o motor funcionando com potência constante P. Se os mecânicos conseguem aumentar a potência do motor de um pequeno valor dP, qual é a variação do tempo necessário para percorrer a mesma distância?

Problemas Adicionais

53 Uma explosão no nível do solo produz uma cratera com um diâmetro proporcional à raiz cúbica da energia da explosão; uma explosão de 1 megaton de TNT deixa uma cratera de 1 km de diâmetro. Sob o lago Huron, em Michigan, existe uma cratera com 50 km de diâmetro, atribuída ao impacto de um asteróide no passado remoto. Qual é a energia cinética associada a esse impacto, em unidades (a) de megatons de TNT (1 megaton equivale a $4{,}2 \times 10^{15}$ J) e (b) bombas de Hiroshima (uma bomba de Hiroshima equivale a 13 quilotons de TNT)? (Impactos de meteoritos e cometas podem ter alterado significativamente o clima da Terra no passado e contribuído para a extinção de dinossauros e de outras formas de vida.)

54 Um bloco de 250 g é deixado cair em uma mola vertical, inicialmente relaxada, com uma constante elástica k = 2,5 N/cm (Fig. 7-43). O bloco fica acoplado à mola, comprimindo-a em 12 cm até parar momentaneamente. Nesta compressão, que trabalho é realizado sobre o bloco (a) pela força gravitacional e (b) pela força elástica? (c) Qual é a velocidade do bloco imediatamente antes de se chocar com a mola? (d) Se a velocidade no momento do impacto é duplicada, qual é a compressão máxima da mola?

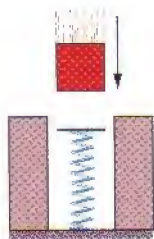


FIG. 7-43 Problema 54.

55 Qual é o trabalho realizado por uma força $\vec{F} = (2x \text{ N})\hat{i} + (3 \text{ N})\hat{j}$, com x em metros, ao deslocar uma partícula de uma posição $\vec{r}_i = (2 \text{ m})\hat{i} + (3 \text{ m})\hat{j}$ para uma posição $\vec{r}_f = -(4 \text{ m})\hat{i} - (3 \text{ m})\hat{j}$?

56 Para puxar um engradado de 50 kg sobre um piso horizontal sem atrito, um operário aplica uma força de 210 N fazendo um ângulo 20° para cima com a horizontal. Em um deslocamento de 3,0 m, qual é o trabalho realizado sobre o engradado (a) pela força do operário, (b) pela força gravitacional e (c) pela força normal do piso? (d) Qual é o trabalho total realizado sobre o engradado?

57 Na Fig. 7-44, uma corda passa por duas polias ideais. Uma lata com uma massa m = 20 kg está pendurada em uma das polias, e você pode aplicar uma força $\vec{F}$ à extremidade livre da corda. (a) Qual deve ser o módulo de $\vec{F}$ para que você levante a lata com velocidade constante? (b) Qual deve ser o deslocamento da corda para levantar a lata 2,0 cm? Durante esse deslocamento, qual é o trabalho realizado sobre a lata (c) pela sua força (através da corda) e (d) pela força gravitacional? (*Sugestão:* Quando uma corda envolve uma polia da forma mostrada na figura, puxa a polia com uma força total que é duas vezes maior que a tensão da corda.)



FIG. 7-44 Problema 57.

58 Uma força $\vec{F} = (4{,}0 \text{ N})\hat{i} + c\hat{j}$ age sobre uma partícula enquanto a partícula sofre um deslocamento $\vec{d} = (3{,}0 \text{ m})\hat{i} - (2{,}0 \text{ m})\hat{j}$. (Outras forças também agem sobre a partícula.) Qual é o valor de c se o trabalho realizado sobre a partícula pela força $\vec{F}$ é (a) 0, (b) 17 J e (c) −18 J?

59 Uma força constante de módulo 10 N faz um ângulo de 150° (no sentido anti-horário) com o sentido positivo do eixo x ao agir sobre um objeto de 2,0 kg que se move em um plano xy. Qual é o trabalho realizado pela força sobre o objeto quando ele se move da origem até o ponto de vetor cujo vetor posição é $(2{,}0 \text{ m})\hat{i} - (4{,}0 \text{ m})\hat{j}$?

60 Um objeto de 2,0 kg inicialmente em repouso acelera uniformemente na horizontal até uma velocidade de 10 m/s em 3,0 s. (a) Nesse intervalo de 3,0 s, qual é o trabalho realizado sobre o objeto pela força que o acelera? Qual é a potência instantânea desenvolvida pela força (b) no final do intervalo e (c) no fim da primeira metade do intervalo?

61 Se um elevador de uma estação de esquiação transporta 100 passageiros com um peso médio de 660 N até uma altura de 150 m em 60,0 s, com velocidade constante, que potência média é exigida da força que realiza esse trabalho?

62 Caixas são transportadas de um local para outro de um armazém por meio de uma esteira que se move com uma velocidade constante de 0,50 m/s. Em um certo local, a esteira se move 2,0 m ao longo de uma rampa que faz um ângulo de 10° para cima com a horizontal, por 2,0 m na horizontal e, finalmente, 2,0 m ao longo de uma rampa que faz um ângulo de 10° para baixo com a horizontal. Suponha que uma caixa de 2,0 kg é transportada pela esteira sem escorregar. Com que taxa a força da esteira sobre a caixa realiza trabalho quando a caixa se move (a) para cima na rampa de 10°, (b) horizontalmente e (c) para baixo na rampa de 10°?

63 Um cavalo puxa uma carroça com uma força de 40 lb a um ângulo de 30° para cima com a horizontal e se move com uma velocidade de 6,0 mi/h. (a) Que trabalho a força realiza em 10 min? (b) Qual é a potência média desenvolvida pela força em horsepower?

64 Um trenó a vela está em repouso sobre a superfície de um lago congelado quando um vento repentino exerce sobre ele uma força constante de 200 N, na direção leste. Devido ao ângulo da vela, o vento faz com que o trenó se desloque em linha reta por uma distância de 8,0 m em uma direção 20° ao norte do leste. Qual é a energia cinética do trenó ao final desses 8,0 m?

65 Um caixote de 230 kg está pendurado na extremidade de uma corda de comprimento L = 12,0 m. Você puxa o caixote horizontalmente com uma força variável $\vec{F}$, deslocando-o para o lado de uma distância d = 4,00 m (Fig. 7-45). (a) Qual é o módulo de $\vec{F}$ quando o caixote está na posição final? Neste deslocamento, quais são (b) o trabalho total realizado sobre o caixote, (c) o trabalho realizado pela força gravitacional sobre o caixote e (d) o trabalho realizado pela corda sobre o caixote? (e) Sabendo que o caixote está em repouso antes e depois do deslocamento, use as respostas dos itens (b), (c) e (d) para determinar o trabalho que sua força $\vec{F}$ realiza sobre o caixote. (f) Por que o trabalho da sua força não é igual ao produto do deslocamento horizontal pela resposta do item (a)?

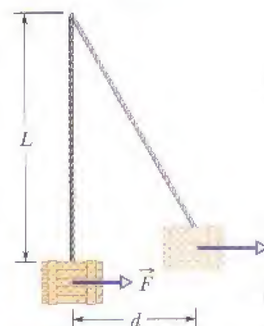


FIG. 7-45 Problema 65.

66 A única força que age sobre um corpo de 2,0 kg quando ele se desloca ao longo de um eixo x varia da forma indicada na Fig. 7-46. A escala vertical do gráfico é definida por $F_s = 4{,}0$ N. A velocidade do corpo em $x = 0$ é 4,0 m/s. (a) Qual é a energia cinética do corpo em $x = 3{,}0$ m? (b) Para que valor de x o corpo possui uma energia cinética de 8,0 J? (c) Qual é a energia cinética máxima do corpo entre $x = 0$ e $x = 5{,}0$ m?

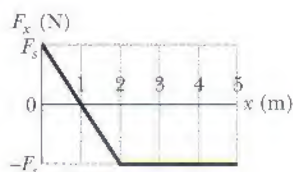


FIG. 7-46 Problema 66.

67 A Fig. 7-47 mostra um pacote de cachorros-quentes escorregando para a direita em um piso sem atrito por uma distância d = 20,0 cm, enquanto três forças agem sobre o pacote. Duas são horizontais e têm módulos F_1 = 5,00 N e F_2 = 1,00 N; a terceira faz um ângulo θ = 60,0° para baixo e tem um módulo F_3 = 4,00 N. (a) Qual é o trabalho *total* realizado sobre o pacote pelas três forças mais a força gravitacional e a força normal? (b) Se o pacote tem uma massa de 2,0 kg e uma energia cinética inicial igual a zero, qual é sua velocidade no final do deslocamento?

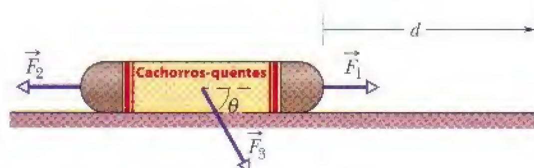


FIG. 7-47 Problema 67.

68 Uma criança assustada desce por um escorrega de atrito desprezível em um parque de diversões com o apoio da mãe. Se a força da mãe sobre a criança é de 100 N para cima ao longo do escorrega, a energia cinética da criança aumenta de 30 J quando ela desce uma distância de 1,8 m ao longo do escorrega. (a) Qual é o trabalho realizado sobre a criança pela força gravitacional durante a descida de 1,8 m? (b) Se a criança não tivesse o apoio da mãe, qual seria o aumento em sua energia cinética quando ela tivesse escorregado a mesma distância de 1,8 m?

69 Para empurrar um engradado de 25,0 kg para cima em um plano inclinado de 25° em relação à horizontal, um operário exerce uma força de 209 N paralela ao plano. Quando o engradado percorre 1,50 m, qual o trabalho realizado sobre ele (a) pela força aplicada pelo trabalhador, (b) pela força gravitacional e (c) pela força normal? (d) Qual é o trabalho total realizado sobre o engradado?

70 Se um carro com uma massa de 1200 kg viaja a 120 km/h em uma rodovia, qual é a energia cinética do carro medida por alguém que está parado no acostamento?

71 Uma mola com um ponteiro está pendurada perto de uma régua graduada em milímetros. Três pacotes diferentes são pendurados na mola, um de cada vez, como mostra a Fig. 7-48. (a) Que marca o ponteiro indica na régua quando não há nenhum pacote pendurado na mola? (b) Qual é o peso P do terceiro pacote?

72 Uma partícula que se move em linha reta sofre um deslocamento retilíneo $\vec{d} = (8 \text{ m})\hat{\text{i}} + c\hat{\text{j}}$ sob a ação de uma força $\vec{F} = (2 \text{ N})\hat{\text{i}} - (4 \text{ N})\hat{\text{j}}$. (Outras forças também agem sobre a partícula.) Qual é o valor de c se o trabalho realizado por $\vec{F}$ sobre a partícula é (a) zero, (b) positivo e (c) negativo?

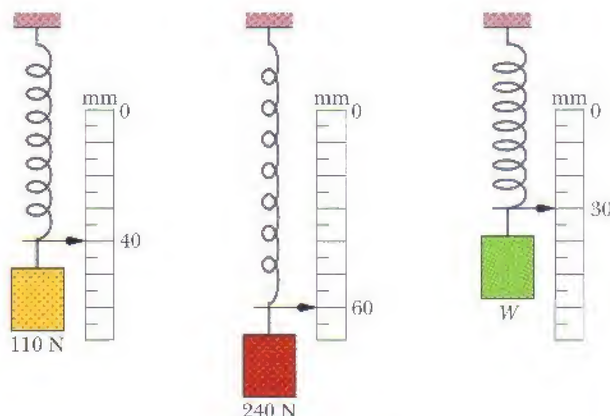


FIG. 7-48 Problema 71.

73 Um elevador tem uma massa de 4500 kg e pode transportar uma carga máxima de 1800 kg. Se o elevador está subindo com a carga máxima a 3,80 m/s, que potência a força que move o elevador deve desenvolver para manter essa velocidade?

74 Um bloco de gelo de 45 kg desliza para baixo em um plano inclinado sem atrito de 1,5 m de comprimento e 0,91 m de altura. Um operário empurra o bloco para cima com uma força paralela ao plano, fazendo o bloco descer com velocidade constante. (a) Determine o módulo da força exercida pelo operário. Qual é o trabalho realizado sobre o bloco (b) pela força do operário, (c) pela força gravitacional, (d) pela força normal do plano inclinado e (e) pela força resultante?

75 Uma força $\vec{F}$ no sentido positivo de um eixo x age sobre um objeto que se move ao longo desse eixo. Se o módulo da força é $F = 10e^{-x/2{,}0}$ N, com x em metros, determine o trabalho realizado por $\vec{F}$ quando o objeto se desloca de $x = 0$ a $x = 2{,}0$ m (a) plotando $F(x)$ e estimando a área sob a curva e (b) integrando $F(x)$.

76 Na Fig. 7-49*a*, uma força de 2,0 N é aplicada em um bloco de 4,0 kg fazendo um ângulo θ para baixo com a horizontal enquanto o bloco desliza 1,0 m para a direita em um piso horizontal sem atrito. Escreva uma expressão para a velocidade v_f do bloco após ser percorrida essa distância para uma velocidade inicial de (a) 0 e (b) 1,0 m/s para a direita. (c) A situação da Fig. 7-49*b* é semelhante à anterior, pois o bloco está inicialmente se deslocando para a direita com uma velocidade de 1,0 m/s, mas agora a força de 2,0 N está dirigida para baixo e para a esquerda. Escreva uma expressão para a velocidade v_f do bloco após ser percorrida uma distância de 1,0 m. (d) Plote as três expressões de v_f em função do ângulo θ de $\theta = 0$ a $\theta = 90°$. Interprete os gráficos.

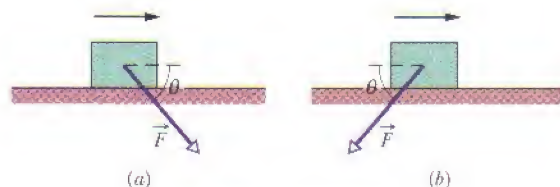


FIG. 7-49 Problema 76.

77 Uma merendeira de 2,0 kg escorrega em uma superfície sem atrito no sentido positivo de um eixo x. A partir do instante $t = 0$, um vento constante aplica uma força à merendeira no sentido negativo do eixo x. A Fig. 7-50 mostra a posição x da merendeira em

função do tempo t. A partir do gráfico, estime a energia cinética da merendeira (a) em $t = 1{,}0$ s e (b) em $t = 5{,}0$ s. (c) Qual é o trabalho realizado pelo vento sobre a merendeira entre $t = 1{,}0$ s e $t = 5{,}0$ s?

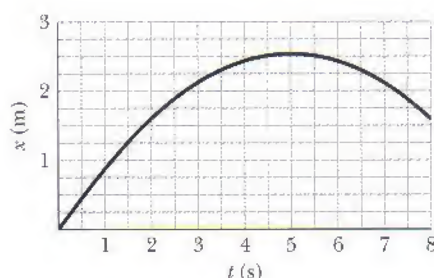


FIG. 7-50 Problema 77.

78 *Integração numérica.* Uma caixa é deslocada ao longo de um eixo x de $x = 0{,}15$ m a $x = 1{,}20$ m por uma força cujo módulo é dado por $\vec{F} = e^{-2x^2}$, com x em metros e F em newtons. Qual é o trabalho realizado pela força sobre a caixa?

79 Quando uma partícula se move ao longo de um eixo x, uma força atua sobre ela no sentido positivo do eixo. A Fig. 7-51 mostra o módulo F da força em função da posição x da partícula. A curva é dada por $F = a/x^2$, com $a = 9{,}0$ N·m². Determine o trabalho realizado pela força sobre a partícula quando a partícula se desloca de $x = 1{,}0$ m para $x = 3{,}0$ m (a) estimando o trabalho a partir do gráfico e (b) integrando a função da força.

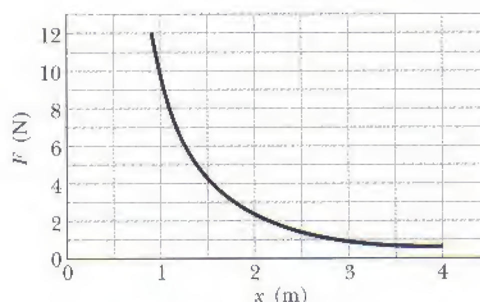


FIG. 7-51 Problema 79.

80 Uma caixa de CD escorrega em um piso no sentido positivo de um eixo x enquanto uma força aplicada $\vec{F}_a$ age sobre a caixa. A força está orientada ao longo do eixo x, e sua componente x é dada por $F_{ax} = 9x - 3x^2$, com x em metros e F_{ax} em newtons. A caixa parte do repouso na posição $x = 0$ e se move até ficar novamente em repouso. (a) Plote o trabalho realizado por $\vec{F}_a$ sobre a caixa em função de x. (b) Em que posição o trabalho é máximo e (c) qual é o valor deste trabalho máximo? (d) Em que posição o trabalho se torna nulo? (e) Em que posição a caixa fica novamente em repouso?

8 Energia Potencial e Conservação da Energia



Cortesia de Mark Reid, USGS

Quando uma avalanche de pedras desce a encosta de uma montanha e chega a um vale, o atrito entre as pedras e o solo acaba por imobilizar as pedras. A distância que as pedras percorrem em um vale é, normalmente, cerca de 2/3 da altura de onde caíram. Nas grandes avalanches, porém, quando uma grande quantidade de pedras desce uma montanha essa distância pode ser até 30 vezes maior, o suficiente para colher de surpresa os moradores de uma cidade próxima.

Por que uma grande avalanche pode atingir uma distância quase 30 vezes maior que uma avalanche pequena?

A resposta está neste capítulo.

8-1 O QUE É FÍSICA?

Uma das tarefas da física é identificar os diferentes tipos de energia que existem no mundo, especialmente os que têm utilidade prática. Uma forma comum de energia é a **energia potencial** U. Tecnicamente, energia potencial é qualquer energia que pode ser associada à configuração (arranjo) de um sistema de objetos que exercem forças uns sobre os outros.

Esta é uma definição muito formal para algo que na verdade é extremamente familiar. Um exemplo pode ser mais esclarecedor que a definição. Um praticante de *bungee-jump* salta de uma plataforma (Fig. 8-1). O sistema de objetos é formado pela Terra e o atleta. A força entre os objetos é a força gravitacional. A configuração do sistema varia (a distância entre o atleta e a Terra diminui, e isso, é claro, é que torna o salto emocionante). Podemos descrever o movimento do atleta e o aumento de sua energia cinética definindo uma **energia potencial gravitacional** U. Trata-se de uma energia associada ao estado de separação entre dois objetos que se atraem mutuamente através da força gravitacional, no caso o atleta e a Terra.

Quando o atleta começa a esticar a corda elástica no final do salto, o sistema de objetos é formado pela corda e o atleta. A força entre os objetos é uma força elástica (como a de uma mola). A configuração do sistema varia (a corda estica). Podemos relacionar a diminuição da energia cinética do saltador ao aumento do comprimento da corda definindo uma **energia potencial elástica** U. Trata-se da energia associada ao estado de compressão ou distensão de um objeto elástico, a corda, no caso.

A física ensina a calcular a energia potencial de um sistema, o que ajuda a escolher a melhor forma de usá-la ou armazená-la. Antes que um praticante de *bungee-jump* inicie um salto, por exemplo, alguém (provavelmente um engenheiro mecânico) deve ter verificado se a corda que será usada é segura, determinando a energia gravitacional e a energia elástica que podem ser esperadas. Nesse caso, o salto pode ser emocionante, mas não será fatal.



FIG. 8-1 A energia cinética de um praticante de *bungee-jump* aumenta durante a queda livre; em seguida, a corda começa a esticar, desacelerando o atleta. *(KOFUJIWARA/amana images/ Getty Images News and Sport Services)*

8-2 | Trabalho e Energia Potencial

No Capítulo 7 discutimos a relação entre o trabalho e a variação da energia cinética. Agora, vamos discutir a relação entre trabalho e uma variação da energia potencial.

Suponha que um tomate seja arremessado para cima (Fig. 8-2). Já sabemos que, enquanto o tomate está subindo, o trabalho W_g realizado pela força gravitacional sobre o tomate é negativo, porque a força extrai energia *da* energia cinética do tomate. Podemos agora concluir a história dizendo que esta energia é transferida pela força gravitacional da energia cinética do tomate para a energia potencial gravitacional do sistema tomate-Terra.

O tomate perde velocidade, pára e começa a cair de volta por causa da força gravitacional. Durante a queda, a transferência se inverte: o trabalho W_g realizado sobre o tomate pela força gravitacional agora é positivo e a força gravitacional passa a transferir energia *da* energia potencial do sistema tomate-Terra *para* a energia cinética do tomate.

Tanto na subida como na descida a variação ΔU da energia potencial gravitacional é definida como o negativo do trabalho realizado sobre o tomate pela força gravitacional. Usando o símbolo geral W para o trabalho, podemos expressar esta definição através da seguinte equação:

$$\Delta U = -W. \tag{8-1}$$

Esta equação também se aplica a um sistema massa-mola como o da Fig. 8-3. Se empurramos bruscamente o bloco, movimentando-o para a direita, a força da mola atua para a esquerda e, portanto, realiza trabalho negativo sobre o bloco, transferindo energia da energia cinética do bloco para a energia potencial elástica do sistema bloco-mola. O bloco perde velocidade até parar; em seguida, começa a se mover para a esquerda, já que a força da mola ainda está dirigida para a esquerda. A



FIG. 8-2 Um tomate é arremessado para cima. Enquanto sobe, a força gravitacional realiza um trabalho negativo sobre o tomate, diminuindo sua energia cinética. Quando desce, a força gravitacional realiza um trabalho positivo, aumentando sua energia cinética.

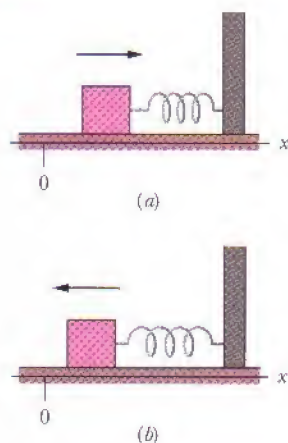


FIG. 8-3 Um bloco, preso a uma mola e inicialmente em repouso em $x = 0$, é colocado em movimento para a direita. (*a*) Quando o bloco se move para a direita (no sentido indicado pela seta) a força elástica da mola realiza trabalho negativo sobre o bloco. (*b*) Mais tarde, quando o bloco se move para a esquerda, em direção ao ponto $x = 0$, a força da mola realiza trabalho positivo sobre ele.

partir desse momento, a transferência de energia se inverte: a energia passa a ser transferida da energia potencial do sistema bloco-mola para a energia cinética do bloco.

Forças Conservativas e Dissipativas

Vamos fazer uma lista dos elementos principais das duas situações que acabamos de discutir:

1. O *sistema* é formado por dois ou mais objetos.
2. Uma *força* atua entre um objeto do sistema que se comporta como partícula (o tomate ou o bloco) e o resto do sistema.
3. Quando a configuração do sistema varia, a força realiza *trabalho* (W_1, digamos) sobre o objeto, transferindo energia cinética K do objeto para alguma outra forma de energia do sistema.
4. Quando a mudança da configuração se inverte, a força inverte o sentido da transferência de energia, realizando um trabalho W_2 no processo.

Nas situações em que a relação $W_1 = -W_2$ é sempre observada, a outra forma de energia é uma energia potencial, e dizemos que a força é uma **força conservativa**. Como o leitor já deve ter desconfiado, a força gravitacional e a força elástica são conservativas (de outra forma, não poderíamos ter falado em energia potencial gravitacional e da energia potencial elástica, como fizemos anteriormente).

Uma força que não é conservativa é chamada de **força dissipativa**. A força de atrito cinético e a força de arrasto são forças dissipativas. Imagine, por exemplo, um bloco deslizando em um piso que não seja sem atrito. Durante o deslizamento a força de atrito cinético exercida pelo piso realiza um trabalho negativo sobre o bloco, reduzindo sua velocidade e transferindo a energia cinética do bloco para uma outra forma de energia, chamada *energia térmica* (que está associada ao movimento aleatório de átomos e moléculas). Os experimentos mostram que essa transferência de energia não pode ser revertida (a energia térmica não pode ser transferida de volta para a energia cinética do bloco pela força de atrito cinético). Assim, embora tenhamos um sistema (composto pelo bloco e pelo piso), uma força que atua entre partes do sistema e uma transferência de energia causada pela força, a força não é conservativa. Assim, a energia térmica não é uma energia potencial.

Quando um objeto que se comporta como uma partícula está sujeito apenas a forças conservativas, certos problemas que envolvem o movimento do objeto se tornam muito mais simples. Na próxima seção, em que apresentamos um método para identificar forças conservativas, será apresentado um exemplo desse tipo de simplificação.

8-3 | Independência da Trajetória para o Trabalho de Forças Conservativas

O teste principal para determinar se uma força é conservativa ou dissipativa é o seguinte: deixa-se a força atuar sobre uma partícula que se move ao longo de um *percurso fechado*, começando em uma certa posição e retornando a essa posição (ou seja, fazendo uma *viagem de ida e volta*). A força é conservativa se e apenas se a energia total transferida durante a viagem de ida e volta, ao longo deste ou de qualquer outro percurso fechado, for nula. Em outras palavras:

> O trabalho total realizado por uma força conservativa sobre uma partícula que se move ao longo de qualquer percurso fechado é nulo.

Sabemos, através de experimentos, que a força gravitacional passa neste *teste do percurso fechado*. Um exemplo é o tomate da Fig. 8-2. O tomate deixa o ponto de

lançamento com velocidade v_0 e energia cinética $\frac{1}{2}mv_0^2$. A força gravitacional que age sobre o tomate reduz sua velocidade a zero e depois o faz cair de volta. Quando o tomate retorna ao ponto de partida ele possui novamente uma velocidade v_0 e uma energia cinética $\frac{1}{2}mv_0^2$. Assim, a força gravitacional extrai tanta energia *do* tomate durante a subida quanto fornece energia *ao* tomate durante a descida. O trabalho total realizado sobre o tomate pela força gravitacional durante a viagem de ida e volta é, portanto, nulo.

Uma conseqüência importante do teste do percurso fechado é a seguinte:

O trabalho realizado por uma força conservativa sobre uma partícula que se move entre dois pontos não depende da trajetória seguida pela partícula.



FIG. 8-4 (*a*) Uma partícula pode se mover do ponto *a* ao ponto *b*, sob a ação de uma força conservativa, seguindo a trajetória 1 ou a trajetória 2. (*b*) A partícula descreve um percurso fechado, seguindo a trajetória 1 para ir do ponto *a* ao ponto *b* e a trajetória 2 para voltar ao ponto *a*.

Suponha, por exemplo, que a partícula se move do ponto *a* para o ponto *b* da Fig. 8-4*a* seguindo a trajetória 1 ou a trajetória 2. Se todas as forças que agem sobre a partícula são conservativas, o trabalho realizado sobre a partícula é o mesmo para as duas trajetórias. Em símbolos, podemos escrever este resultado como

$$W_{ab,1} = W_{ab,2}, \tag{8-2}$$

onde o índice *ab* indica os pontos inicial e final, respectivamente, e os índices 1 e 2 indicam a trajetória.

Este resultado é importante porque permite simplificar problemas difíceis quando apenas uma força conservativa está envolvida. Suponha que você precise calcular o trabalho realizado por uma força conservativa ao longo de uma certa trajetória entre dois pontos e que o cálculo seja difícil ou mesmo impossível sem informações adicionais. Você pode determinar o trabalho substituindo a trajetória entre estes dois pontos por outra para a qual o cálculo seja mais fácil. O Exemplo 8-1 mostra uma aplicação dessas idéias, mas antes vamos demonstrar a Eq. 8-2.

Demonstração da Equação 8-2

A Fig. 8-4*b* mostra um percurso fechado arbitrário de uma partícula sujeita à ação de uma única força. A partícula se desloca de um ponto inicial *a* para um ponto *b* seguindo a trajetória 1 e volta ao ponto *a* seguindo a trajetória 2. A força realiza trabalho sobre a partícula enquanto ela se desloca em cada uma das trajetórias. Sem nos preocuparmos em saber se o trabalho realizado é positivo ou negativo, vamos representar o trabalho realizado de *a* até *b* ao longo da trajetória 1 como $W_{ab,1}$ e o trabalho realizado de *b* até *a* ao longo da trajetória 2 como $W_{ba,2}$. Se a força é conservativa, o trabalho total realizado durante a viagem de ida e volta deve ser zero:

$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0,$$

e, portanto,

$$W_{ab,1} = -W_{ba,2}. \tag{8-3}$$

Em palavras, o trabalho realizado ao longo da trajetória de ida deve ser o negativo do trabalho realizado ao longo da trajetória de volta.

Consideremos agora o trabalho $W_{ab,2}$ realizado pela força sobre a partícula quando ela se move de *a* para *b* ao longo da trajetória 2 (Fig. 8-4*a*). Se a força é conservativa, este trabalho é o negativo de $W_{ba,2}$:

$$W_{ab,2} = -W_{ba,2}. \tag{8-4}$$

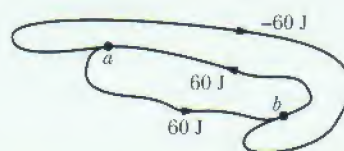
Substituindo $-W_{ba,2}$ por $W_{ab,2}$ na Eq. 8-3, obtemos

$$W_{ab,1} = W_{ab,2},$$

como queríamos demonstrar.



TESTE 1 A figura mostra três trajetórias ligando os pontos a e b. Uma única força $\vec{F}$ realiza o trabalho indicado sobre uma partícula que se move ao longo de cada trajetória no sentido indicado. Com base nessas informações, podemos afirmar que a força $\vec{F}$ é conservativa?



Exemplo 8-1

A Fig. 8-5a mostra um pedaço de 2,0 kg de queijo gorduroso que desliza por um trilho sem atrito do ponto a ao ponto b. O queijo percorre uma distância total de 2,0 m ao longo do trilho e uma distância vertical de 0,80 m. Qual é o trabalho realizado sobre o queijo pela força gravitacional durante o deslocamento?

IDÉIAS-CHAVE (1) *Não podemos* usar a Eq. 7-12 ($W_g = mgd \cos \phi$) para calcular o trabalho, pois o ângulo ϕ entre a força gravitacional $\vec{F}_g$ e o deslocamento $\vec{d}$ varia de ponto para ponto de forma desconhecida. (Mesmo que conhecêssemos a forma da trajetória e pudéssemos calcular ϕ para todos os pontos, o cálculo poderia ser muito difícil.) (2) Como $\vec{F}_g$ é uma força conservativa, podemos calcular o trabalho escolhendo outra trajetória entre a e b, uma que torne os cálculos mais simples.

Cálculos: Vamos escolher o percurso tracejado da Fig. 8-5b; ele é formado por dois segmentos de reta. Ao longo do segmento horizontal o ângulo ϕ é constante e igual a 90°. Não conhecemos o deslocamento horizontal de a para b, mas a Eq. 7-12 nos diz que o trabalho W_h realizado ao longo deste segmento é

$$W_h = mgd \cos 90° = 0.$$

No segmento vertical, o deslocamento d é 0,80 m e, com $\vec{F}_g$ e $\vec{d}$ apontando verticalmente para baixo, o ângulo ϕ é constante e igual a 0°. Assim, a Eq. 7-12 nos fornece, para

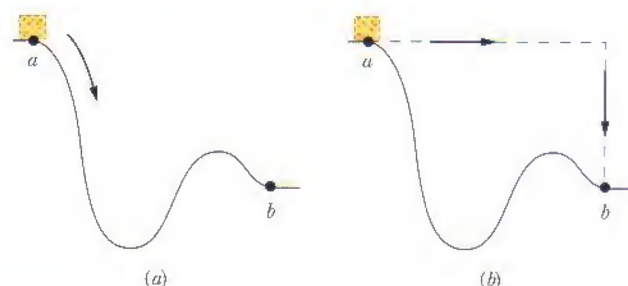


FIG. 8-5 (a) Um pedaço de queijo desliza ao longo de uma superfície curva sem atrito do ponto a para o ponto b. (b) O trabalho realizado pela força gravitacional sobre o queijo é mais fácil de calcular para a trajetória tracejada do que para a trajetória real, mas o resultado é o mesmo nos dois casos.

o trabalho W_v realizado ao longo do trecho vertical do percurso tracejado,

$$W_v = mgd \cos 0°$$
$$= (2{,}0 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2)(0{,}80 \text{ m})(1) = 15{,}7 \text{ J}.$$

O trabalho total realizado sobre o queijo por $\vec{F}_g$ quando o queijo se desloca do ponto a para o ponto b ao longo do percurso tracejado é, portanto,

$$W = W_h + W_v = 0 + 15{,}7 \text{ J} \approx 16 \text{ J}. \quad \text{(Resposta)}$$

Este é também o trabalho realizado quando o queijo escorrega ao longo do trilho de a até b.

8-4 | Determinação de Valores de Energia Potencial

Os valores dos dois tipos de energia potencial discutidos neste capítulo, a energia potencial gravitacional e a energia potencial elástica, podem ser calculados com o auxílio de equações. Para chegar a essas equações, porém, precisamos encontrar uma relação geral entre uma força conservativa e a energia potencial a ela associada.

Considere um objeto que se comporta como uma partícula e que faz parte de um sistema no qual atua uma força conservativa $\vec{F}$. Quando essa força realiza um trabalho W sobre o objeto, a variação ΔU da energia potencial associada ao sistema é o negativo do trabalho realizado. Este fato é expresso pela Eq. 8-1 ($\Delta U = -W$). No

caso mais geral em que a força varia com a posição, podemos escrever o trabalho W como na Eq. 7-32:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx. \tag{8-5}$$

Esta equação fornece o trabalho realizado pela força quando o objeto se desloca do ponto x_i para o ponto x_f, mudando a configuração do sistema. (Como a força é conservativa, o trabalho é o mesmo para qualquer percurso entre esses dois pontos.)

Substituindo a Eq. 8-5 na Eq. 8-1, descobrimos que a variação de energia potencial associada à mudança de configuração é

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx. \tag{8-6}$$

Energia Potencial Gravitacional

Consideremos inicialmente uma partícula de massa m que se move verticalmente ao longo de um eixo y (com o sentido positivo para cima). Quando a partícula se move do ponto y_i para o ponto y_f a força gravitacional $\vec{F}_g$ realiza trabalho sobre ela. Para determinar a variação correspondente da energia potencial gravitacional do sistema partícula-Terra usamos a Eq. 8-6 com duas modificações: (1) integramos ao longo do eixo y em vez do eixo x, já que a força gravitacional age na direção vertical. (2) Substituímos a força F por $-mg$, pois $\vec{F}_g$ possui módulo mg e está orientada no sentido negativo do y. Temos:

$$\Delta U = -\int_{y_i}^{y_f} (-mg)\,dy = mg\int_{y_i}^{y_f} dy = mg[y]_{y_i}^{y_f},$$

e, portanto,

$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mg\,\Delta y. \tag{8-7}$$

São apenas as *variações* ΔU da energia potencial gravitacional (ou de qualquer outro tipo de energia) que possuem significado físico. Entretanto, para simplificar um cálculo ou uma discussão às vezes gostaríamos de dizer que um certo valor de energia potencial gravitacional U está associado a um certo sistema partícula-Terra quando a partícula está a uma certa altura y. Para isso, escrevemos a Eq. 8-7 na forma

$$U - U_i = mg(y - y_i). \tag{8-8}$$

e tomamos U_i como sendo a energia potencial gravitacional do sistema quando ele se encontra em uma **configuração de referência** na qual a partícula está em um **ponto de referência** y_i. Normalmente tomamos $U_i = 0$ e $y_i = 0$. Fazendo isso, a Eq. 8-8 se torna

$$U(y) = mgy \quad \text{(energia potencial gravitacional).} \tag{8-9}$$

Esta equação nos diz o seguinte:

A energia potencial gravitacional associada a um sistema partícula-Terra depende apenas da posição vertical y (ou altura) da partícula em relação à posição de referência $y = 0$, e não da posição horizontal.

Energia Potencial Elástica

Consideramos a seguir o sistema massa-mola da Fig. 8-3, com o bloco se movendo na extremidade de uma mola de constante elástica k. Enquanto o bloco se desloca do ponto x_i para o ponto x_f, a força elástica $F_x = -kx$ realiza trabalho sobre o bloco. Para determinar a variação correspondente da energia potencial elástica do sistema bloco-mola substituímos $F(x)$ por $-kx$ na Eq. 8-6, obtendo

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} (-kx)\, dx = k \int_{x_i}^{x_f} x\, dx = \tfrac{1}{2}k[x^2]_{x_i}^{x_f},$$

ou

$$\Delta U = \tfrac{1}{2}kx_f^2 - \tfrac{1}{2}kx_i^2. \tag{8-10}$$

Para associar um valor de energia potencial U ao bloco na posição x escolhemos a configuração de referência como sendo aquela na qual a mola se encontra no estado relaxado e o bloco está em $x_i = 0$. Nesse caso, a energia potencial elástica U_i é zero e a Eq. 8-10 se torna

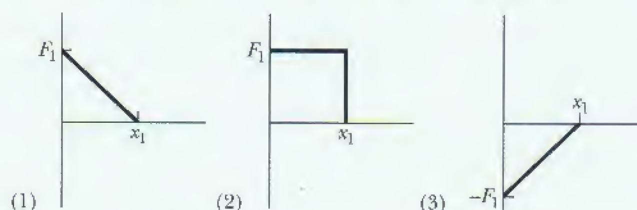
$$U - 0 = \tfrac{1}{2}kx^2 - 0,$$

o que nos dá

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2 \quad \text{(energia potencial elástica).} \tag{8-11}$$



TESTE 2 Uma partícula se move ao longo de um eixo x de $x = 0$ para x_1 enquanto uma força conservativa, orientada ao longo do eixo x, atua sobre a partícula. A figura mostra três situações nas quais a força varia com x. A força possui a mesma intensidade máxima F_1 nas três situações. Ordene as situações de acordo com a variação da energia potencial associada ao movimento da partícula, começando pela mais positiva.



TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 1: *Uso do Termo "Energia Potencial"* Embora a energia potencial esteja associada ao sistema como um todo, na prática ela é muitas vezes associada a apenas uma parte do sistema. Afirmações como "uma maçã em uma árvore possui uma energia potencial de 30 J" são bastante comuns. Essas afirmações geralmente são aceitáveis, mas você deve ter sempre em mente que a energia potencial está na verdade associada a um sistema; no caso, o sistema maçã-Terra. Lembre-se também de que atribuir um valor particular de energia potencial, como 30 J, a um objeto ou mesmo a um sistema faz sentido *apenas* se o valor da energia potencial de referência for conhecido, como mostra o Exemplo 8-2.

Exemplo 8-2

Uma preguiça de 2,0 kg está pendurada a 5,0 m acima do solo (Fig. 8-6). (a) Qual é a energia potencial gravitacional U do sistema preguiça-Terra se tomamos o ponto de referência $y = 0$ como estando (1) no do solo, (2) no piso de uma varanda que está a 3,0 m acima do solo, (3) no galho onde está a preguiça e (4) 1,0 m acima do galho? Considere a energia potencial como sendo nula em $y = 0$.

IDÉIA-CHAVE Uma vez escolhido o ponto de referência para $y = 0$, podemos calcular a energia potencial gravitacional U do sistema *em relação a esse ponto de referência* usando a Eq. 8-9.

Cálculos: No caso da opção (1), a preguiça está em $y = 5{,}0$ m e

$$U = mgy = (2{,}0 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2)(5{,}0 \text{ m}) = 98 \text{ J.} \quad \text{(Resposta)}$$

Para as outras escolhas, os valores de U são

(2) $U = mgy = mg(2{,}0 \text{ m}) = 39$ J,

(3) $U = mgy = mg(0) = 0$ J,

(4) $U = mgy = mg(-1{,}0 \text{ m}) = -19{,}6 \text{ J} \approx -20$ J. (Resposta)

(b) A preguiça desce da árvore. Para cada escolha do ponto de referência, qual é a variação ΔU da energia potencial do sistema preguiça-Terra?

IDÉIA-CHAVE A *variação* da energia potencial não depende da escolha do ponto de referência, mas apenas de Δy, a variação de altura.

Cálculo: Nas quatro situações temos o mesmo valor $\Delta y = -5{,}0$ m. Assim, para as situações (1) a (4), a Eq. 8-7 nos diz que

$$\Delta U = mg\,\Delta y = (2{,}0\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)(-5{,}0\text{ m}) = -98\text{ J.} \qquad \text{(Resposta)}$$

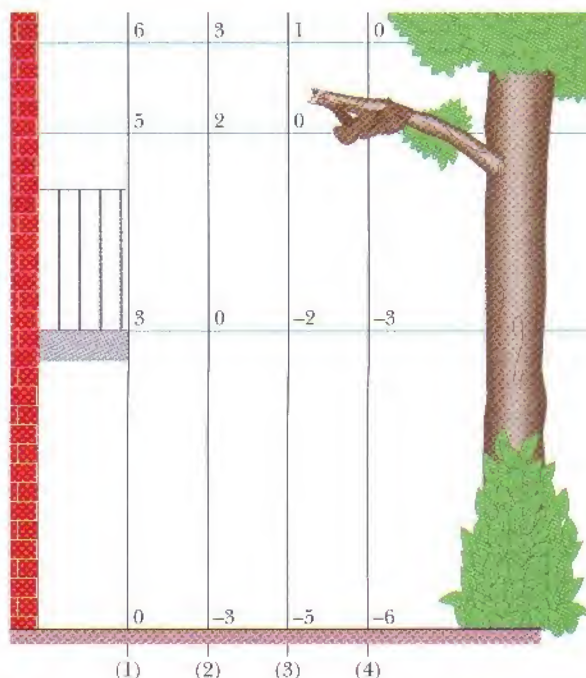


FIG. 8-6 Quatro escolhas para o ponto de referência $y = 0$. Em cada eixo y estão assinalados alguns valores da altura em metros. A escolha afeta o valor da energia potencial U do sistema preguiça-Terra, mas não a variação ΔU da energia potencial do sistema se a preguiça se mover descendo da árvore, por exemplo.

8-5 | Conservação da Energia Mecânica

A **energia mecânica** E_{mec} de um sistema é a soma da energia potencial U do sistema com a energia cinética K dos objetos que compõem o sistema:

$$E_{mec} = K + U \qquad \text{(energia mecânica).} \qquad (8\text{-}12)$$

Nesta seção, vamos discutir o que acontece com essa energia mecânica quando as transferências de energia dentro do sistema são produzidas apenas por forças conservativas, ou seja, quando os objetos do sistema não estão sujeitos a forças de atrito e de arrasto. Além disso, vamos supor que o sistema está *isolado* do ambiente, isto é, que nenhuma *força externa* produzida por um objeto fora do sistema causa variações de energia dentro do sistema.

Quando uma força conservativa realiza um trabalho W sobre um objeto dentro do sistema, essa força é responsável por uma transferência de energia entre a energia cinética K do objeto e a energia potencial U do sistema. De acordo com a Eq. 7-10, a variação ΔK da energia cinética é

$$\Delta K = W \qquad (8\text{-}13)$$

e, de acordo com a Eq. 8-1, a variação ΔU da energia potencial é

$$\Delta U = -W. \qquad (8\text{-}14)$$

Combinando as Eqs. 8-13 e 8-14, temos:

$$\Delta K = -\Delta U. \qquad (8\text{-}15)$$

Em palavras, uma dessas energias aumenta exatamente da mesma quantidade que a outra diminui.

Podemos escrever a Eq. 8-15 na forma

$$K_2 - K_1 = -(U_2 - U_1), \qquad (8\text{-}16)$$

onde os índices se referem a dois instantes diferentes e, portanto, a duas configurações distintas dos objetos do sistema. Reagrupando os termos da Eq. 8-16, obtemos a seguinte equação:



No passado costumava-se arremessar as pessoas para o alto, usando um cobertor, para que pudessem enxergar mais longe. Hoje em dia isto é feito apenas por diversão. Durante a subida da pessoa que aparece na fotografia a energia é transferida da energia cinética para energia potencial gravitacional. A altura máxima é atingida quando a transferência se completa. Durante a queda a transferência ocorre no sentido inverso. *(©AP/Wide World Photos)*

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1 \quad \text{(conservação da energia mecânica).} \tag{8-17}$$

Em palavras, esta equação diz o seguinte:

$$\begin{pmatrix}\text{soma de } K \text{ e } U \text{ para} \\ \text{qualquer estado do sistema}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{soma de } K \text{ e } U \text{ para qualquer} \\ \text{outro estado do sistema}\end{pmatrix},$$

quando o sistema é isolado e apenas forças conservativas atuam sobre os objetos do sistema. Em outras palavras:

> Em um sistema isolado, onde apenas forças conservativas causam variações de energia, a energia cinética e a energia potencial podem variar, mas sua soma, a energia mecânica E_{mec} do sistema, não pode variar.

Este resultado é conhecido como **princípio de conservação da energia mecânica**. (Agora você pode entender a origem do nome *força conservativa.*) Com o auxílio da Eq. 8-15, podemos escrever este princípio de outra forma:

$$\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U = 0. \tag{8-18}$$

O princípio de conservação da energia mecânica permite resolver problemas que seriam bastante difíceis de resolver usando apenas as leis de Newton:

> Quando a energia mecânica de um sistema é conservada, podemos relacionar a soma da energia cinética com a energia potencial em um instante à soma em outro instante *sem levar em conta o movimento intermediário e sem calcular o trabalho realizado pelas forças envolvidas.*

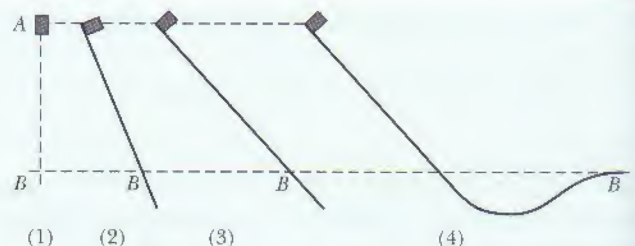
A Fig. 8-7 mostra um exemplo no qual o princípio de conservação da energia mecânica pode ser aplicado. Enquanto um pêndulo oscila, a energia do sistema pêndulo-Terra é transferida da energia cinética K para a energia potencial gravitacional U e vice-versa, com a soma $K + U$ permanecendo constante. Se conhecemos a energia potencial gravitacional quando o peso do pêndulo está no ponto mais alto (Fig. 8-7*c*), a Eq. 8-17 nos fornece a energia cinética do peso no ponto mais baixo (Fig. 8-7*e*).

Vamos, por exemplo, escolher o ponto mais baixo como o ponto de referência, com a energia potencial gravitacional $U_2 = 0$. Suponha que a energia potencial no ponto mais alto seja $U_1 = 20$ J em relação ao ponto de referência. Como o peso se imobiliza momentaneamente ao atingir o ponto mais alto, a energia cinética nesse ponto é $K_1 = 0$. Substituindo estes valores na Eq. 8-17, obtemos a energia cinética K_2 no ponto mais baixo:

$$K_2 + 0 = 0 + 20 \text{ J} \qquad \text{ou} \qquad K_2 = 20 \text{ J}.$$

Observe que obtivemos este resultado sem considerar o movimento entre os pontos mais baixo e mais alto (como na Fig. 8-7*d*) e sem determinar o trabalho realizado pelas forças envolvidas no movimento.

TESTE 3 A figura mostra quatro situações: uma na qual um bloco inicialmente em repouso é deixado cair e três outras nas quais o bloco desce deslizando em rampas sem atrito. (a) Ordene as situações de acordo com a energia cinética do bloco no ponto B, em ordem decrescente. (b) Ordene as situações de acordo com a velocidade do bloco no ponto B, em ordem decrescente.



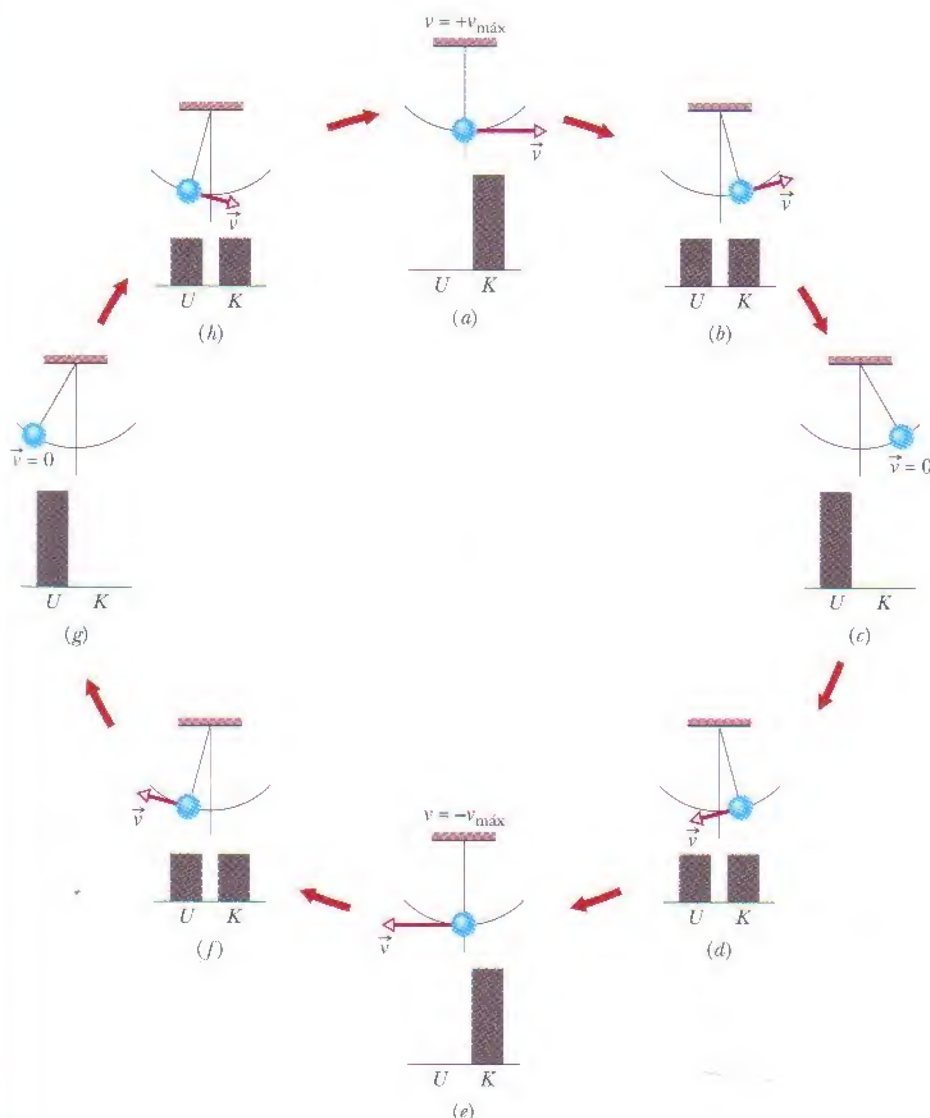


FIG. 8-7 Um pêndulo, com a massa concentrada em um peso na extremidade inferior, oscila de um lado para o outro. É mostrado um ciclo completo do movimento. Durante o ciclo os valores da energia potencial e cinética do sistema pêndulo-Terra variam quando o peso sobe e desce, mas a energia mecânica E_{mec} do sistema permanece constante. Pode-se dizer que a energia E_{mec} se alterna continuamente entre as formas de energia cinética e energia potencial. Nos estágios (*a*) e (*e*) toda a energia está na forma de energia cinética, o peso tem velocidade máxima e se encontra no ponto mais baixo de sua trajetória. Nos estágios (*c*) e (*g*) toda a energia está na forma de energia potencial, o peso tem velocidade nula e se encontra no ponto mais alto da trajetória. Nos estágios (*b*), (*d*), (*f*) e (*h*) metade da energia é energia cinética e a outra metade é energia potencial. Se a oscilação do pêndulo envolvesse uma força de atrito no ponto onde o pêndulo está preso ao teto ou uma força de arrasto devido ao ar, E_{mec} não seria conservada e o pêndulo acabaria parando.

Exemplo 8-3 Aumente sua capacidade

Na Fig. 8-8 uma criança de massa m parte do repouso no alto de um toboágua, a uma altura $h = 8{,}5$ m acima da base do brinquedo. Supondo que a presença da água torna o atrito desprezível, encontre a velocidade da criança ao chegar à base do toboágua.

IDÉIAS-CHAVE (1) Não podemos calcular a velocidade da criança usando a aceleração durante o percurso, como fizemos em capítulos anteriores, porque não conhecemos a inclinação (ângulo) do toboágua. Entretanto, como a velocidade está relacionada à energia cinética talvez possamos usar o princípio da conservação da energia mecânica para calcular a velocidade da criança. Nesse caso não precisaríamos conhecer a inclinação do brinquedo. (2) A energia mecânica é conservada em um sistema *se* o sistema é isolado e *se* as transferências de energia dentro do sistema são causadas apenas por forças conservativas. Vamos verificar.

Forças: Duas forças atuam sobre a criança. A *força gravitacional*, que é uma força conservativa, realiza trabalho sobre ela. A *força normal* exercida pelo toboágua sobre a criança não realiza trabalho, pois sua direção em qualquer ponto da descida é sempre perpendicular à direção em que a criança se move.

Sistema: Como a única força que realiza trabalho sobre a criança é a força gravitacional, escolhemos o sistema criança-Terra como o nosso sistema, que podemos considerar isolado.

Assim, temos apenas uma força conservativa realizando trabalho em um sistema isolado e, portanto, podemos usar o princípio de conservação da energia mecânica.

Cálculos: Seja $E_{mec,a}$ a energia mecânica quando a criança está no alto do toboágua e $E_{mec,b}$ a energia mecânica quando a criança está na base. Nesse caso, de acordo com o princípio da conservação da energia mecânica,

$$E_{\text{mec},b} = E_{\text{mec},a}. \quad (8\text{-}19)$$

Explicitando os dois tipos de energia mecânica, escrevemos

$$K_b + U_b = K_a + U_a, \quad (8\text{-}20)$$

ou

$$\tfrac{1}{2}mv_b^2 + mgy_b = \tfrac{1}{2}mv_a^2 + mgy_a.$$

Dividindo a equação por m e reagrupando os termos, temos:

$$v_b^2 = v_a^2 + 2g(y_a - y_b).$$

Fazendo $v_a = 0$ e $y_a - y_b = h$, temos:

$$v_b = \sqrt{2gh} = \sqrt{(2)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(8{,}5\ \text{m})}$$
$$= 13\ \text{m/s}. \quad \text{(Resposta)}$$

Esta é a mesma velocidade que a criança teria se caísse verticalmente de uma altura de 8,5 m. Em um brinquedo de verdade haveria algum atrito e a criança chegaria à base com uma velocidade um pouco menor.

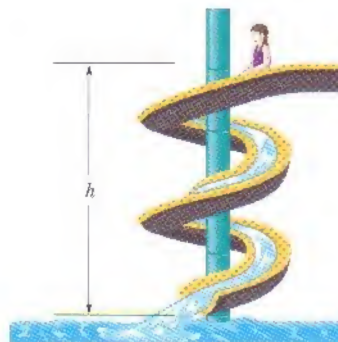


FIG. 8-8 Uma criança desce uma altura h escorregando em um toboágua.

Comentários: Embora este problema seja difícil de ser resolvido aplicando diretamente as leis de Newton, o uso da conservação da energia mecânica torna a solução bem simples. Entretanto, se alguém perguntar qual é o tempo que a criança leva para chegar à base do toboágua, os métodos baseados em energia são inúteis; precisaríamos conhecer a forma do toboágua, e mesmo assim ainda teríamos um problema difícil.

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 2: *Conservação da Energia Mecânica* As respostas às perguntas que se seguem o ajudarão a resolver problemas que envolvem o princípio de conservação da energia mecânica.

Em que sistema a energia mecânica é conservada? Você deve ser capaz de separar do ambiente o sistema de interesse. Verifique se é possível imaginar uma superfície fechada tal que tudo que está do lado de dentro é o sistema de interesse e tudo que está do lado de fora é o ambiente externo.

Existem forças de atrito ou arrasto envolvidas? Quando existe atrito ou arrasto no sistema a energia mecânica não é conservada.

O sistema é isolado? O princípio de conservação da energia mecânica se aplica apenas a sistemas isolados. Isso significa que nenhuma *força externa* (força exercida por um objeto que não pertence ao sistema) deve realizar trabalho sobre um objeto do sistema.

Quais são os estados inicial e final do sistema? O sistema passa de uma certa configuração inicial para uma certa configuração final. Aplicamos o princípio de conservação da energia mecânica dizendo que E_{mec} tem o mesmo valor nas duas configurações. É preciso definir com precisão quais são essas duas configurações.

8-6 | Interpretação de uma Curva de Energia Potencial

Mais uma vez vamos considerar uma partícula pertencente a um sistema no qual atua uma força conservativa. Desta vez supomos que o movimento da partícula se dá ao longo de um eixo x, enquanto uma força conservativa realiza trabalho sobre ela. Podemos obter muitas informações a respeito do movimento da partícula a partir do gráfico da energia potencial do sistema, $U(x)$. Antes de discutirmos esse tipo de gráfico, porém, precisamos de mais uma relação.

Cálculo da Força

A Eq. 8-6 pode ser usada para calcular a variação ΔU da energia potencial entre dois pontos em uma situação unidimensional a partir da força $F(x)$. Agora estamos interessados em fazer o contrário, ou seja, calcular a força a partir da função energia potencial $U(x)$.

No caso do movimento em uma dimensão, o trabalho W realizado por uma força que age sobre uma partícula quando a partícula percorre uma distância Δx é $F(x)\,\Delta x$. Nesse caso, a Eq. 8-1 pode ser escrita na forma

$$\Delta U(x) = -W = -F(x)\,\Delta x. \qquad (8\text{-}21)$$

Explicitando $F(x)$ e fazendo o acréscimo Δx tender a zero, temos:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \qquad \text{(movimento em uma dimensão)}, \qquad (8\text{-}22)$$

que é a equação procurada.

Podemos verificar se este resultado está correto fazendo $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, que é a função energia potencial elástica associada a uma força elástica. Nesse caso, o uso da Eq. 8-22 leva, como seria de se esperar, à equação $F(x) = -kx$, que é a lei de Hooke. Da mesma forma, podemos fazer $U(x) = mgx$, que é a energia potencial gravitacional de um sistema partícula-Terra, com uma partícula de massa m a uma altura x acima da superfície da Terra. Nesse caso, a Eq. 8-22 nos dá $F = -mg$, que é a força gravitacional a que a partícula está submetida.

A Curva de Energia Potencial

A Fig. 8-9*a* é um gráfico de uma função energia potencial $U(x)$ para um sistema no qual uma partícula se move em uma dimensão enquanto uma força conservativa $F(x)$ realiza trabalho sobre ela. Podemos facilmente calcular $F(x)$ determinando (graficamente) a inclinação da curva de $U(x)$ em vários pontos. (De acordo com a Eq. 8-22, $F(x)$ é o negativo da inclinação da curva $U(x)$.) A Fig. 8-9*b* é um gráfico de $F(x)$ obtido dessa forma.

Pontos de Retorno

A energia mecânica E de um sistema com o da Fig. 8-9 tem um valor constante dado por

$$U(x) + K(x) = E_{mec}. \qquad (8\text{-}23)$$

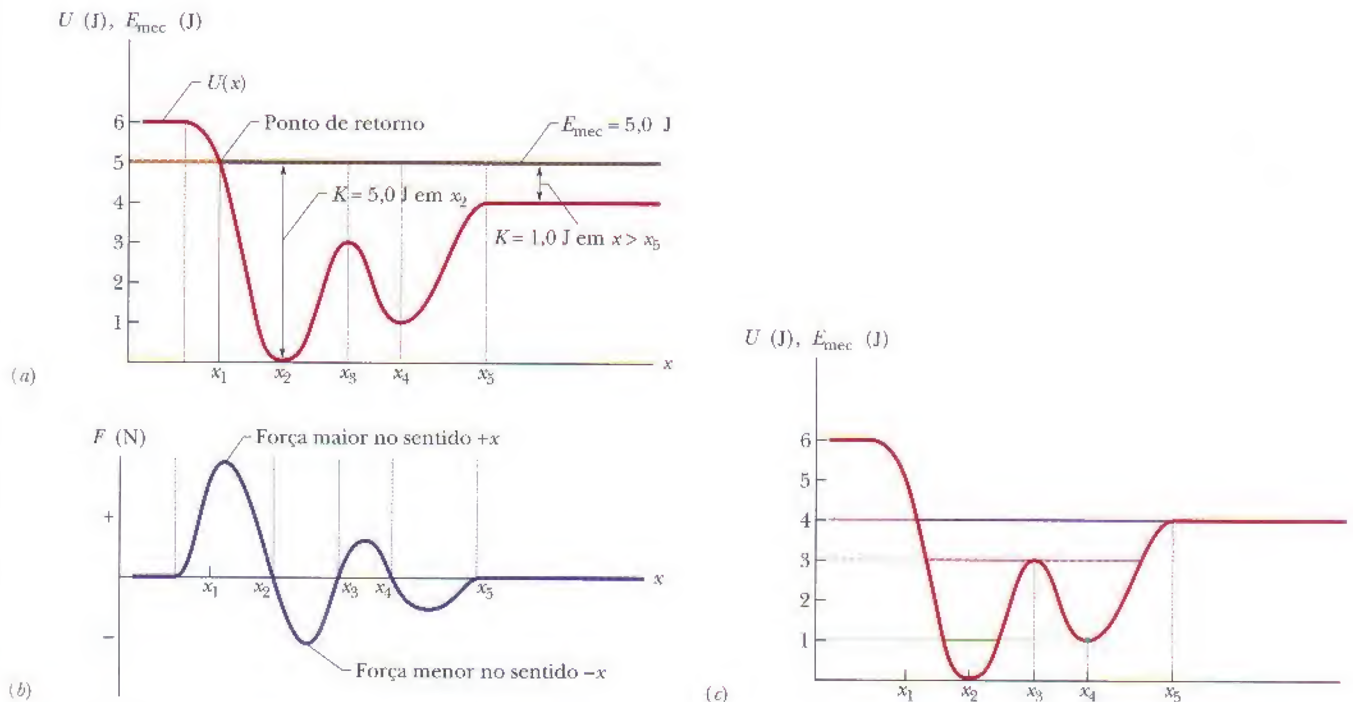


FIG. 8-9 (*a*) Gráfico de $U(x)$, a função energia potencial de um sistema com uma partícula que se move ao longo de um eixo x. Como não existe atrito, a energia mecânica é conservada. (*b*) Gráfico da força $F(x)$ que age sobre a partícula, obtido a partir do gráfico da energia potencial determinando a inclinação do gráfico em vários pontos. (*c*) O mesmo gráfico de (*a*), com três possíveis valores de E_{mec}.

onde a energia potencial $U(x)$ e a energia cinética $K(x)$ são funções da posição x da partícula. Podemos reescrever a Eq. 8-23 na forma

$$K(x) = E_{mec} - U(x). \tag{8-24}$$

Suponha que E_{mec} (que, como sabemos, tem um valor constante) seja, por exemplo, igual a 5,0 J. Este valor pode ser representado na Fig. 8-9*a* por uma reta horizontal que intercepta o eixo das energias no ponto correspondente a 5,0 J. (A reta aparece na figura.)

Podemos usar a Eq. 8-24 para determinar a energia cinética K correspondente a qualquer localização x da partícula a partir do gráfico de $U(x)$. Para isso, determinamos, na curva de $U(x)$, o valor de U para essa localização x e, em seguida, subtraímos U de E_{mec}. Assim, por exemplo, se a partícula se encontra em qualquer ponto à direita de x_5, $K = 1{,}0$ J. O valor de K é máximo (5,0 J) quando a partícula está em x_2 e mínimo (0 J) quando a partícula está em x_1.

Como K não pode ser negativa (pois v^2 é necessariamente um número positivo), a partícula não pode passar para a região à esquerda de x_1, na qual $E_{mec} - U$ é um número negativo. Quando a partícula se move a partir de x_2 em direção a x_1, K diminui (a velocidade da partícula diminui) até que $K = 0$ em $x = x_1$ (a velocidade da partícula se anula).

Observe que quando a partícula chega a x_1 a força que age sobre a partícula, dada pela Eq. 8-22, é positiva (pois a derivada dU/dx é negativa). Isso significa que a partícula não fica parada em x_1, mas começa a se mover para a direita, invertendo seu movimento. Assim, x_1 é um **ponto de retorno**, um lugar onde $K = 0$ (já que $U = E$) e a partícula inverte o sentido de movimento. Não existe ponto de retorno (em que $K = 0$) no lado direito do gráfico. Quando a partícula se desloca para a direita ela continua a se mover indefinidamente nesse sentido.

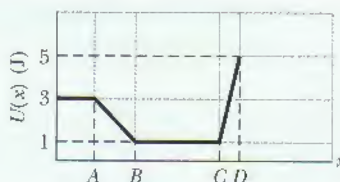
Pontos de Equilíbrio

A Fig. 8-9*c* mostra três valores diferentes de E_{mec} superpostos ao gráfico da função energia potencial $U(x)$ da Fig. 8-9*a*. Vejamos como esses valores alteram a situação. Se $E_{mec} = 4{,}0$ J (reta violeta), o ponto de retorno muda de x_1 para um ponto entre x_1 e x_2. Além disso, em qualquer ponto à direita de x_5, a energia mecânica do sistema é igual à energia potencial; assim, a partícula não possui energia cinética, e (de acordo com a Eq. 8-22) nenhuma força atua sobre a mesma, de modo que permanece em repouso. Diz-se que uma partícula nesta situação está em **equilíbrio indiferente**. (Uma bola de gude sobre uma mesa horizontal é um exemplo desse tipo de equilíbrio.)

Se $E_{mec} = 3{,}0$ J (reta rosa), existem dois pontos de retorno, um entre x_1 e x_2 e o outro entre x_4 e x_5. Além disso, x_3 é um terceiro ponto no qual $K = 0$. Se a partícula estiver exatamente neste ponto, a força sobre ela também será nula e a partícula permanecerá em repouso. Entretanto, se a partícula for ligeiramente deslocada em qualquer sentido, uma força a empurrará no mesmo sentido e a partícula continuará a se mover, afastando-se cada vez mais do ponto inicial. Diz-se que uma partícula nesta situação está em **equilíbrio instável**. (Uma bola de gude equilibrada no alto de uma bola de boliche é um exemplo deste tipo de equilíbrio.)

Considere agora o comportamento da partícula se $E_{mec} = 1{,}0$ J (reta verde). Se a partícula for colocada em x_4, ficará indefinidamente nesta posição. Ela não pode se mover nem para a direita nem para a esquerda, pois para isso seria necessária uma energia cinética negativa. Se a empurrarmos ligeiramente para a esquerda ou para a direita surge uma força restauradora que a faz retornar ao ponto x_4. Diz-se que uma partícula nesta situação está em **equilíbrio estável**. (Uma bola de gude no fundo de uma tigela hemisférica é um exemplo deste tipo de equilíbrio.) Se colocarmos a partícula no *poço de potencial* em forma de taça com centro em x_2, ela estará entre dois pontos de retorno. Poderá se mover, mas apenas entre x_1 e x_3.

TESTE 4 A figura mostra a função energia potencial $U(x)$ de um sistema no qual uma partícula se move em uma dimensão. (a) Ordene as regiões AB, BC e CD de acordo com o módulo da força que age sobre a partícula, em ordem decrescente. (b) Qual é o sentido da força quando a partícula está na região AB?



Exemplo 8-4

Uma partícula de 2,00 kg se move ao longo de um eixo x, em um movimento unidimensional, sob a ação de uma força conservativa. A Fig. 8-10*a* mostra a energia potencial $U(x)$ associada à força. Isso significa que se a partícula for colocada em qualquer posição entre $x = 0$ e $x = 7{,}00$ terá o valor indicado de U. Em $x = 6{,}5$ m, a velocidade da partícula é $v_0 = (-4{,}00 \text{ m/s})\hat{\text{i}}$.

(a) Determine a velocidade da partícula em $x_1 = 4{,}5$ m a partir da Fig. 8-10*a*.

IDÉIAS-CHAVE (1) A energia cinética da partícula é dada pela Eq. 7-1 ($K = \frac{1}{2}mv^2$). (2) Como apenas uma força conservativa age sobre a partícula, a energia mecânica E_{mec} ($= K + U$) é conservada quando a partícula se move. (3) Assim, em um gráfico de $U(x)$ como o da Fig. 8-10*a* a energia cinética é igual à diferença entre E_{mec} e U.

Cálculos: Em $x = 6{,}5$, a energia cinética da partícula é dada por

$$K_0 = \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}(2{,}00 \text{ kg})(4{,}00 \text{m/s})^2$$
$$= 16{,}0 \text{ J}.$$

Como a energia potencial neste ponto é $U = 0$, a energia mecânica é

$$E_{mec} = K_0 + U_0 = 16{,}0 \text{ J} + 0 = 16{,}0 \text{ J}.$$

Este valor de E_{mec} está plotado como uma reta horizontal na Fig. 8-10*a*. Como se pode ver na figura, em $x = 4{,}5$ m a energia potencial é $U_1 = 7{,}0$ J. A energia cinética K_1 é a diferença entre E_{mec} e U_1:

$$K_1 = E_{mec} - U_1 = 16{,}0 \text{ J} - 7{,}0 \text{ J} = 9{,}0 \text{ J}.$$

Como $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$, temos:

$$v_1 = 3{,}0 \text{ m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a localização do ponto de retorno da partícula?

IDÉIA-CHAVE O ponto de retorno é o ponto em que a força anula momentaneamente e depois inverte o movimento da partícula. Neste ponto, $v = 0$ e, portanto, $K = 0$.

Cálculos: Como K é a diferença entre E_{mec} e U, estamos interessados em determinar o ponto da Fig. 8-10*a* em que o gráfico de U encontra a reta horizontal de E_{mec}, como mostra a Fig. 8-10*b*. Como o gráfico de U é uma linha reta na Fig. 8-10*b*, podemos traçar dois triângulos retângulos semelhantes e usar a proporcionalidade dos catetos

$$\frac{16-7{,}0}{d} = \frac{20-7{,}0}{4{,}0-1{,}0},$$

para obter $d = 2{,}08$ m. Assim, o ponto de retorno está localizado em

$$x = 4{,}0 \text{ m} - d = 1{,}9 \text{ m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(c) Determine a força que age sobre a partícula quando ela se encontra na região $1{,}9 \text{ m} < x < 4{,}0 \text{ m}$.

IDÉIA-CHAVE A força é dada pela Eq. 8-22 [$F(x) = -dU(x)/dx$]. De acordo com esta equação, a força é o negativo da inclinação da curva de $U(x)$.

Cálculos: Examinando o gráfico da Fig. 8-10*b*, vemos que na região $1{,}0 \text{ m} < x < 4{,}0 \text{ m}$ a força é

$$F = -\frac{20 \text{ J} - 7{,}0 \text{ J}}{1{,}0 \text{ m} - 4{,}0 \text{ m}} = 4{,}3 \text{ N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, a força tem módulo 4,3 N e está orientada no sentido positivo do eixo x. Este resultado é coerente com o fato de que a partícula, que inicialmente está se movendo para a esquerda, é freada pela força e depois passa a se mover para a direita.

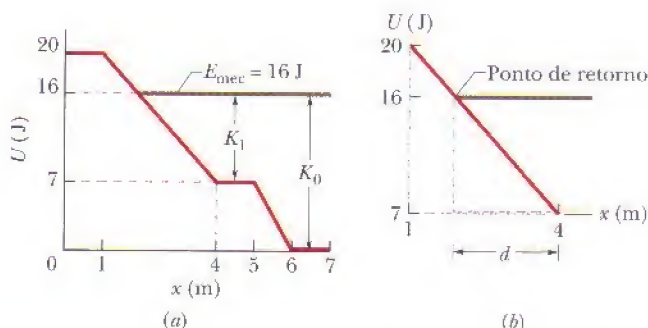


FIG. 8-10 (*a*) Gráfico da energia potencial U em função da posição x. (*b*) Parte do gráfico usada para determinar o ponto de retorno da partícula.

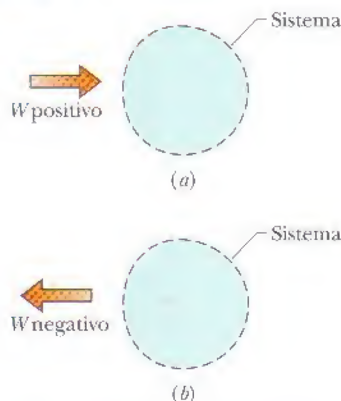


FIG. 8-11 (*a*) O trabalho positivo *W* realizado sobre um sistema corresponde a uma transferência de energia para o sistema. (*b*) O trabalho negativo corresponde a uma transferência de energia para fora do sistema.

8-7 | Trabalho Realizado por uma Força Externa sobre um Sistema

No Capítulo 7 definimos o trabalho como a energia transferida para um objeto ou de um objeto através de uma força que age sobre o sistema. Podemos agora estender essa definição para uma força externa que age sobre um sistema de objetos.

> Trabalho é a energia transferida para um sistema ou de um sistema através de uma força externa que age sobre o sistema.

A Fig. 8-11*a* mostra um trabalho positivo (uma transferência de energia *para* um sistema) e a Fig. 8-11*b* mostra um trabalho negativo (uma transferência de energia *de* um sistema). Quando mais de uma força age sobre um sistema, o *trabalho total* dessas forças é a energia transferida para o sistema ou retirada do sistema.

Essas transferências são semelhantes às transferências de dinheiro em uma conta bancária através de depósitos e saques. Se um sistema contém uma única partícula ou um único objeto que se comporta como uma partícula, como no Capítulo 7, o trabalho realizado por uma força sobre o sistema pode mudar apenas a energia cinética do sistema. Esta transferência é governada pelo teorema do trabalho e energia cinética expresso pela Eq. 7-10 ($\Delta K = W$), ou seja, uma única partícula possui apenas uma conta de energia, chamada energia cinética. Forças externas podem apenas transferir energia para esta conta ou retirar energia desta conta. Se um sistema é mais complicado, porém, uma força externa pode alterar outras formas de energia (como a energia potencial), ou seja, um sistema mais complexo pode ter várias contas de energia.

Vamos formular definições de energia para esses sistemas mais complexos examinando duas situações básicas, uma que não envolve o atrito e outra que envolve o atrito.

Na Ausência de Atrito

Em uma competição de arremesso de bolas de boliche, primeiro você se agacha e coloca as mãos em concha debaixo da bola. Em seguida, você se levanta rapidamente e ao mesmo tempo levanta as mãos, lançando a bola quando as mãos atingem o nível do rosto. Durante o movimento para cima a força que você aplica à bola obviamente realiza trabalho. Ela é uma força externa que transfere energia, mas para qual sistema?

Para responder a essa pergunta vamos verificar quais são as energias que mudam. Há uma variação ΔK da energia cinética da bola e, como a bola e a Terra ficaram mais afastadas uma da outra, há também uma variação ΔU da energia potencial gravitacional do sistema bola-Terra. Para levar em conta essas duas variações é preciso considerar o sistema bola-Terra. Assim, a força que você aplica é uma força externa que realiza trabalho sobre esse sistema, e o trabalho é dado por

$$W = \Delta K + \Delta U, \tag{8-25}$$

ou

$$W = \Delta E_{mec} \quad \text{(trabalho realizado sobre um sistema sem atrito)}, \tag{8-26}$$

onde ΔE_{mec} é a variação da energia mecânica do sistema. Essas duas equações, que estão representadas na Fig. 8-12, são equivalentes no caso de um trabalho realizado por uma força externa sobre o sistema na ausência de atrito.

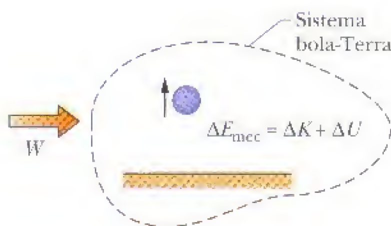


FIG. 8-12 Um trabalho positivo *W* é realizado sobre um sistema composto por uma bola de boliche e a Terra, causando uma variação ΔE_{mec} da energia mecânica do sistema, uma variação ΔK da energia cinética da bola e uma variação ΔU da energia potencial gravitacional do sistema.

Na Presença de Atrito

Vamos agora considerar o exemplo da Fig. 8-13*a*. Uma força horizontal constante $\vec{F}$ puxa um bloco ao longo de um eixo *x*, deslocando-o de uma distância *d* e aumentando a velocidade do bloco de $\vec{v}_0$ para $\vec{v}$. Durante o movimento o piso exerce uma força de atrito cinético constante $\vec{f}_k$ sobre o bloco. Inicialmente, vamos escolher o

bloco como nosso sistema e aplicar a ele a segunda lei de Newton. Podemos escrever essa lei para as componentes ao longo do eixo x ($F_{res,x} = ma_x$) na forma

$$F - f_k = ma. \tag{8-27}$$

Como as forças são constantes, a aceleração $\vec{a}$ também é constante. Assim, podemos usar a Eq. 2-16 para escrever

$$v^2 = v_0^2 + 2ad.$$

Explicitando a nesta equação, substituindo o resultado na Eq. 8-27 e reagrupando os termos, obtemos

$$Fd = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 + f_k d \tag{8-28}$$

ou, como $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Delta K$ para o bloco,

$$Fd = \Delta K + f_k d. \tag{8-29}$$

Em uma situação mais geral (na qual, por exemplo, o bloco esteja subindo uma rampa) pode haver uma variação da energia potencial. Para levar em conta essa possível variação generalizamos a Eq. 8-39, escrevendo

$$Fd = \Delta E_{mec} + f_k d. \tag{8-30}$$

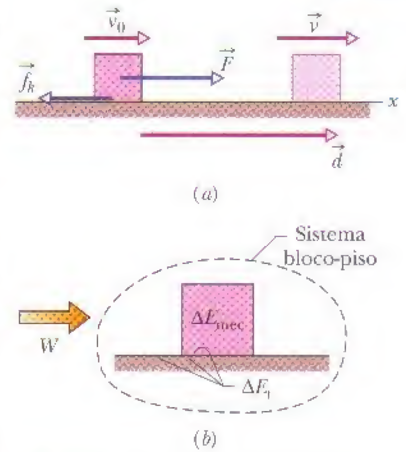


FIG. 8-13 (*a*) Um bloco é puxado por uma força $\vec{F}$ enquanto uma força de atrito cinético $\vec{f}_k$ se opõe ao movimento. O bloco tem uma velocidade $\vec{v}_0$ no início do deslocamento e uma velocidade $\vec{v}$ no final do deslocamento. (*b*) Um trabalho positivo W é realizado pela força $\vec{F}$ sobre o sistema bloco-piso, produzindo uma variação ΔE_{mec} da energia mecânica do bloco e uma variação ΔE_t da energia térmica do bloco e do piso.

Observamos experimentalmente que o bloco e a parte do piso ao longo da qual o bloco se desloca ficam mais quentes quando o bloco está se movendo. Como vamos ver no Capítulo 18, a temperatura de um objeto está relacionada à sua energia térmica E_t (energia associada ao movimento aleatório dos átomos e moléculas do objeto). Neste caso, a energia térmica do bloco e do piso aumenta porque (1) existe atrito entre eles e (2) há movimento. Lembre-se de que o atrito é causado pelas soldas a frio entre as duas superfícies. Quando o bloco desliza sobre o piso as soldas são repetidamente rompidas e refeitas, o que aquece o bloco e o piso. Assim, o deslizamento aumenta a energia térmica E_t do bloco e do piso.

Experimentalmente, observa-se que o aumento ΔE_t da energia térmica é igual ao produto do módulo da força de atrito cinético, f_k, por d, o módulo do deslocamento:

$$\Delta E_t = f_k d \quad \text{(aumento da energia térmica causado pelo atrito).} \tag{8-31}$$

Assim, podemos reescrever a Eq. 8-30 na forma

$$Fd = \Delta E_{mec} + \Delta E_t. \tag{8-32}$$

Fd é o trabalho W realizado pela força externa $\vec{F}$ (a energia transferida pela força), mas sobre que sistema o trabalho é realizado (onde são feitas as transferências de energia)? Para responder a esta pergunta, verificamos quais são as energias que variam. A energia mecânica do bloco varia e as energias térmicas do bloco e do piso também variam. Assim, o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ é realizado sobre o sistema bloco-piso. Esse trabalho é dado por

$$W = \Delta E_{mec} + \Delta E_t \quad \text{(trabalho realizado em um sistema com atrito).} \tag{8-33}$$

Esta equação, que está representada na Fig. 8-13*b*, é a definição do trabalho realizado por uma força externa sobre um sistema no qual existe atrito.

TESTE 5 Em três tentativas, um bloco é empurrado por uma força horizontal em um piso com atrito, como na Fig. 8-13*a*. Os módulos F da força aplicada e os efeitos da força sobre a velocidade do bloco são mostrados na tabela. Nas três tentativas o bloco percorre a mesma distância d. Ordene as três tentativas de acordo com a variação da energia térmica do bloco e do piso, em ordem decrescente.

Tentativa	F	Velocidade do Bloco
a	5,0 N	diminui
b	7,0 N	permanece constante
c	8,0 N	aumenta

Exemplo 8-5

Os habitantes pré-históricos da ilha da Páscoa esculpiram centenas de gigantescas estátuas de pedra em uma pedreira e depois as espalharam por toda a ilha (Fig. 8-14). A forma como transportaram essas estátuas por até 10 km sem usar máquinas sofisticadas até hoje é motivo para acaloradas discussões. Provavelmente colocaram as estátuas, uma a uma, em uma espécie de trenó de madeira e puxaram o trenó por uma "pista" formada por toras de madeira quase do mesmo tamanho, que funcionavam como roletes. Em uma reconstituição moderna dessa técnica, 25 homens conseguiram transportar uma estátua de 9000 kg, semelhante às da ilha da Páscoa, a uma distância de 45 m, em terreno plano, em 2 min.

(a) Estime o trabalho realizado pela força total $\vec{F}$ exercida pelos 25 homens durante o transporte da estátua e determine o sistema sobre o qual a força realizou o trabalho.



FIG. 8-14 Estátuas de pedra da ilha da Páscoa. *(©LMR Group/Alamy Images)*

IDÉIAS-CHAVE (1) Podemos calcular o trabalho realizado usando a Eq. 7-7 ($W = Fd \cos \phi$). (2) Para determinar qual é o sistema sobre o qual a força realizou o trabalho, vamos verificar quais foram as energias que mudaram.

Cálculos: Na Eq. 7-7, d é a distância percorrida, 45 m, F é o módulo da força exercida pelos 25 homens sobre a estátua e $\phi = 0°$. Vamos supor que cada homem puxou a estátua com uma força cujo módulo era igual ao dobro do seu peso, que consideraremos como tendo o mesmo valor mg para todos os homens. Assim, o módulo da força resultante era $F = (25)(2mg) = 50mg$. Estimando a massa de um homem em 80 kg, podemos escrever a Eq. 7-7 como

$$\begin{aligned} W &= Fd \cos \phi = 50mgd \cos \phi \\ &= (50)(80 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2)(45 \text{ m}) \cos 0° \\ &= 1{,}8 \times 10^6 \text{ J} \approx 2 \text{ MJ}. \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

Como a estátua se moveu, houve certamente uma mudança ΔK da energia cinética durante o movimento. Podemos supor que houve um atrito cinético considerável entre o trenó, os troncos e o solo, o que resultou em uma variação ΔE_t da energia térmica desses objetos. Assim, o sistema sobre o qual o trabalho foi realizado era formado pela estátua, o trenó, os troncos e o solo.

(b) Qual foi o aumento ΔE_t da energia térmica do sistema durante o deslocamento de 45 m?

IDÉIA-CHAVE Podemos relacionar ΔE_t ao trabalho W realizado por $\vec{F}$ através da Eq. 8-33 para um sistema no qual existe atrito:

$$W = \Delta E_{mec} + \Delta E_t.$$

Cálculos: O valor de W foi determinado no item (a). A variação ΔE_{mec} da energia mecânica da estátua foi nula, pois a estátua estava em repouso no início e no fim do deslocamento e não mudou de altura. Assim, temos:

$$\Delta E_t = W = 1{,}8 \times 10^6 \text{ J} \approx 2 \text{ MJ}. \quad \text{(Resposta)}$$

(c) Estime o trabalho que teria sido realizado pelos 25 homens se eles tivessem transportado a estátua por 10 km sobre um terreno plano na ilha da Páscoa. Estime também a variação total ΔE_t que teria ocorrido no sistema estátua-trenó-troncos-solo.

Cálculo: Calculamos W como em (a), mas com $d = 1 \times 10^4$ m. Além disso, podemos igualar ΔE_t a W. O resultado é o seguinte:

$$W = \Delta E_t = 3{,}9 \times 10^8 \text{ J} \approx 400 \text{ MJ}. \quad \text{(Resposta)}$$

Isso mostra que a quantidade de energia transferida pelos homens durante o movimento da estátua teria sido enorme. Mesmo assim, os 25 homens *poderiam* ter transportado a estátua por 10 km sem recorrer a nenhuma fonte misteriosa de energia.

Exemplo 8-6

Um operário empurra um engradado de repolhos (massa total $m = 14$ kg) sobre um piso de concreto com uma força horizontal constante $\vec{F}$ de módulo 40 N. Em um deslocamento retilíneo de módulo $d = 0{,}50$ m, a velocidade do engradado diminui de $v_0 = 0{,}60$ m/s para $v = 0{,}20$ m/s.

(a) Qual foi o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ e sobre que sistema esse trabalho foi realizado?

IDÉIA-CHAVE Como a força aplicada $\vec{F}$ é constante, podemos calcular o trabalho realizado pela força usando a Eq. 7-7 ($W = Fd \cos \phi$).

Cálculo: Substituindo os valores conhecidos e levando em conta o fato de que a força $\vec{F}$ e o deslocamento $\vec{d}$ apontam na mesma direção, temos:

$$W = Fd \cos \phi = (40 \text{ N})(0{,}50 \text{ m}) \cos 0°$$
$$= 20 \text{ J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Raciocínio: Para determinar o sistema sobre o qual o trabalho é realizado devemos examinar quais são as energias que variam. Como a velocidade do engradado varia, certamente existe uma variação ΔK da energia cinética do engradado. Existe atrito entre o piso e o engradado e, portanto, uma variação da energia térmica? Observe que $\vec{F}$ e a velocidade do engradado apontam no mesmo sentido. Assim, se não existisse atrito $\vec{F}$ aceleraria o engradado, fazendo a velocidade *aumentar*. Como a velocidade do engradado está *diminuindo*, deve existir atrito e uma variação ΔE_t da energia térmica do engradado e do piso. Assim, o sistema sobre o qual o trabalho é realizado é o sistema engradado-piso, porque as variações de energia ocorrem nesse sistema.

(b) Qual é o aumento ΔE_t da energia térmica do engradado e do piso?

IDÉIA-CHAVE Podemos relacionar ΔE_t ao trabalho W realizado pela força $\vec{F}$ à definição de energia da Eq. 8-33 para um sistema no qual existe atrito:

$$W = \Delta E_{mec} + \Delta E_t. \qquad (8\text{-}34)$$

Cálculos: O valor de W foi calculado no item (a). Como a energia potencial não variou, a variação ΔE_{mec} da energia mecânica do engradado é igual à variação da energia cinética, e podemos escrever:

$$\Delta E_{mec} + \Delta K = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2.$$

Substituindo esta expressão na Eq. 8-34 e explicitando ΔE_t, obtemos

$$\Delta E_t = W - (\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2) = W - \tfrac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$
$$= 20 \text{ J} - \tfrac{1}{2}(14 \text{ kg})[(0{,}20 \text{ m/s})^2 - (0{,}60 \text{ m/s})^2]$$
$$= 22{,}2 \text{ J} \approx 22 \text{ J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

8-8 | Conservação da Energia

Já discutimos várias situações nas quais a energia era transferida para ou de objetos e sistemas, da mesma forma como o dinheiro é transferido entre contas bancárias. Em cada uma dessas situações supusemos que a energia envolvida podia ser contabilizada, ou seja, que a energia não podia aparecer ou desaparecer magicamente. Em linguagem mais formal, supusemos (corretamente) que a energia obedece a uma lei conhecida como **lei de conservação da energia**, que se refere à **energia total** E de um sistema. Esse total é a soma da energia mecânica com a energia térmica e com qualquer outro tipo de *energia interna* do sistema, além da energia térmica. (Ainda não discutimos outros tipos de energia interna.) De acordo com a lei,

A energia total E de um sistema pode mudar apenas através da transferência de energia para o sistema ou do sistema.

O único tipo de transferência de energia que consideramos até agora foi o trabalho W realizado sobre um sistema. Assim, para nós, nesse ponto, essa lei estabelece que

$$W = \Delta E = \Delta E_{mec} + \Delta E_t + \Delta E_{int}, \qquad (8\text{-}35)$$

onde ΔE_{mec} é uma variação da energia mecânica do sistema, ΔE_t é uma variação da energia térmica do sistema e ΔE_{int} é uma variação de qualquer outro tipo de energia interna do sistema. Em ΔE_{mec} estão incluídas as variações ΔK da energia cinética e as variações ΔU da energia potencial (elástica, gravitacional ou qualquer outra forma que exista).

Esta lei de conservação da energia *não* é algo que deduzimos a partir de princípios básicos da física, mas se baseia em resultados experimentais. Os cientistas e engenheiros nunca encontraram uma exceção.



FIG. 8-15 Para descer, o alpinista precisa transferir energia da energia potencial gravitacional de um sistema formado por ele, seu equipamento e a Terra. Ele enrolou a corda em anéis de metal, para que haja atrito entre a corda e os anéis. Isso permite que a maior parte da energia potencial gravitacional seja transferida para a energia térmica da corda e dos anéis, e não para a energia cinética do alpinista. *(Tyler Stableford/The Image Bank/Getty Images)*

Sistema Isolado

Um sistema isolado não pode trocar energia com o ambiente. Nesse caso, a lei de conservação da energia pode ser expressa da seguinte forma:

> A energia total, E, de um sistema isolado não pode variar.

Muitas transferências de energia podem acontecer *dentro* de um sistema isolado, como, por exemplo, entre energia cinética e alguma forma de energia potencial ou entre energia cinética e energia térmica. Entretanto, a energia total do sistema não pode variar.

Para dar um exemplo, considere a alpinista da Fig. 8-15, seu equipamento e a Terra como um sistema isolado. Enquanto ela desce a encosta de uma montanha, fazendo variar a configuração do sistema, ela precisa controlar a transferência de energia potencial do sistema. (Essa energia não pode simplesmente desaparecer.) Parte dessa energia é convertida em energia cinética. Entretanto, a alpinista não quer transferir muita energia para essa forma, pois nesse caso passaria a se mover muito depressa. Por essa razão, ela passa a corda por argolas de metal de modo a produzir atrito entre a corda e as argolas durante a descida. A passagem da corda pelas argolas transfere energia potencial gravitacional do sistema para energia térmica das argolas e da corda de uma forma controlável. A energia total do sistema montanhista-equipamento-Terra (a soma das energias potencial gravitacional, cinética e térmica) não varia durante a descida.

No caso de um sistema isolado, a lei de conservação da energia pode ser escrita de duas formas. Primeiro, fazendo $W = 0$ na Eq. 8-35, obtemos

$$\Delta E_{mec} + \Delta E_t + \Delta E_{int} = 0 \quad \text{(sistema isolado)}. \tag{8-36}$$

Podemos também fazer $\Delta E_{mec} = E_{mec,2} - E_{mec,1}$, onde os índices 1 e 2 se referem a dois instantes diferentes, antes e depois da ocorrência de um certo processo, digamos. Nesse caso, a Eq. 8-36 se torna

$$E_{mec,2} = E_{mec,1} - \Delta E_t - \Delta E_{int}. \tag{8-37}$$

De acordo com a Eq. 8-37,

> Em um sistema isolado, podemos relacionar a energia total em um dado instante à energia total em outro instante *sem considerar as energias em instantes intermediários.*

Este fato pode ser uma ferramenta bastante poderosa para a solução de problemas que envolvem sistemas isolados quando precisamos relacionar as energias de um sistema antes e depois da ocorrência de um certo processo.

Na Seção 8-5 discutimos uma situação especial de sistemas isolados, aquela na qual forças dissipativas (como a força de atrito cinético) não atuavam no sistema. Nesse caso especial, ΔE_t e ΔE_{int} são nulas e a Eq. 8-37 se reduz à Eq. 8-18. Em outras palavras, a energia mecânica de um sistema isolado é conservada quando não existem forças dissipativas atuando no sistema.

Forças Externas e Transferências Internas de Energia

Uma força externa pode mudar a energia cinética ou a energia potencial de um objeto sem realizar trabalho sobre o objeto, ou seja, sem transferir energia para o objeto. Em vez disso, a força se limita a transferir energia de uma forma para outra no interior do objeto.

A Fig. 8-16 mostra um exemplo. Uma patinadora, inicialmente em repouso, empurra um corrimão e passa a deslizar sobre o gelo (Fig. 8-16*a* e *b*). A energia cinética da patinadora aumenta porque o corrimão exerce uma força externa $\vec{F}$ sobre ela.

Entretanto, a força não transfere energia do corrimão para ela e, portanto, não realiza trabalho sobre ela; o aumento da energia cinética se deve a transferências internas a partir da energia bioquímica dos músculos da moça.

A Fig. 8-17 mostra outro exemplo. Um motor de combustão interna aumenta a velocidade de um carro que possui tração nas quatro rodas (as quatro rodas são acionadas pelo motor). Durante a aceleração o motor faz os pneus empurrarem o pavimento para trás. Esse empurrão dá origem a uma força de atrito $\vec{f}$ que empurra os pneus para a frente. A força externa resultante $\vec{F}$ exercida pelo pavimento, que é a soma dessas forças de atrito, acelera o carro, aumentando sua energia cinética. Entretanto, $\vec{F}$ não transfere energia do pavimento para o carro e, portanto, não realiza trabalho; o aumento da energia cinética do carro se deve à transferência de energia interna armazenada no combustível.

Em situações semelhantes a essas duas às vezes podemos relacionar a força externa $\vec{F}$ que age sobre um objeto à variação da energia mecânica do objeto se conseguirmos simplificar a situação. Considere o exemplo da patinadora no gelo. Enquanto ela empurra o corrimão e percorre a distância d da Fig. 8-16c, podemos simplificar a situação supondo que a aceleração é constante, com a velocidade variando de $v_0 = 0$ para v. (Isso equivale a supor que o módulo e a orientação de $\vec{F}$ são constantes.) Após o empurrão podemos simplificar a situação considerando a patinadora como uma partícula e desprezando o fato de que o esforço muscular aumentou a energia térmica do corpo da patinadora, além de alterar outros parâmetros fisiológicos. Sendo assim, podemos aplicar a Eq. 7-5 ($\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_x d$) e escrever

$$K - K_0 = (F\cos\phi)d,$$

ou

$$\Delta K = Fd\cos\phi. \tag{8-38}$$

Se a situação também envolve uma mudança na altura do objeto, podemos levar em conta a variação ΔU da energia potencial gravitacional escrevendo

$$\Delta U + \Delta K = Fd\cos\phi. \tag{8-39}$$

A força do lado direito dessa equação não realiza trabalho sobre o objeto, mas é responsável pelas variações de energia que aparecem do lado esquerdo da equação.

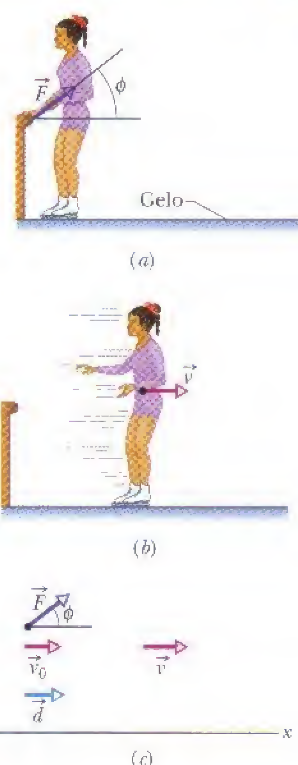


FIG. 8-16 (a) Quando uma patinadora empurra um corrimão, o corrimão exerce uma força $\vec{F}$ sobre ela. (b) Depois que a patinadora larga o corrimão ela possui uma velocidade $\vec{v}$. (c) A força externa $\vec{F}$ age sobre a patinadora, formando um ângulo ϕ com o eixo horizontal x. Quando a patinadora sofre um deslocamento $\vec{d}$, sua velocidade muda de $\vec{v}_0$ (= 0) para $\vec{v}$ por causa da componente horizontal de $\vec{F}$.

Potência

Agora que sabemos que uma força pode transferir energia de uma forma para outra sem realizar trabalho, podemos ampliar a definição de potência apresentada no capítulo anterior. Na Seção 7-9 a potência foi definida como a taxa com a qual uma força realiza trabalho. Em um sentido mais geral, a potência P é a taxa com a qual uma força transfere energia de uma forma para outra. Se uma certa quantidade de energia ΔE é transferida durante um intervalo de tempo Δt, a **potência média** desenvolvida pela força é dada por

$$P_{\text{méd}} = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \tag{8-40}$$

Analogamente, a **potência instantânea** desenvolvida pela força é dada por

$$P = \frac{dE}{dt}. \tag{8-41}$$

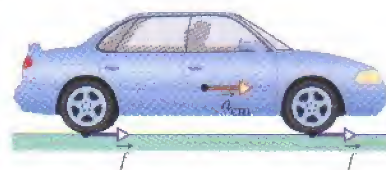


FIG. 8-17 Um veículo acelera para a direita usando tração nas quatro rodas. O pavimento exerce quatro forças de atrito (duas das quais aparecem na figura) sobre a superfície inferior dos pneus. A soma dessas quatro forças é a força externa resultante $\vec{F}$ que age sobre o carro.

Exemplo 8-7

Na Fig. 8-18 um pacote com 2,0 kg de pamonha, depois de deslizar ao longo de um piso com velocidade $v_1 = 4{,}0$ m/s, choca-se com uma mola, comprimindo-a até ficar momentaneamente em repouso. Até o ponto em que o pacote entra em contato com a mola inicialmente relaxada o piso não possui atrito, mas enquanto o pacote está comprimindo a mola o piso exerce sobre o pacote uma força de atrito cinético de módulo 15 N. Se $k = 10\,000$ N/m, qual é a variação d

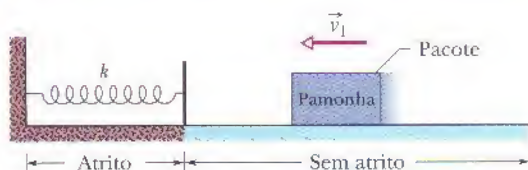


FIG. 8-18 Um pacote desliza sobre um piso sem atrito com velocidade $\vec{v}_1$ em direção a uma mola de constante elástica k. Quando o pacote entra em contato com a mola uma força de atrito do piso passa a atuar sobre ele.

do comprimento da mola entre o instante em que começa a ser comprimida e o instante em que o pacote pára?

IDÉIAS-CHAVE Precisamos examinar todas as forças para determinar se temos um sistema isolado ou um sistema no qual uma força externa está realizando trabalho.

Forças: A força normal exercida pelo piso sobre o pacote não realiza trabalho, porque a direção da força é sempre perpendicular à direção de deslocamento do pacote. Pela mesma razão, a força gravitacional também não realiza trabalho sobre o pacote. Entretanto, enquanto a mola está sendo comprimida a força aplicada pela mola realiza trabalho sobre o pacote, transferindo energia para a energia potencial elástica da mola. A força da mola também empurra uma parede rígida. Como existe atrito entre o pacote e o piso, o deslizamento do pacote sobre o piso aumenta a energia térmica do pacote e do piso.

Sistema: O sistema pacote-mola-piso-parede, que inclui todas estas forças e transferências de energia, é um sistema isolado. Assim, sua energia total não pode variar. Podemos, portanto, aplicar ao sistema a lei de conservação da energia na forma da Eq. 8-37:

$$E_{mec,2} = E_{mec,1} - \Delta E_t. \quad (8\text{-}42)$$

Cálculos: Na Eq. 8-42, vamos supor que o índice 1 corresponde ao estado inicial do pacote e o índice 2 corresponde ao estado no qual o pacote está momentaneamente em repouso e a mola foi comprimida de uma distância d. Para os dois estados, a energia mecânica do sistema é a soma da energia cinética do pacote ($K = \frac{1}{2}mv^2$) e a energia potencial da mola ($U = \frac{1}{2}kx^2$). No caso do estado 1, $U = 0$ (pois a mola não está comprimida) e a velocidade do pacote é v_1. Assim, temos:

$$E_{mec,1} = K_1 + U_1 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 + 0.$$

No caso do estado 2, $K = 0$ (pois o pacote está parado) e a variação de comprimento da mola é d. Assim, temos:

$$E_{mec,2} = K_2 + U_2 = 0 + \tfrac{1}{2}kd^2.$$

Finalmente, usando a Eq. 8-31 podemos substituir a variação ΔE_t da energia térmica do pacote e do piso por $f_k d$. Nesse caso, a Eq. 8-42 se torna

$$\tfrac{1}{2}kd^2 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - f_k d.$$

Reagrupando os termos e substituindo os valores conhecidos, temos:

$$5000d^2 + 15d - 16 = 0.$$

Resolvendo esta equação do segundo grau, obtemos:

$$d = 0{,}055 \text{ m} = 5{,}5 \text{ cm}. \quad \text{(Resposta)}$$

Exemplo 8-8

A Fig. 8-19*a* mostra uma encosta e um vale ao longo dos quais acontece uma avalanche de pedras. As pedras têm uma massa total m, caem de uma altura $y = H$, percorrem uma distância d_1 em uma encosta de ângulo $\theta = 45°$ e percorrem uma distância d_2 em um vale plano. Determine a razão d_2/H entre a distância percorrida no vale e a altura da queda se o coeficiente de atrito cinético é 0,60 (um valor razoável).

IDÉIAS-CHAVE (1) A energia mecânica E_{mec} do sistema pedras-Terra é a soma da energia cinética ($K = \frac{1}{2}mv^2$) e da energia potencial gravitacional ($U = mgy$). (2) A energia mecânica não é conservada durante a avalanche porque uma força de atrito (dissipativa) age sobre as pedras, transferindo uma certa quantidade de energia ΔE_t para a energia térmica das pedras e do solo. (3) A energia transferida ΔE_t está relacionada ao módulo da força de atrito cinético e à distância percorrida pelas pedras através da Eq. 8-31 ($\Delta E_t = f_k d$). (4) A energia mecânica $E_{mec,2}$ em qualquer ponto durante a avalanche está relacionada à energia mecânica inicial $E_{mec,1}$ e à energia transferida ΔE_t através da Eq. 8-37, que pode ser escrita na forma $E_{mec,2} = E_{mec,1} - \Delta E_t$.

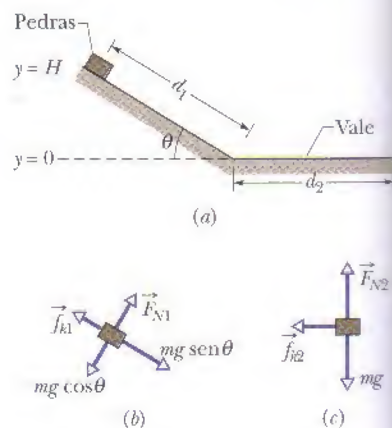


FIG. 8-19 (*a*) Trajetória de uma avalanche de pedra na encosta de uma montanha e em um vale vizinho. Forças que agem sobre uma pedra (*b*) na encosta da montanha e (*c*) no vale.

Cálculos: A energia mecânica final $E_{mec,2}$ é igual à energia mecânica inicial $E_{mec,1}$ menos a energia convertida em energia térmica, ΔE_t:

$$E_{mec,2} = E_{mec,1} - \Delta E_t. \quad (8\text{-}43)$$

Inicialmente as pedras possuem uma energia potencial $U = mgH$ e uma energia cinética $K = 0$; assim, a energia mecânica inicial é $E_{mec,1} = mgH$. Quando a avalanche termina (ou seja, quando as pedras param), as pedras possuem energia potencial $U = 0$ e energia cinética $K = 0$, de modo que $E_{mec,2} = 0$. A energia convertida em energia térmica é $\Delta E_{t,1} = f_{k1}d_1$ enquanto as pedras estão descendo a encosta e $\Delta E_{t,2} = f_{k2}d_2$ depois que as pedras chegam ao vale. Substituindo essas expressões na Eq. 8-43, obtemos

$$0 = mgH - f_{k1}d_1 - F_{k2}d_2. \quad (8\text{-}44)$$

De acordo com a Fig. 8-19*a*, $d_1 = H/(\text{sen}\ \theta)$. Para obter expressões para as forças de atrito cinético, usamos a Eq. 6-2 ($f_k = \mu_k F_N$). Como vimos no Capítulo 6, em um plano inclinado a força normal se opõe à componente $mg \cos \theta$ da força gravitacional (Fig. 8-19*b*). Por outro lado, como vimos no Capítulo 5, em uma superfície horizontal a força normal se opõe ao módulo completo mg da força gravitacional (Fig. 8-19*c*). Substituindo essas expressões na Eq. 8-44 e explicitando a razão d_2/H, temos:

$$0 = mgH - \mu_k(mg\cos\theta)\frac{H}{\text{sen}\,\theta} - \mu_k mgd_2$$

e

$$\frac{d_2}{H} = \left(\frac{1}{\mu_k} - \frac{1}{\tan\theta}\right). \quad (8\text{-}45)$$

Fazendo $\mu_k = 0{,}60$ e $\theta = 45°$, obtemos

$$\frac{d_2}{H} = 0{,}67. \quad \text{(Resposta)}$$

Comentários: Este resultado é típico para uma pequena avalanche. No caso de uma grande avalanche, porém, a razão d_2/H pode chegar a 20. Substituindo esta razão na Eq. 8-45 e explicitando o coeficiente de atrito cinético, obtemos $\mu_k = 0{,}05$. Os cientistas não compreendem por que uma grande avalanche de pedras irregulares pode ter um valor de μ_k comparável ao do gelo. Uma das hipóteses mais promissoras é a de que as pedras são continuamente levitadas por uma fina camada de pequenos detritos oscilantes e quase nunca entram em contato com a encosta da montanha ou o solo do vale até a avalanche parar.

Exemplo 8-9

Na Fig. 8-20*a* um bloco de 20 kg está prestes a colidir com uma mola no estado relaxado. Quando o bloco comprime a mola uma força de atrito cinético entre o bloco e o piso age sobre o bloco. A Fig. 8-20*b* mostra a energia cinética do bloco, $K(x)$, e a energia potencial da mola, $U(x)$, em função da posição x do bloco, enquanto a mola é comprimida. Qual é o coeficiente de atrito cinético, μ_k, entre o bloco e o piso?

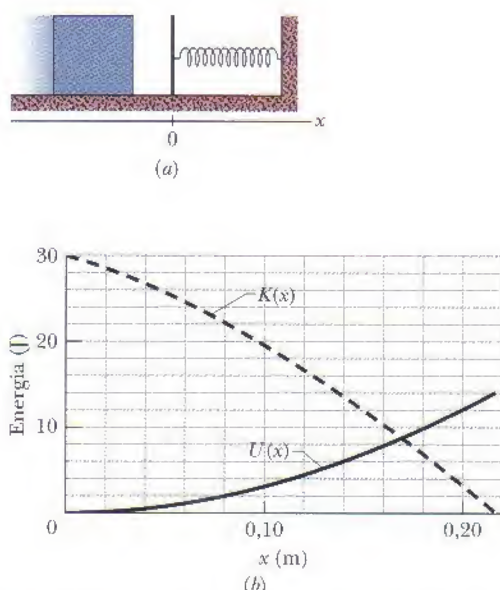


FIG. 8-20 (*a*) Bloco prestes a colidir com uma mola. (*b*) Variação da energia cinética K e da energia potencial U quando a mola é comprimida e o bloco é freado até parar.

IDÉIAS-CHAVE (1) A energia mecânica E_{mec} (= $K + U$) não é conservada durante a compressão porque a força de atrito, uma força dissipativa, age sobre o bloco, convertendo uma quantidade de energia ΔE_t em energia térmica do bloco e do piso. (2) A energia ΔE_t está relacionada ao módulo da força de atrito cinético e à distância percorrida pelo bloco através da Eq. 8-31 ($\Delta E_t = f_k d$). (3) A energia mecânica $E_{mec,2}$ em qualquer ponto durante a compressão está relacionada à energia mecânica inicial $E_{mec,1}$ e a E_t através da Eq. 8-37, que pode ser escrita na forma $E_{mec,2} = E_{mec,1} - \Delta E_t$.

Determinação de ΔE_t: De acordo com a Fig. 8-20*b*, quando o bloco está em $x = 0$, prestes a comprimir a mola, sua energia cinética é $K = 30$ J e a energia potencial da mola é $U = 0$. Assim, a soma de K e U é

$$E_{mec,1} = 30 \text{ J}.$$

A mola atinge a máxima compressão quando o bloco pára, ou seja, quando a energia cinética se anula. De acordo com a figura, isso acontece para $x \approx 0{,}215$ m, posição na qual $K = 0$ e $U = 14$ J. Assim, no ponto de parada a soma de K e U é

$$E_{mec,2} = 14 \text{ J}.$$

Para determinar a quantidade de energia convertida em energia térmica escrevemos $E_{mec,2} = E_{mec,1} - \Delta E_t$ como

$$14 \text{ J} = 30 \text{ J} - \Delta E_t$$

ou

$$\Delta E_t = 16 \text{ J}.$$

Determinação de μ_k: De acordo com a Eq. 6-2, a força de atrito cinético é dada por $f_k = \mu_k F_N$, onde a força nor-

mal é dada pela Eq. 5-14 ($F_N = mg$). Em nosso caso, a força de atrito f_k converte 16 J em energia térmica em uma distância d = 0,215 m, de acordo com a equação $\Delta E_t = f_k d$. Combinando várias expressões, obtemos

$$\Delta E_t = f_k d = \mu_k F_N d = \mu_k mgd$$

e substituímos os valores conhecidos ΔE_t = 16 J, m = 20 kg, g = 9,8 m/s e d = 0,215 para obter

$$\mu_k = 0{,}38. \quad \text{(Resposta)}$$

REVISÃO E RESUMO

Forças Conservativas Uma força é **conservativa** se o trabalho que realiza sobre uma partícula se anula ao longo de um percurso fechado. Podemos dizer também que uma força é conservativa se o trabalho que realiza sobre uma partícula que se move entre dois pontos não depende da trajetória seguida pela partícula. A força gravitacional e a força elástica são forças conservativas; a força de atrito cinético é uma **força dissipativa** (não-conservativa).

Energia Potencial **Energia potencial** é a energia associada à configuração de um sistema submetido à ação de uma força conservativa. Quando a força conservativa realiza um trabalho W sobre uma partícula do sistema, a variação ΔU da energia potencial do sistema é dada por

$$\Delta U = -W. \quad (8\text{-}1)$$

Se a partícula se desloca do ponto x_i para o ponto x_f, a variação de energia potencial do sistema é

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx. \quad (8\text{-}6)$$

Energia Potencial Gravitacional A energia potencial associada a um sistema constituído pela Terra e uma partícula próxima é chamada de **energia potencial gravitacional**. Se uma partícula se desloca de uma altura y_i para uma altura y_f, a variação da energia potencial gravitacional do sistema partícula-Terra é dada por

$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mg\,\Delta y. \quad (8\text{-}7)$$

Se o **ponto de referência** de uma partícula é tomado como sendo $y_i = 0$ e a energia potencial gravitacional correspondente do sistema é tomada como sendo $U_i = 0$, a energia potencial gravitacional U de uma partícula a uma altura y é dada por

$$U(y) = mgy. \quad (8\text{-}9)$$

Energia Potencial Elástica **Energia potencial elástica** é a energia associada ao estado de compressão ou distensão de um objeto elástico. No caso de uma mola que exerce uma força elástica $F = -kx$ quando sua extremidade livre sofre um deslocamento x, a energia potencial elástica é dada por

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2. \quad (8\text{-}11)$$

Na **configuração de referência**, quando a mola está no estado relaxado $x = 0$ e $U = 0$.

Energia Mecânica A **energia mecânica** E_{mec} de um sistema é a soma da energia cinética K e da energia potencial U do sistema:

$$E_{mec} = K + U. \quad (8\text{-}12)$$

Sistema isolado é um sistema no qual nenhuma *força externa* produz variações de energia. Se apenas forças conservativas realizam trabalho em um sistema isolado, a energia mecânica E_{mec} do sistema não pode variar. Este **princípio de conservação da energia mecânica** pode ser escrito na forma

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1, \quad (8\text{-}17)$$

onde os índices se referem a diferentes instantes de um processo de transferência de energia. Este princípio de conservação pode também ser escrito como

$$\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U = 0. \quad (8\text{-}18)$$

Curvas de Energia Potencial Se conhecemos a função energia potencial $U(x)$ de um sistema no qual uma força unidimensional $F(x)$ age sobre uma partícula, podemos determinar a força usando a equação

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}. \quad (8\text{-}22)$$

Se $U(x)$ é dada na forma de um gráfico, para qualquer valor de x a força $F(x)$ é o negativo da inclinação da curva no ponto considerado e a energia cinética da partícula é dada por

$$K(x) = E_{mec} - U(x), \quad (8\text{-}24)$$

onde E_{mec} é a energia mecânica do sistema. Um **ponto de retorno** é um ponto x no qual o movimento de uma partícula muda de sentido (nesse ponto, $K = 0$). A partícula se encontra em **equilíbrio** nos pontos onde a inclinação da curva de $U(x)$ é nula [nesses pontos, $F(x) = 0$)].

Trabalho Realizado sobre um Sistema por uma Força Externa O trabalho W é a energia transferida para um sistema ou de um sistema por uma força externa que age sobre o sistema. Quando mais de uma força externa age sobre o sistema, o *trabalho total* dessas forças é igual à energia transferida. Quando não existe atrito o trabalho realizado sobre o sistema e a variação ΔE_{mec} da energia mecânica do sistema são iguais:

$$W = \Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U. \quad (8\text{-}26, 8\text{-}25)$$

Quando uma força de atrito cinético age dentro do sistema, a energia térmica E_t do sistema varia. (Esta energia está associada ao movimento aleatório dos átomos e moléculas do sistema.) Nesse caso, o trabalho realizado sobre o sistema é dado por

$$W = \Delta E_{mec} + \Delta E_t. \quad (8\text{-}33)$$

A variação ΔE_t está relacionada ao módulo f_k da força de atrito e ao módulo d do deslocamento causado pela força externa através da equação

$$\Delta E_t = f_k d. \quad (8\text{-}31)$$

Conservação da Energia A **energia total** E de um sistema (a soma da energia mecânica e das energias internas, incluindo a energia térmica) só pode variar se uma certa quantidade de ener-

gia é transferida para o sistema ou retirada do sistema. Este fato experimental é conhecido como **lei de conservação da energia**. Se um trabalho W é realizado sobre o sistema,

$$W = \Delta E = \Delta E_{mec} + \Delta E_t + \Delta E_{int}. \quad (8\text{-}35)$$

Se o sistema é isolado ($W = 0$), isso nos dá

$$\Delta E_{mec} + \Delta E_t + \Delta E_{int} = 0 \quad (8\text{-}36)$$

e

$$E_{mec,2} = E_{mec,1} - \Delta E_t - \Delta E_{int}, \quad (8\text{-}37)$$

onde os índices 1 e 2 indicam dois instantes diferentes.

Potência A **potência** desenvolvida por uma força é a *taxa* com a qual essa força transfere energia. Se uma certa quantidade de energia ΔE é transferida por uma força em um certo intervalo de tempo Δt, a **potência média** desenvolvida pela força é dada por

$$P_{méd} = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \quad (8\text{-}40)$$

A **potência instantânea** desenvolvida por uma força é dada por

$$P = \frac{dE}{dt}. \quad (8\text{-}41)$$

PERGUNTAS

1 A Fig. 8-21 mostra um caminho direto e quatro caminhos indiretos do ponto i ao ponto f. Ao longo do caminho direto e de três dos caminhos indiretos apenas uma força conservativa F_c age sobre um certo objeto. Ao longo do quarto caminho indireto tanto F_c como uma força dissipativa F_d agem sobre o objeto. A variação ΔE_{mec} da energia mecânica do objeto (em joules) ao se deslocar de i para f está indicada ao lado de cada segmento dos caminhos indiretos. Qual é o valor de ΔE_{mec} (a) de i para f ao longo do caminho direto e (b) produzida por F_d ao longo do caminho em que essa força atua?

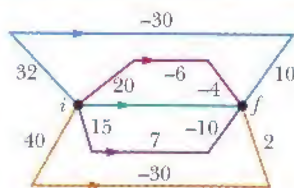


FIG. 8-21 Pergunta 1.

2 Na Fig. 8-22, um pequeno bloco, inicialmente em repouso, é liberado em uma rampa sem atrito a uma altura de 3,0 m. As alturas das elevações ao longo da rampa estão indicadas na figura. Os cumes das elevações são idênticos, de forma circular, e o bloco não perde contato com o piso em nenhuma das elevações. (a) Qual é a primeira elevação que o bloco não consegue superar? (b) O que acontece com o bloco em seguida? (c) No cume de qual elevação (c) a aceleração centrípeta do bloco é máxima e (d) a força normal sobre o bloco é mínima?

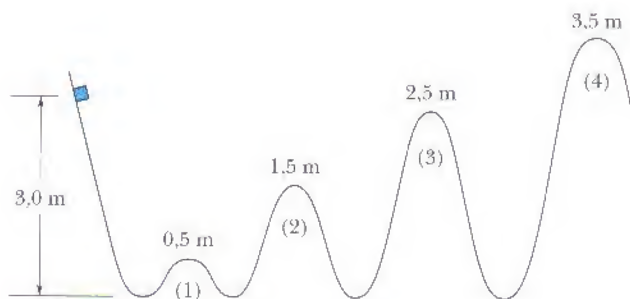


FIG. 8-22 Pergunta 2.

3 Na Fig. 8-23 um bloco que se move horizontalmente pode seguir três caminhos diferentes, que diferem apenas na altura, para chegar à linha de chegada tracejada. Ordene os caminhos de acordo (a) com a velocidade do bloco na linha de chegada e (b) o tempo de percurso do bloco até a linha de chegada, em ordem decrescente.

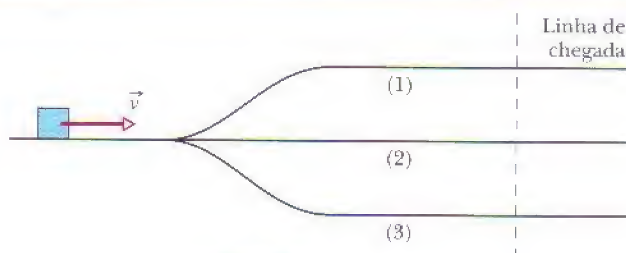


FIG. 8-23 Pergunta 3.

4 A Fig. 8-24 mostra a função energia potencial de uma partícula. (a) Ordene as regiões AB, BC, CD e DE de acordo com o módulo da força que atua sobre a partícula, em ordem decrescente. Qual é o maior valor permitido para a energia mecânica E_{mec} para que a partícula (b) fique aprisionada no poço de potencial da esquerda, (c) fique aprisionada no poço de potencial da direita e (d) seja capaz de se mover entre os dois poços, mas sem ultrapassar o ponto H? Para a situação do item (d), em qual das regiões BC, DE e FG a partícula possui (e) a maior energia cinética e (f) a menor velocidade?

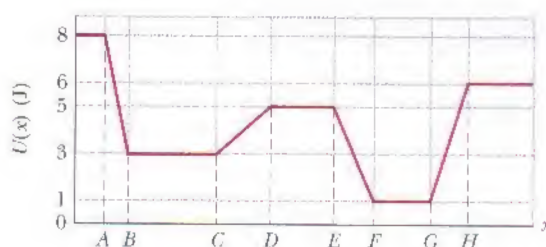


FIG. 8-24 Pergunta 4.

5 A Fig. 8-25 mostra três situações que envolvem um plano com atrito e um bloco que desliza ao longo do plano. O bloco começa com a mesma velocidade nas três situações e desliza até que a força de atrito cinético o faça parar. Ordene as situações de acordo com o aumento na energia térmica devido ao deslizamento, em ordem decrescente.

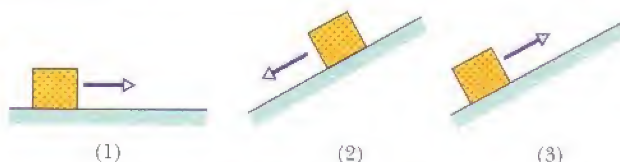


FIG. 8-25 Pergunta 5.

6 Na Fig. 8-26*a* você puxa para cima uma corda presa a um cilindro que desliza em relação a uma haste central. Como o cilindro e a haste se encaixam sem nenhuma folga, o atrito é considerável. A força que você aplica realiza um trabalho $W = +100$ J sobre o sistema cilindro-eixo-Terra (Fig. 8-26*b*). Um "inventário de energia" do sistema é mostrado na Fig. 8-26*c*: a energia cinética K aumenta de 50 J e a energia potencial gravitacional U_g aumenta de 20 J. A única outra variação da energia dentro do sistema é a da energia térmica E_t. Qual é a variação ΔE_t?

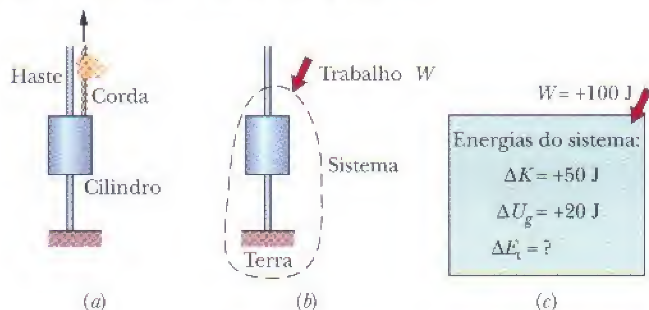


FIG. 8-26 Pergunta 6.

7 O arranjo da Fig. 8-27 é semelhante ao da pergunta 6. Agora, você puxa para baixo uma corda que está presa ao cilindro, que desliza com atrito em relação ao eixo central. Além disso, ao descer o cilindro puxa um bloco através de uma segunda corda e o faz deslizar em uma mesa de laboratório. Considere novamente o sistema cilindro-eixo-Terra, semelhante ao da Fig. 8-26*b*. O trabalho que você realiza sobre o sistema é 200 J. O sistema realiza um trabalho de 60 J sobre o bloco. Dentro do sistema, a energia cinética aumenta de 130 J e a energia potencial gravitacional diminui de 20 J. (a) Escreva um "inventário de energia" para o sistema, semelhante ao da Fig. 8-26*c*. (b) Qual é a variação da energia térmica dentro do sistema?

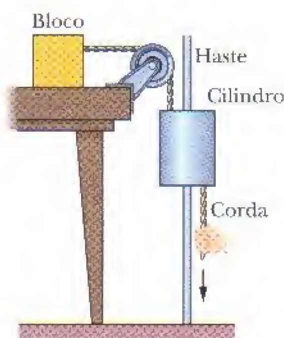


FIG. 8-27 Pergunta 7.

8 Na Fig. 8-28 um bloco desliza em uma pista que desce uma altura h. A pista não possui atrito, exceto na parte mais baixa. Nessa parte o bloco desliza até parar, devido ao atrito, depois de percorrer uma distância D. (a) Se diminuímos h, o bloco percorre uma distância maior, menor ou igual a D até parar? (b) Se, em vez disso, aumentamos a massa do bloco, a distância que o bloco percorre até parar é maior, menor ou igual a D?



FIG. 8-28 Pergunta 8.

9 Na Fig. 8-29 um bloco desliza de A para C em uma rampa sem atrito e então passa para uma região horizontal CD, onde está sujeito a uma força de atrito. A energia cinética do bloco aumenta, diminui ou permanece constante (a) na região AB, (b) na região BC e (c) na região CD? (d) A energia mecânica do bloco aumenta, diminui ou permanece constante nessas regiões?

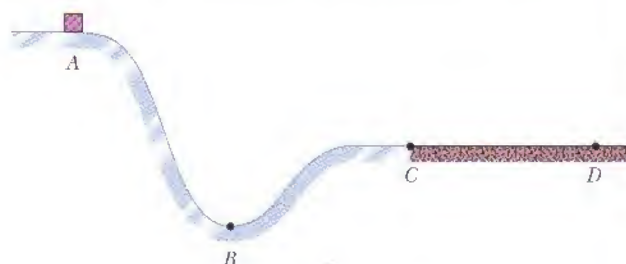


FIG. 8-29 Pergunta 9.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 8-4 Determinação de Valores de Energia Potencial

•1 Você deixa cair um livro de 2,00 kg para uma amiga que está na calçada, a uma distância $D = 10{,}0$ m abaixo de você. Se as mãos estendidas da sua amiga estão a uma distância $d = 1{,}5$ m acima do solo (Fig. 8-30), (a) qual é o trabalho W_g realizado sobre o livro pela força gravitacional até ele cair nas mãos da sua amiga? (b) Qual é a variação ΔU da energia potencial gravitacional do sistema livro-Terra durante a queda? Se a energia potencial gravitacional U do sistema é considerada nula no nível do solo, qual é o valor de U (c) quando você deixa cair o livro e (d) quando ele chega às mãos da sua amiga? Suponha agora que o valor de U é 100 J ao nível do solo e calcule novamente (e) W_g, (f) ΔU, (g) U no ponto onde você deixou cair o livro e (h) U no ponto em que chegou às mãos da sua amiga.

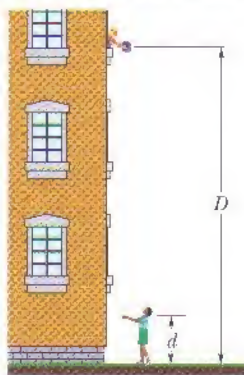


FIG. 8-30 Problemas 1 e 10.

•2 A Fig. 8-31 mostra uma bola de massa $m = 0{,}341$ kg presa à extremidade de uma haste fina de comprimento $L = 0{,}452$ m e massa desprezível. A outra extremidade da haste é articulada, de modo que a bola pode se mover em uma circunferência vertical. A haste é mantida na posição horizontal, como na figura, e depois empurrada para baixo com força suficiente para que a bola passe pelo ponto mais baixo da circunferência e continue em movimento até chegar ao ponto mais alto com velocidade nula. Qual é o trabalho realizado sobre a bola pela força gravitacional do ponto inicial até (a) o ponto mais baixo, (b) o ponto mais alto, (c) o ponto à direita na mesma



FIG. 8-31 Problemas 2 e 12.

altura que o ponto inicial? Se a energia potencial gravitacional do sistema bola-Terra é tomada como sendo zero no ponto inicial, determine o seu valor quando a bola atinge (d) o ponto mais baixo, (e) o ponto mais alto e (f) o ponto à direita na mesma altura que o ponto inicial. (g) Suponha que a haste tenha sido empurrada com mais força, de modo a passar pelo ponto mais alto com uma velocidade diferente de zero. A variação ΔU_g do ponto mais baixo ao ponto mais alto é maior, menor ou a mesma que quando a bola chegava ao ponto mais alto com velocidade zero?

•3 Na Fig. 8-32 um floco de gelo de 2,00 g é liberado na borda de uma taça hemisférica com 22,0 cm de raio. Não há atrito no contato do floco com a taça. (a) Qual é o trabalho realizado sobre o floco pela força gravitacional durante a sua descida até o fundo da taça? (b) Qual é a variação da energia potencial do sistema floco-Terra durante a descida? (c) Se essa energia potencial é tomada como sendo nula no fundo da taça, qual é seu valor quando o floco é solto? (d) Se, em vez disso, a energia potencial é tomada como sendo nula no ponto onde o floco é solto, qual é o seu valor quando o floco atinge o fundo da taça? (e) Se a massa do floco fosse duplicada, os valores das respostas dos itens de (a) a (d) aumentariam, diminuiriam ou permaneceriam os mesmos?



FIG. 8-32 Problemas 3 e 11.

•4 Na Fig. 8-33 um carro de montanha-russa de massa $m = 825$ kg atinge o cume da primeira elevação com uma velocidade $v_0 = 17,0$ m/s a uma altura $h = 42,0$ m. O atrito é desprezível. Qual é o trabalho realizado sobre o carro pela força gravitacional entre este ponto e (a) o ponto A, (b) o ponto B e (c) o ponto C? Se a energia potencial gravitacional do sistema carro-Terra é tomada como sendo nula em C, qual é o seu valor quando o carro está (d) em B e (e) em A? Se a massa m é duplicada, a variação da energia potencial gravitacional do sistema entre os pontos A e B aumenta, diminui ou permanece a mesma?

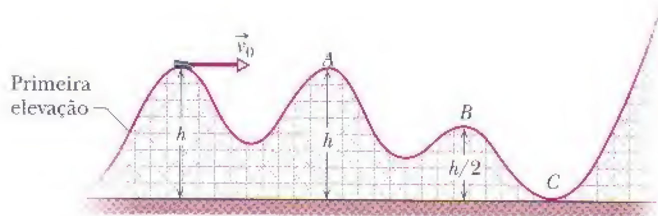


FIG. 8-33 Problemas 4 e 13.

•5 Qual é a constante elástica de uma mola que armazena 25 J de energia potencial ao ser comprimida 7,5 cm?

•6 Uma bola de neve de 1,5 kg é lançada de um penhasco de 12,5 m de altura. A velocidade inicial da bola de neve é 14,0 m/s, 41,0° acima da horizontal. (a) Qual é o trabalho realizado sobre a bola de neve pela força gravitacional durante o percurso até um terreno plano, abaixo do penhasco? (b) Qual é a variação da energia potencial do sistema bola-de-neve-Terra durante o percurso? (c) Se a energia potencial gravitacional é tomada como sendo nula na altura do penhasco, qual é o seu valor quando a bola de neve chega ao solo?

••7 A Fig. 8-34 mostra uma haste fina, de comprimento $L = 2,00$ m e massa desprezível, que pode girar em torno de uma das extremidades para descrever uma circunferência vertical. Uma bola de massa $m = 5,00$ kg está presa na outra extremidade. A haste é puxada lateralmente até fazer um ângulo $\theta_0 = 30,0°$ com a vertical e liberada com velocidade inicial $\vec{v}_0 = 0$. Quando a bola desce até o ponto mais baixo da circunferência, (a) qual é o trabalho realizado sobre ela pela força gravitacional e (b) qual é a variação da energia potencial do sistema bola-Terra? (c) Se a energia potencial gravitacional é tomada como sendo zero no ponto mais baixo da circunferência, qual é seu valor no momento em que a bola é liberada? (d) Os valores das respostas dos itens de (a) a (c) aumentam, diminuem ou permanecem os mesmos se o ângulo θ_0 é aumentado?

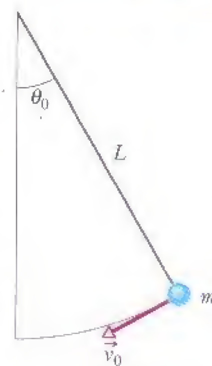


FIG. 8-34 Problemas 7, 16 e 17.

••8 Na Fig. 8-35 um pequeno bloco de massa $m = 0,032$ kg pode deslizar em uma pista sem atrito que forma um *loop* de raio $R = 12$ cm. O bloco é liberado a partir do repouso no ponto P, a uma altura $h = 5,0R$ acima do ponto mais baixo do *loop*. Qual é o trabalho realizado sobre o bloco pela força gravitacional enquanto o bloco se desloca do ponto P para (a) o ponto Q e (b) o ponto mais alto do *loop*? Se a energia potencial gravitacional do sistema bloco-Terra for tomada como nula na base do *loop*, quanto valerá essa energia potencial quando o bloco estiver (c) no ponto P, (d) no ponto Q e (e) no topo do *loop*? (f) Se, em vez de ser simplesmente liberado, o bloco recebe uma velocidade inicial dirigida para baixo ao longo da pista, as respostas dos itens de (a) até (e) aumentam, diminuem ou permanecem as mesmas?

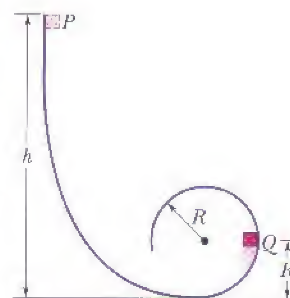


FIG. 8-35 Problemas 8 e 19.

seção 8-5 Conservação da Energia Mecânica

•9 Na Fig. 8-36 um caminhão perdeu os freios quando estava descendo uma ladeira a 130 km/h e o motorista dirigiu o veículo para uma rampa de emergência sem atrito com uma inclinação $\theta = 15°$. A massa do caminhão é $1,2 \times 10^4$ kg. (a) Qual é o menor comprimento L que a rampa deve ter para que o caminhão pare (momentaneamente) antes de chegar ao final? (Suponha que o caminhão pode ser tratado como uma partícula e justifique essa suposição.) O comprimento mínimo L aumenta, diminui ou permanece o mesmo (b) se a massa do caminhão for menor e (c) se a velocidade for menor?

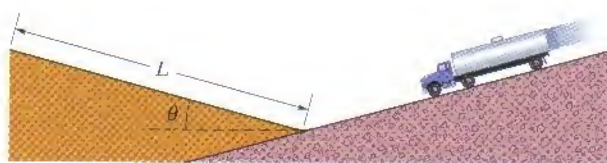


FIG. 8-36 Problema 9.

•10 (a) No Problema 1, qual é a velocidade do livro ao chegar às mãos da sua amiga? (b) Se o livro tivesse uma massa duas vezes maior, qual seria a velocidade? (c) Se o livro fosse arremessado para baixo, a resposta do item (a) aumentaria, diminuiria ou permaneceria a mesma?

•11 (a) No Problema 3, qual é a velocidade do floco de gelo ao chegar ao fundo da taça? (b) Se o floco de gelo tivesse o dobro da massa, qual seria a velocidade? (c) Se o floco de gelo tivesse uma velocidade inicial para baixo, a resposta do item (a) aumentaria, diminuiria ou permaneceria a mesma?

•12 (a) No Problema 2, qual deve ser a velocidade inicial da bola para que ela chegue ao ponto mais alto da circunferência com velocidade escalar zero? Nesse caso, qual é a velocidade da bola (b) no ponto mais baixo e (c) no ponto à direita na mesma altura que o ponto inicial? (d) Se a massa da bola fosse duas vezes maior, as respostas dos itens (a) a (c) aumentariam, diminuiriam ou permaneceriam as mesmas?

•13 No Problema 4, qual é a velocidade do carro (a) no ponto A, (b) no ponto B e (c) no ponto C? (d) Que altura o carro alcança na última elevação, que é alta demais para ser transposta? (e) Se o carro tivesse uma massa duas vezes maior, quais seriam as respostas dos itens (a) a (d)?

•14 (a) No Problema 6, usando técnicas de energia em vez das técnicas do Capítulo 4, determine a velocidade da bola de neve ao chegar ao solo. Qual seria essa velocidade (b) se o ângulo de lançamento fosse mudado para 41,0° *abaixo* da horizontal e (c) se a massa fosse aumentada para 2,50 kg?

•15 Uma bola de gude de 5,0 g é lançada verticalmente para cima usando uma espingarda de mola. A mola deve ser comprimida de exatamente 8,0 cm para que a bola alcance um alvo colocado 20 m acima da posição da bola de gude na mola comprimida. (a) Qual é a variação ΔU_g da energia potencial gravitacional do sistema bola de gude-Terra durante a subida de 20 m? (b) Qual é a variação ΔU_s da energia potencial elástica da mola durante o lançamento da bola de gude? (c) Qual é a constante elástica da mola?

••16 (a) No Problema 7, qual é a velocidade da bola no ponto mais baixo? (b) Essa velocidade aumenta, diminui ou permanece a mesma se a massa aumenta?

••17 A Fig. 8-34 mostra um pêndulo de comprimento L = 1,25 m. O peso do pêndulo (no qual está concentrada, para efeitos práticos, toda a sua massa) tem velocidade v_0 quando a corda faz um ângulo θ_0 = 40,0° com a vertical. (a) Qual é a velocidade do peso quando está em sua posição mais baixa se v_0 = 8,00 m/s? Qual é o menor valor de v_0 para que o pêndulo oscile para baixo e depois para cima (b) até a posição horizontal e (c) até a posição vertical com a corda esticada? (d) As respostas dos itens (b) e (c) aumentam, diminuem ou permanecem as mesmas se θ_0 aumentar de alguns graus?

••18 Um bloco de 700 g é liberado a partir do repouso de uma altura h_0 acima de uma mola vertical com constante elástica k = 400 N/m e massa desprezível. O bloco se choca com a mola e pára momentaneamente depois de comprimir a mola 19,0 cm. Qual é o trabalho realizado (a) pelo bloco sobre a mola e (b) pela mola sobre o bloco? (c) Qual é o valor de h_0? (d) Se o bloco fosse solto de uma altura $2{,}00h_0$ acima da mola, qual seria a máxima compressão da mola?

••19 No Problema 8, quais são os módulos das componentes (a) horizontal e (b) vertical da força *resultante* que atua sobre o bloco no ponto Q? (c) De que altura h o bloco deveria ser liberado, a partir do repouso, para ficar na iminência de perder contato com a superfície no alto do loop? (*Iminência de perder o contato* significa que a força normal exercida pelo loop sobre o bloco é nula nesse instante.) (d) Plote o módulo da força normal que age sobre o bloco no alto do loop em função da altura inicial h, para o intervalo de $h = 0$ a $h = 6R$.

••20 Uma única força conservativa $\vec{F} = (6{,}0x - 12)\hat{\mathrm{i}}$ N, onde x está em metros, age sobre uma partícula que se move ao longo de um eixo x. A energia potencial U associada a essa força recebe o valor de 27 J em $x = 0$. (a) Escreva uma expressão para U como uma função de x, com U em joules e x em metros. (b) Qual é o máximo valor positivo da energia potencial? Para que valor (c) negativo e (d) positivo de x a energia potencial é nula?

••21 A corda da Fig. 8-37, de comprimento L = 120 cm, possui uma bola presa em uma das extremidades e está fixa na outra extremidade. A distância d da extremidade fixa a um pino no ponto P é 75,0 cm. A bola, inicialmente em repouso, é liberada com o fio na posição horizontal, como mostra a figura, e percorre a trajetória indicada pelo arco tracejado. Qual é a velocidade da bola ao atingir (a) o ponto mais baixo da trajetória e (b) o ponto mais alto depois que a corda encosta no pino?

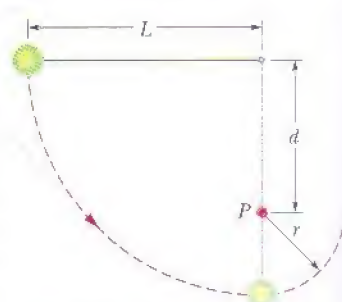


FIG. 8-37 Problemas 21 e 68.

••22 Um bloco de massa m = 2,0 kg é deixado cair de uma altura h = 40 cm sobre uma mola de constante elástica k = 1960 N/m (Fig. 8-38). Determine a variação máxima de comprimento da mola ao ser comprimida.

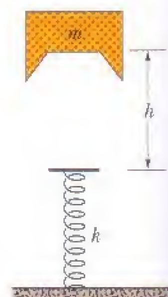


FIG. 8-38 Problema 22.

••23 Em $t = 0$ uma bola de 1,0 kg é atirada de uma torre com $\vec{v} = (18\text{ m/s})\hat{\mathrm{i}} + (24\text{ m/s})\hat{\mathrm{j}}$. Quanto é ΔU do sistema bola-Terra entre $t = 0$ e t = 6,0 s (ainda em queda livre)?

••24 Um esquiador de 60 kg parte do repouso a uma altura H = 20 m acima da extremidade de uma rampa para saltos de esqui (Fig. 8-39), e deixa a rampa fazendo um ângulo θ = 28° com a horizontal. Despreze os efeitos da resistência do ar e suponha que a rampa não tem atrito. (a) Qual é a altura máxima h do salto em relação à extremidade da rampa? (b) Se o esquiador aumentasse o próprio peso colocando uma mochila nas costas, h seria maior, menor ou igual?

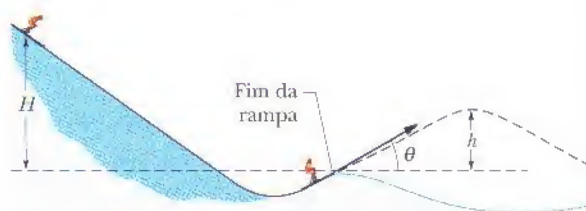


FIG. 8-39 Problema 24.

••25 Tarzan, que pesa 688 N, salta de um penhasco pendurado na extremidade de um cipó com 18 m de comprimento (Fig. 8-40). Do alto do penhasco até o ponto mais baixo de sua trajetória ele desce 3,2 m. O cipó se romperá se a força exercida sobre ele exceder 950 N. (a) O cipó se rompe? Se a resposta for negativa, qual é a maior força a que é submetido o cipó? Se a resposta for

afirmativa, qual é o ângulo que o cipó está fazendo com a vertical no momento em que se rompe?


FIG. 8-40 Problema 25.

••26 Um pêndulo é formado por uma pedra de 2,0 kg oscilando na extremidade de uma corda de 4,0 m de comprimento e massa desprezível. A pedra tem uma velocidade de 8,0 m/s ao passar pelo ponto mais baixo de sua trajetória. (a) Qual é a velocidade da pedra quando a corda forma um ângulo de 60° com a vertical? (b) Qual é o maior ângulo com a vertical que a corda assume durante o movimento da pedra? (c) Se a energia potencial do sistema pêndulo-Terra é tomada como sendo nula na posição mais baixa da pedra, qual é a energia mecânica total do sistema?

••27 A Fig. 8-41 mostra uma pedra de 8,00 kg em repouso sobre uma mola. A mola é comprimida de 10,0 cm pela pedra. (a) Qual é a constante elástica da mola? (b) A pedra é empurrada mais 30 cm para baixo e liberada. Qual é a energia potencial elástica da mola comprimida antes de ser liberada? (c) Qual é a variação da energia potencial gravitacional do sistema pedra-Terra quando a pedra se desloca do ponto onde foi liberada até a altura máxima? (d) Qual é essa altura máxima, medida a partir do ponto onde a pedra foi liberada?



FIG. 8-41 Problema 27.

••28 Uma caixa de pão de 2,0 kg sobre um plano inclinado sem atrito de ângulo $\theta = 40{,}0°$ está presa, por uma corda que passa por uma polia, a uma mola de constante elástica $k = 120$ N/m, como mostra a Fig. 8-42. A caixa é liberada a partir do repouso quando a mola se encontra relaxada. Suponha que a massa e o atrito da polia sejam desprezíveis. (a) Qual é a velocidade da caixa após percorrer 10 cm? (b) Que distância o bloco percorre do ponto em que foi liberado até o ponto em que pára momentaneamente, e quais são (c) o módulo e (d) o sentido (para cima ou para baixo ao longo do plano) da aceleração do bloco no instante em que pára momentaneamente?

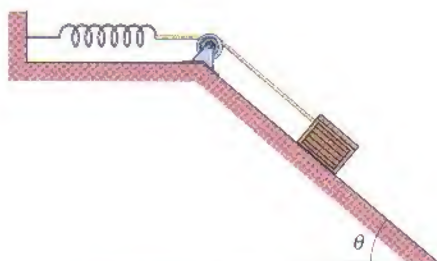


FIG. 8-42 Problema 28.

••29 Um bloco com massa m = 2,00 kg é apoiado em uma mola em um plano inclinado sem atrito de ângulo $\theta = 30{,}0°$ (Fig. 8-43). (O bloco não está preso à mola.) A mola, de constante elástica k = 19,6 N/cm, é comprimida de 20 cm e depois liberada. (a) Qual é a energia potencial elástica da mola comprimida? (b) Qual é a variação da energia potencial gravitacional do sistema bloco-Terra quando o bloco se move do ponto em que foi liberado até o ponto mais alto que atinge no plano inclinado? (c) Qual é a distância percorrida pelo bloco ao longo do plano inclinado até atingir esta altura máxima?

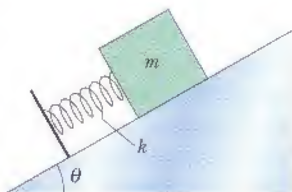
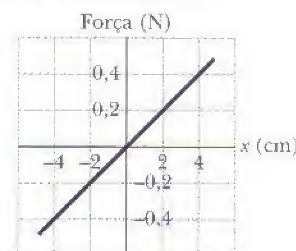


FIG. 8-43 Problema 29.

••30 A Fig. 8-44a se refere à mola de uma espingarda de rolha (Fig. 8-44b); ela mostra a força da mola em função da distensão ou compressão da mola. A mola é comprimida 5,5 cm e usada para impulsionar uma rolha de 3,8 g. (a) Qual é a velocidade da rolha se ela se separa da mola quando esta passa pela posição relaxada? (b) Suponha que, em vez disso, a rolha permaneça ligada à mola e a distenda 1,5 cm antes de ocorrer a separação. Qual é, nesse caso, a velocidade da rolha no momento da separação?



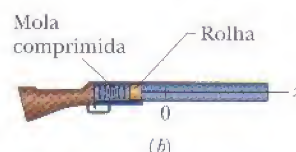


FIG. 8-44 Problema 30.

••31 Na Fig. 8-45 um bloco de massa m = 12 kg é liberado a partir do repouso em um plano inclinado de ângulo $\theta = 30°$. Abaixo do bloco há uma mola que pode ser comprimida 2,0 cm por uma força de 270 N. O bloco pára momentaneamente após comprimir a mola 5,5 cm. (a) Que distância o bloco desce ao longo do plano da posição de repouso inicial até o ponto em que pára momentaneamente? (b) Qual é a velocidade do bloco no momento em que entra em contato com a mola?

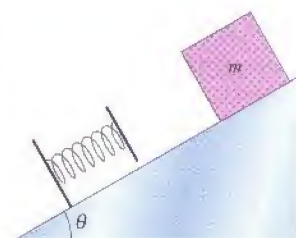


FIG. 8-45 Problemas 31 e 37.

••32 Na Fig. 8-46 uma corrente é mantida sobre uma mesa sem atrito com um quarto do comprimento pendurado fora da mesa. Se a corrente tem um comprimento L = 28 cm e massa m = 0,012 kg, qual é o trabalho necessário para puxar a parte pendurada de volta para cima da mesa?


FIG. 8-46 Problema 32.

••33 Na Fig. 8-47 uma mola com k = 170 N/m está presa no alto de um plano inclinado sem atrito de ângulo $\theta = 37{,}0°$. A extremidade inferior do plano inclinado está a uma distância D = 1,00 m da extremidade da mola, a qual se encontra relaxada. Uma lata de 2,00 kg é empurrada contra a mola até a mola ser comprimida 0,200 m e depois liberada a partir do repouso. (a) Qual é a velocidade da lata no instante que a mola retorna ao comprimento relaxado (que é o momento em que a lata perde contato com a mola)? (b) Qual é a velocidade da lata ao atingir a extremidade inferior do plano inclinado?

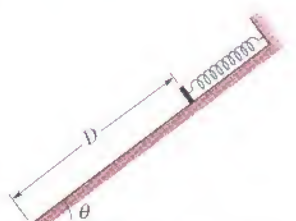


FIG. 8-47 Problema 33.

•••34 Duas crianças estão disputando um jogo no qual tentam acertar uma pequena caixa no chão com uma bola de gude lançada por um canhão de mola montado em uma mesa. A caixa está

a uma distância horizontal D = 2,20 m da borda da mesa; veja a Fig. 8-48. Bia comprime a mola 1,10 cm, mas o centro da bola de gude cai 27,0 cm antes do centro da caixa. De que distância Rosa deve comprimir a mola para acertar a caixa? Suponha que o atrito da mola e da bola com o canhão é desprezível.

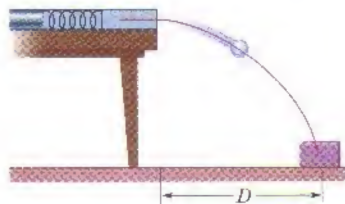


FIG. 8-48 Problema 34.

•••35 Uma corda uniforme com 25 cm de comprimento e 15 g de massa está presa horizontalmente em um teto. Mais tarde é pendurada verticalmente, com apenas uma das extremidades presa no teto. Qual é a variação da energia potencial da corda devido a esta mudança de posição? (*Sugestão:* Considere um trecho infinitesimal da corda e use uma integral.)

•••36 Um menino está inicialmente sentado no alto de um monte hemisférico de gelo de raio R = 13,8 m. Ele começa a deslizar para baixo com uma velocidade inicial desprezível (Fig. 8-49). Suponha que o atrito é desprezível. Em que altura o menino perde contato com o gelo?

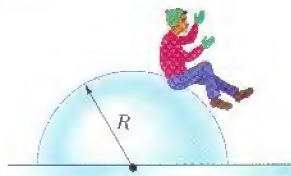


FIG. 8-49 Problema 36.

•••37 Na Fig. 8-45 um bloco de massa m = 3,20 kg desliza para baixo, a partir do repouso, percorre uma distância d em um plano inclinado de ângulo θ = 30,0° e se choca com uma mola de constante elástica 431 N/m. Quando o bloco pára momentaneamente, a mola fica comprimida 21,0 cm. Quais são (a) a distância d e (b) a distância entre o ponto do primeiro contato do bloco com a mola e o ponto onde a velocidade do bloco é máxima?

seção 8-6 Interpretação de uma Curva de Energia Potencial

••38 A energia potencial de uma molécula diatômica (um sistema de dois átomos, como H_2 ou O_2) é dada por

$$U = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6},$$

onde r é a distância entre os átomos da molécula e A e B são constantes positivas. Esta energia potencial está associada à força de ligação entre os dois átomos. (a) Determine a *distância de equilíbrio*, ou seja, a distância entre os átomos para a qual as forças a que os átomos estão submetidos é nula. A força é repulsiva ou atrativa se a distância é (b) menor e (c) maior que a distância de equilíbrio?

••39 A Fig. 8-50 mostra um gráfico da energia potencial U em função da posição x de uma partícula de 0,90 kg que pode se deslocar apenas ao longo de um eixo x. (Forças dissipativas não estão envolvidas.) Os três valores mostrados no gráfico são U_A = 15,0 J, U_B = 35,0 J e U_C = 45,0 J. A partícula é liberada em x = 4,5 m com uma velocidade inicial de 7,0 m/s, no sentido negativo de x. (a) Se a partícula puder chegar ao ponto x = 1,0 m, qual será sua velocidade nesse ponto? Se não puder, qual será o ponto de retorno? Quais são (b) o módulo e (c) a orientação da força experimentada pela partícula quando ela começa a se mover para a esquerda do ponto x = 4,0 m? Suponha que a partícula seja liberada no mesmo ponto e com a mesma velocidade, mas o sentido da velocidade seja o sentido positivo de x. (d) Se a partícula puder chegar ao ponto x = 7,0 m, qual será sua velocidade nesse ponto? Se não puder, qual será o ponto de retorno? Quais são (e) o módulo e (f) a orientação da força experimentada pela partícula quando ela começa a se mover para a direita do ponto x = 5,0 m?

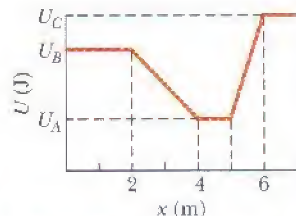


FIG. 8-50 Problema 39.

••40 A Figura 8-51 mostra um gráfico da energia potencial U em função da posição x para uma partícula de 0,200 kg que pode se deslocar apenas ao longo de um eixo x sob a influência de uma força conservativa. Três dos valores mostrados no gráfico são U_A = 9,00 J, U_C = 20,00 J e U_D = 24,00 J. A partícula é liberada no ponto onde U forma uma "barreira de potencial" de "altura" U_B = 12,00 J, com uma energia cinética de 4,00 J. Qual é a velocidade da partícula (a) em x = 3,5 m e (b) em x = 6,5 m? Qual é a posição do ponto de retorno (c) do lado direito e (d) do lado esquerdo?

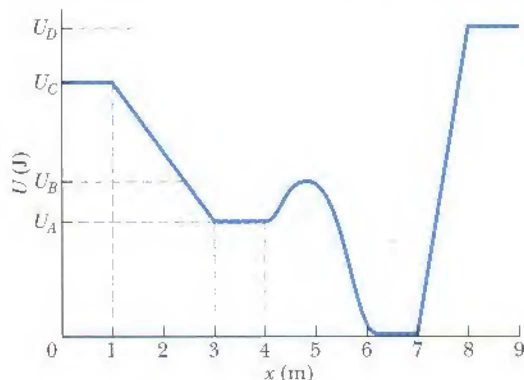


FIG. 8-51 Problema 40.

•••41 Uma única força conservativa $F(x)$ age sobre uma partícula de 1,0 kg que se move ao longo de um eixo x. A energia potencial $U(x)$ associada a $F(x)$ é dada por

$$U(x) = -4x\, e^{-x/4}\ \text{J},$$

onde x está em metros. Em x = 5,0 m a partícula possui uma energia cinética de 2,0 J. (a) Qual é a energia mecânica do sistema? (b) Faça um gráfico de $U(x)$ em função de x para $0 \le x \le 10$ m e plote, no mesmo gráfico, a reta que representa a energia mecânica do sistema. Use o gráfico do item (b) para determinar (c) o menor valor de x que a partícula pode atingir e (d) o maior valor de x que a partícula pode atingir. Use o gráfico do item (b) para determinar (e) a energia cinética máxima da partícula e (f) o valor de x para o qual a energia cinética atinge este valor. (g) Escreva uma expressão para $F(x)$, em newtons, em função de x, em metros. (h) $F(x)$ = 0 para que valor (finito) de x?

seção 8-7 Trabalho Realizado por uma Força Externa sobre um Sistema

•42 Um operário empurra um caixote de 27 kg, com velocidade constante, por 9,2 m ao longo de um piso plano, com uma força orientada 32° abaixo da horizontal. Se o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso é 0,20, quais são (a) o trabalho realizado pelo operário e (b) o aumento da energia térmica do sistema bloco-piso?

•43 Um collie arrasta a caixa de dormir em um piso, aplicando uma força horizontal de 8,0 N. O módulo da força de atrito cinético que age sobre a caixa é 5,0 N. Quando a caixa é arrastada por uma distância de 0,7 m, quais são (a) o trabalho realizado

pela força do cão e (b) o aumento de energia térmica da caixa e do piso?

••**44** Uma força horizontal de módulo 35,0 N empurra um bloco de massa 4,00 kg em um piso no qual o coeficiente de atrito cinético é 0,600. (a) Qual é o trabalho realizado por essa força sobre o sistema bloco-piso quando o bloco sofre um deslocamento de 3,00 m? (b) Durante esse deslocamento, a energia térmica do bloco aumenta de 40,0 J. Qual é o aumento da energia térmica do piso? (c) Qual é o aumento da energia cinética do bloco?

••**45** Uma corda é usada para puxar um bloco de 3,57 kg com velocidade constante, por 4,06 m, em um piso horizontal. A força que a corda exerce sobre o bloco é 7,68 N, 15,0° acima da horizontal. Quais são (a) o trabalho realizado pela força da corda, (b) o aumento na energia térmica do sistema bloco-piso e (c) o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso?

seção 8-8 Conservação da Energia

•**46** Um esquiador de 60 kg deixa a extremidade de uma rampa de salto de esqui com uma velocidade de 24 m/s 25° acima da horizontal. Suponha que, devido ao arrasto do ar, o esquiador retorna ao solo com uma velocidade de 22 m/s, aterrissando 14 m verticalmente abaixo da extremidade da rampa. Do início do salto até o retorno ao solo, de quanto a energia mecânica do sistema esquiador-Terra é reduzida devido ao arrasto do ar?

•**47** Um urso de 25 kg escorrega, a partir do repouso, 12 m para baixo em um tronco de pinheiro, movendo-se com uma velocidade de 5,6 m/s imediatamente antes de chegar ao chão. (a) Qual é a variação da energia potencial gravitacional do sistema urso-Terra durante o deslizamento? (b) Qual é a energia cinética do urso imediatamente antes de chegar ao chão? (c) Qual é a força de atrito média que age sobre o urso enquanto está escorregando?

•**48** Um jogador de beisebol arremessa uma bola com uma velocidade inicial de 81,8 mi/h. Imediatamente antes de um outro jogador segurar a bola na mesma altura sua velocidade é 110 pés/s. De quanto é reduzida, em pés-libras, a energia mecânica do sistema bola-Terra devido ao arrasto do ar? (A massa de uma bola de beisebol é de 9,0 onças.)

•**49** Um disco de plástico de 75 g é arremessado de um ponto 1,1 m acima do solo com uma velocidade escalar de 12 m/s. Quando o disco atinge uma altura de 2,1 m sua velocidade é de 10,5 m/s. Qual é a redução da E_{mec} do sistema disco-Terra devido ao arrasto do ar?

•**50** Na Fig. 8-52, um bloco desliza para baixo em um plano inclinado. Enquanto se move do ponto A para o ponto B, que estão separados por uma distância de 5,0 m, uma força $\vec{F}$, com módulo de 2,0 N e dirigida para baixo ao longo do plano inclinado, age sobre o bloco. O módulo da força de atrito que age sobre o bloco é 10 N. Se a energia cinética do bloco aumenta de 35 J entre A e B, qual é o trabalho realizado pela força gravitacional sobre o bloco enquanto ele se move de A até B?

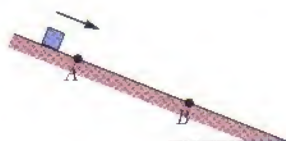


FIG. 8-52 Problemas 50 e 69.

•**51** Durante uma avalanche, uma pedra de 520 kg desliza a partir do repouso, descendo a encosta de uma montanha que tem 500 m de comprimento e 300 m de altura. O coeficiente de atrito cinético entre a pedra e a encosta é 0,25. (a) Se a energia potencial gravitacional U do sistema rocha-Terra é nula na base da montanha, qual é o valor de U imediatamente antes de começar a avalanche? (b) Qual é a energia transformada em energia térmica durante a avalanche? (c) Qual é a energia cinética da pedra ao chegar à base da montanha? (d) Qual é a velocidade da pedra nesse instante?

••**52** Você empurra um bloco de 2,0 kg contra uma mola horizontal, comprimindo-a 15 cm. Em seguida, solta o bloco e a mola o faz deslizar sobre uma mesa. O bloco pára depois de percorrer 75 cm a partir do ponto em que foi solto. A constante elástica da mola é 200 N/m. Qual é o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a mesa?

••**53** Na Fig. 8-53 um bloco desliza ao longo de uma pista, de um nível para outro mais elevado, passando por um vale intermediário. A pista não possui atrito até o bloco atingir o nível mais alto, onde uma força de atrito pára o bloco em uma distância d. A velocidade inicial v_0 do bloco é de 6,0 m/s, a diferença de altura h é 1,1 m e μ_k é 0,60. Determine d.

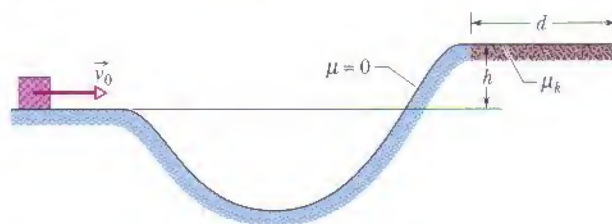


FIG. 8-53 Problema 53.

••**54** Um biscoito de mentira, deslizando em uma superfície horizontal, está preso a uma das extremidades de uma mola horizontal de constante elástica $k = 400$ N/m; a outra extremidade da mola está fixa. O biscoito possui uma energia cinética de 20,0 J ao passar pela posição de equilíbrio da mola. Enquanto o biscoito desliza, uma força de atrito de módulo 10,0 N age sobre ele. (a) Que distância o biscoito desliza a partir da posição de equilíbrio antes de parar momentaneamente? (b) Qual é a energia cinética do biscoito quando ele passa de volta pela posição de equilíbrio?

••**55** Na Fig. 8-54, um bloco de 3,5 kg é acelerado a partir do repouso por uma mola comprimida de constante elástica 640 N/m. O bloco deixa a mola no seu comprimento relaxado e se desloca em um piso horizontal com um coeficiente de atrito cinético $\mu_k = 0,25$. A força de atrito pára o bloco em uma distância $D = 7,8$ m. Determine (a) o aumento de energia térmica do sistema bloco-piso, (b) a energia cinética máxima do bloco e (c) o comprimento da mola quando estava comprimida.

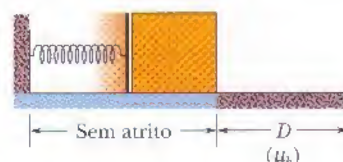


FIG. 8-54 Problema 55.

••**56** Um pacote de 4,0 kg começa a subir um plano inclinado de 30° com uma energia cinética de 128 J. Que distância ele percorre antes de parar, se o coeficiente de atrito cinético entre o pacote e o plano é 0,30?

••**57** Quando um besouro salta-martim está deitado de costas pode pular encurvando bruscamente o corpo, o que converte a energia armazenada em um músculo em energia mecânica, produzindo um estalo audível. O videoteipe de um desses pulos mostra que um besouro de massa $m = 4,0 \times 10^{-6}$ kg se desloca 0,77 mm na vertical durante um salto e consegue atingir uma altura máxima

h = 0,30 m. Durante o salto, quais são os valores médios dos módulos (a) da força externa exercida pelo piso sobre as costas do besouro e (b) da aceleração do besouro em unidades de g?

••58 Uma criança que pesa 267 N desce em um escorrega de 6,1 m que faz um ângulo de 20° com a horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre o escorrega e a criança é 0,10. (a) Qual é a energia transformada em energia térmica? (b) Se a criança começa a descida no alto do escorrega com uma velocidade de 0,457 m/s, qual é sua velocidade ao chegar ao chão?

••59 Na Fig. 8-55 um bloco de massa m = 2,5 kg desliza de encontro a uma mola de constante elástica k = 320 N/m. O bloco pára após comprimir a mola 7,5 cm. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso é 0,25. Enquanto o bloco está em contato com a mola e sendo levado ao repouso, determine (a) o trabalho realizado pela mola e (b) o aumento da energia térmica do sistema bloco-piso. (c) Qual é a velocidade do bloco imediatamente antes de se chocar com a mola?

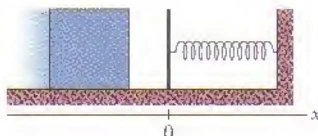


FIG. 8-55 Problema 59.

••60 Um pote de biscoitos está subindo um plano inclinado de 40°. Em um ponto a 55 cm da base do plano inclinado (medidos ao longo do plano) o pote possui uma velocidade de 1,4 m/s. O coeficiente de atrito cinético entre o pote e o plano inclinado é 0,15. (a) Que distância o pacote ainda sobe ao longo do plano? (b) Qual é a velocidade do bloco ao chegar novamente à base do plano inclinado? (c) As respostas dos itens (a) e (b) aumentam, diminuem ou permanecem as mesmas quando o coeficiente de atrito cinético é reduzido (sem alterar a velocidade e a posição do pote)?

••61 Uma pedra que pesa 5,29 N é lançada verticalmente a partir do nível do solo com uma velocidade inicial de 20,0 m/s, e o arrasto do ar sobre ela é de 0,265 N durante todo o percurso. Determine (a) a altura máxima alcançada pela pedra e (b) sua velocidade imediatamente antes de se chocar com o solo.

•••62 Na Fig. 8-56 um bloco é liberado a partir do repouso a uma altura d = 40 cm, desce uma rampa sem atrito e chega a um primeiro trecho plano, de comprimento d, onde o coeficiente de atrito cinético é 0,50. Se o bloco ainda está se movendo desce uma segunda rampa sem atrito, de altura $d/2$, e chega a um segundo trecho plano, onde o coeficiente de atrito cinético também é 0,50. Se o bloco ainda está se movendo sobe uma rampa sem atrito até parar (momentaneamente). Onde o bloco pára? Se a parada final é em um trecho plano, diga em qual deles e calcule a distância L que o bloco percorre a partir da extremidade esquerda desse platô. Se o bloco alcança a rampa, calcule a altura H acima do trecho plano mais baixo onde o bloco pára momentaneamente.

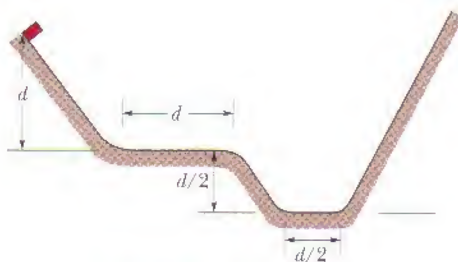


FIG. 8-56 Problema 62.

•••63 Uma partícula pode deslizar em uma pista com extremidades elevadas e uma parte central plana, como mostra a Fig. 8-57. A parte plana tem um comprimento L = 40 cm. Os trechos curvos da pista não possuem atrito, mas na parte plana o coeficiente de atrito cinético é μ_k = 0,20. A partícula é liberada a partir do repouso no ponto A, que está a uma altura $L/2$. A que distância da extremidade esquerda da parte plana a partícula finalmente pára?

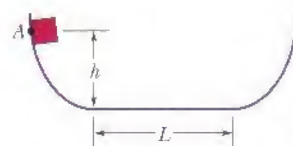


FIG. 8-57 Problema 63.

•••64 Na Fig. 8-58 um bloco desliza em uma pista sem atrito até chegar a um trecho de comprimento L = 0,75 cm, que começa a uma altura h = 2,0 m em uma rampa de ângulo θ = 30°. Nesse trecho o coeficiente de atrito cinético é 0,40. O bloco passa pelo ponto A com uma velocidade de 8,0 m/s. Se o bloco pode chegar ao ponto B (onde o atrito acaba), qual é sua velocidade nesse ponto e, se não pode, qual é a maior altura que atinge acima de A?

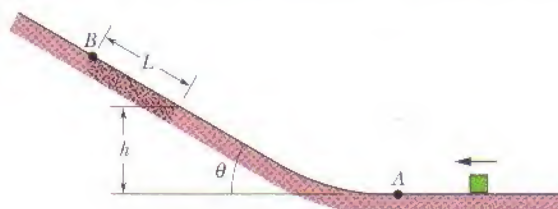


FIG. 8-58 Problema 64.

•••65 O cabo do elevador de 1800 kg da Fig. 8-59 se rompe quando o elevador está parado no primeiro andar, onde o piso se encontra a uma distância d = 3,7 m acima de uma mola de constante elástica k = 0,15 MN/m. Um dispositivo de segurança prende o elevador aos trilhos laterais, de modo que uma força de atrito constante de 4,4 kN passa a se opor ao movimento. (a) Determine a velocidade do elevador no momento em que se choca com a mola. (b) Determine a máxima redução x do comprimento da mola (a força de atrito continuar a agir enquanto a mola está sendo comprimida). (c) Determine a distância que o elevador sobe de volta no poço. (d) Usando a lei de conservação da energia, determine a distância total aproximada que o elevador percorre antes de parar. (Suponha que a força de atrito sobre o elevador é desprezível quando ele está parado.)

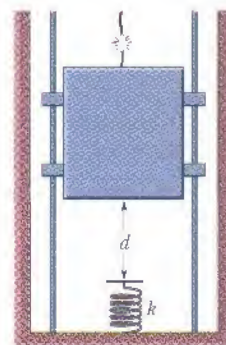


FIG. 8-59 Problema 65.

Problemas Adicionais

66 Em uma certa fábrica, caixotes de 300 kg são deixados cair verticalmente de uma máquina de empacotamento em uma esteira transportadora que se move a 1,20 m/s (Fig. 8-60). (Um motor mantém a velocidade da esteira constante.) O coeficiente de atrito cinético entre a esteira e cada caixote é 0,400. Após um pequeno intervalo de tempo deixa de haver deslizamento entre a esteira e o caixote, e este passa a se

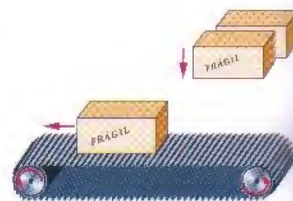


FIG. 8-60 Problema 66.

mover junto com a esteira. Durante o intervalo de tempo no qual o caixote está se movendo em relação à esteira, calcule, tomando como referência um sistema de coordenadas em repouso em relação à fábrica, (a) a energia cinética fornecida ao caixote, (b) o módulo da força de atrito cinético que age sobre o caixote e (c) a energia fornecida pelo motor. (d) Explique por que as respostas dos itens (a) e (c) são diferentes.

67 Um escorrega de parquinho tem a forma de um arco de circunferência com 12 m de raio. A altura do escorrega é $h = 4{,}0$ m e o chão é tangente à circunferência (Fig. 8-61). Uma criança de 25 kg escorrega do alto do brinquedo, a partir do repouso, e ao chegar ao chão está com uma velocidade de 6,2 m/s. (a) Qual é o comprimento do escorrega? (b) Qual é a força de atrito média que age sobre a criança? Se, em vez do solo, uma reta vertical passando pelo *alto do escorrega* é tangente à circunferência, quais são (c) o comprimento do escorrega e (d) a força de atrito média que age sobre a criança?

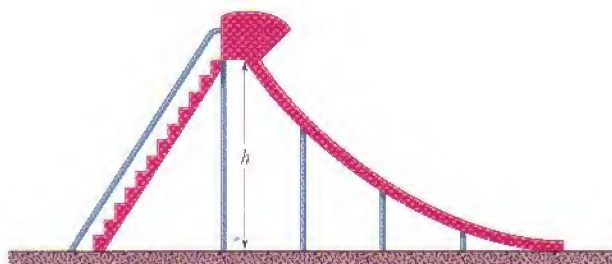


FIG. 8-61 Problema 67.

68 Na Fig. 8-37 a corda tem um comprimento $L = 120$ cm e possui uma bola presa em uma das extremidades, enquanto a outra está fixa. Existe um pino no ponto P. Liberada a partir do repouso, a bola desce até a corda tocar o pino; em seguida, a bola sobe e começa a girar em torno do pino. Qual é o menor valor da distância d para que a bola dê uma volta completa em torno do pino? (*Sugestão:* A bola deve ainda estar se movendo no ponto mais alto da volta. Você sabe por quê?)

69 Na Fig. 8-52 um bloco desce uma rampa sem atrito com uma certa velocidade inicial. Sua velocidade nos pontos A e B é de 2,00 m/s e 2,60 m/s, respectivamente. Em seguida, ele é novamente lançado para baixo, mas dessa vez sua velocidade no ponto A é 4,00 m/s. Qual é sua velocidade no ponto B?

70 Uma certa mola *não obedece* à lei de Hooke. A força (em newtons) que ela exerce quando está distendida de um comprimento x (em metros) tem um módulo de $52{,}8x + 38{,}4x^2$ e um sentido oposto ao da força responsável pela distensão. (a) Calcule o trabalho necessário para distender a mola de $x = 0{,}500$ m para $x = 1{,}00$ m. (b) Com uma das extremidades da mola fixa, uma partícula de massa 2,17 kg é presa à outra extremidade da mola quando ela está distendida de uma distância $x = 1{,}00$ m. Se a partícula é liberada a partir do repouso, qual é sua velocidade no instante em que a distensão da mola é de $x = 0{,}500$ m? (c) A força exercida pela mola é conservativa ou não-conservativa? Justifique sua resposta.

71 Um operário de uma fábrica deixa cair acidentalmente um caixote de 180 kg que estava sendo mantido em repouso no alto de uma rampa de 3,7 m de comprimento que está inclinada 39° em relação à horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre o caixote e a rampa e entre o caixote e o piso horizontal da fábrica é 0,28. (a) Qual é a velocidade do caixote ao chegar ao final da rampa? (b) Que distância adicional o caixote percorre no piso? (Suponha que a energia cinética do caixote não se altera quando ele passa da rampa para o piso.) (c) As respostas dos itens (a) e (b) aumentam, diminuem ou permanecem as mesmas se a massa do caixote é reduzida à metade?

72 Na Fig. 8-62 um pequeno bloco parte do ponto A com uma velocidade de 7,0 m/s. Seu percurso é sem atrito até chegar ao trecho de comprimento $L = 12$ m, onde o coeficiente de atrito cinético é de 0,70. As alturas indicadas são $h_1 = 6{,}0$ m e $h_2 = 2{,}0$ m. Qual é a velocidade do bloco (a) no ponto B e (b) no ponto C? (c) O bloco atinge o ponto D? Caso a resposta seja afirmativa, determine a velocidade do bloco nesse ponto; caso a resposta seja negativa, calcule a distância que o bloco percorre na parte com atrito.

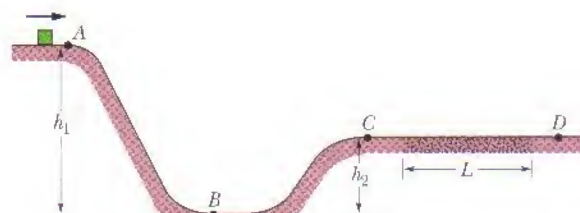


FIG. 8-62 Problema 72.

73 Uma lata de refrigerante de 2,50 kg é lançada diretamente para baixo de uma altura de 4,00 m, com uma velocidade inicial de 3,00 m/s. O arrasto do ar sobre a lata é desprezível. Qual é a energia cinética da lata (a) quando chega ao solo no final de sua queda e (b) quando se encontra a meio caminho do solo? Quais são (c) a energia cinética da lata e (d) a energia potencial gravitacional do sistema lata-Terra 0,200 s antes de a lata chegar ao solo? Tome o ponto de referência $y = 0$ como sendo o solo.

74 Uma bola de aniversário cheia d'água, com uma massa de 1,50 kg, é lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 3,00 m/s. (a) Qual é a energia cinética da bola no momento em que é lançada? (b) Qual é o trabalho realizado pela força gravitacional sobre a bola durante toda a subida? (c) Qual é a variação da energia potencial gravitacional do sistema bola-Terra durante a subida? (d) Se a energia potencial gravitacional é tomada como sendo nula no ponto de lançamento, qual é seu valor quando a bola chega à altura máxima? (e) Se a energia potencial gravitacional é considerada nula na sua altura máxima, qual é seu valor no ponto do lançamento? (f) Qual é a altura máxima?

75 Na Fig. 8-63 a polia tem massa desprezível e tanto ela como o plano inclinado não possuem atrito. O bloco A tem uma massa de 1,0 kg, o bloco B tem uma massa de 2,0 kg e o ângulo θ é 30°. Se os blocos são liberados a partir do repouso com o fio que os conecta esticado, qual é a energia cinética total após o bloco B ter descido 25 cm?

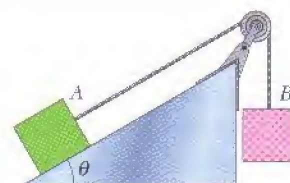


FIG. 8-63 Problema 75.

76 Um projétil de 0,55 kg é lançado da borda de um penhasco com uma energia cinética inicial de 1550 J. A maior distância vertical para cima que o projétil atinge em relação ao ponto de lançamento é +140 m. Quais são as componentes (a) horizontal e (b) vertical da velocidade de lançamento? (c) No instante em que a componente vertical da velocidade é 65 m/s, qual é o deslocamento vertical em relação ao ponto de lançamento?

77 A única força que age sobre uma partícula é a força conservativa $\vec{F}$. Se a partícula está no ponto A, a energia potencial do sistema associada a $\vec{F}$ e à partícula é 40 J. Se a partícula se move do ponto A para o ponto B, o trabalho realizado por $\vec{F}$ sobre a partícula é +25 J. Qual é a energia potencial do sistema com a partícula no ponto B?

78 Uma força horizontal constante faz um baú de 50 kg subir 6,0 m em um plano inclinado de 30° com velocidade constante. O coeficiente de atrito cinético entre o baú e o plano inclinado é 0,20. Quais são (a) o trabalho realizado pela força e (b) o aumento da energia térmica do baú e do plano inclinado?

79 Dois blocos, de massas M = 2,0 kg e $2M$, estão ligados a uma mola de constante elástica k = 200 N/m que tem uma das extremidades fixa, como mostra a Fig. 8-64. A superfície horizontal e a polia não possuem atrito, e a polia tem massa desprezível. Os blocos são liberados a partir do repouso com a mola na posição relaxada. (a) Qual é a energia cinética total dos dois blocos após o bloco que está pendurado ter descido 0,090 m? (b) Qual é a energia cinética do bloco pendurado depois de descer 0,090 m? (c) Qual é a distância que o bloco pendurado percorre antes de parar momentaneamente pela primeira vez?

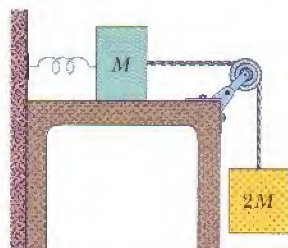


FIG. 8-64 Problema 79.

80 Uma corrente de cinzas vulcânicas está se movendo em solo horizontal quando encontra uma subida de 10°. A corrente sobe 920 m antes de parar. Suponha que os gases aprisionados fazem as cinzas flutuarem, tornando assim desprezível a força de atrito exercida pelo solo; suponha também que a energia mecânica da corrente é conservada. Qual era a velocidade inicial da corrente?

81 Uma banana de 0,50 kg é arremessada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 4,0 m/s e alcança uma altura máxima de 0,80 m. Qual é a variação da energia mecânica do sistema banana-Terra causada pelo arrasto do ar durante a subida?

82 Se um jogador de beisebol de 70 kg chega a uma base depois de escorregar pelo chão com uma velocidade inicial de 10 m/s, (a) qual é o decréscimo da energia cinética do jogador e (b) qual é o aumento da energia térmica do seu corpo e do chão no qual está escorregando?

83 Uma mola (k = 200 N/m) está presa no alto de um plano inclinado sem atrito com θ = 40° (Fig. 8-65). Um bloco de 1,0 kg é lançado para cima ao longo do plano, de uma posição inicial que está a uma distância d = 0,60 m da extremidade da mola relaxada, com uma energia cinética inicial de 16 J. (a) Qual é a energia cinética do bloco no instante em que comprime a mola 0,20 m? (b) Com que energia cinética o bloco deve ser lançado ao longo do plano para que fique momentaneamente parado depois de ter comprimido a mola 0,40 m?

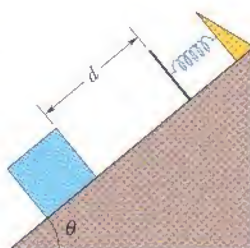


FIG. 8-65 Problema 83.

84 Uma preguiça de 3,2 kg está pendurada em uma árvore, 3,0 m acima do solo. (a) Qual é a energia potencial gravitacional do sistema preguiça-Terra se tomarmos o ponto de referência y = 0 como sendo o nível do solo? Se a preguiça cai da árvore e o arrasto do ar é desprezível, quais são (b) a energia cinética e (c) a velocidade da preguiça no momento em que chega ao solo?

85 Uma máquina puxa um tronco de árvore de 40 kg 2,0 m para cima em uma rampa de 40° com velocidade constante, com a força da máquina paralela à rampa. O coeficiente de atrito cinético entre o tronco e a rampa é 0,40. Quais são (a) o trabalho realizado sobre o tronco pela força da máquina e (b) o aumento da energia térmica do tronco e da rampa?

86 O transatlântico de luxo *Queen Elizabeth 2* possui uma central elétrica a diesel com uma potência máxima de 92 MW a uma velocidade de cruzeiro de 32,5 nós. Que força propulsora é exercida sobre o navio a esta velocidade? (1 nó = 1,852 km/h).

87 A temperatura de um cubo de plástico é medida enquanto o cubo é empurrado 3,0 m em um piso, com velocidade constante, por uma força horizontal de 15 N. As medidas revelam que a energia térmica do cubo aumentou 20 J. Qual foi o aumento da energia térmica do piso ao longo do qual o cubo deslizou?

88 Dois picos nevados estão H = 850 m e h = 750 m acima do vale que os separa. Uma pista de esquiação liga os dois picos, com um comprimento total de 3,2 km e uma inclinação média θ = 30° (Fig. 8-66). (a) Um esquiador parte do repouso no cume do monte mais alto. Com que velocidade ele chega ao cume do monte mais baixo se não usar os bastões para dar impulso? Ignore o atrito. (b) Qual é o valor aproximado do coeficiente de atrito cinético entre a neve e os esquis para que o esquiador pare exatamente no cume do monte mais baixo?



FIG. 8-66 Problema 88.

89 Um nadador se desloca na água a uma velocidade média de 0,22 m/s. A força de arrasto média é 110 N. Que potência média o nadador está desenvolvendo?

90 Um automóvel com passageiros pesa 16 400 N e está se movendo a 113 km/h quando o motorista pisa bruscamente no freio, bloqueando as rodas. A força de atrito exercida pela estrada sobre as rodas tem um módulo de 8230 N. Determine a distância que o automóvel percorre até parar.

91 Uma bola de 0,63 kg, atirada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 14 m/s, atinge uma altura máxima de 8,1 m. Qual é a variação da energia mecânica do sistema bola-Terra durante a subida da bola até a altura máxima?

92 O cume do monte Everest está 8850 m acima do nível do mar. (a) Qual seria a energia gasta por um alpinista de 90 kg para escalar o monte Everest a partir do nível do mar, se a única força que tivesse que vencer fosse a força gravitacional? (b) Quantas barras de chocolate, a 1,25 MJ por barra, supririam essa energia? A resposta mostra que o trabalho usado para vencer a força gravitacional é uma fração muito pequena da energia necessária para escalar uma montanha.

93 Um velocista que pesa 670 N corre os primeiros 7,0 m de uma prova em 1,6 s, partindo do repouso e acelerando uniformemente. Quais são (a) a velocidade e (b) a energia cinética do velocista ao final dos 1,6 s? (c) Qual é a potência média desenvolvida pelo velocista durante o intervalo de 1,6 s?

94 Na Fig. 8-67 um bloco de granito de 1400 kg é puxado para cima em um plano inclinado com uma velocidade constante de 1,34 m/s por um cabo e um guincho. As distâncias indicadas são $d_1 = 40$ m e $d_2 = 30$ m. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano inclinado é 0,40. Qual é a potência desenvolvida pela força aplicada ao bloco pelo cabo?

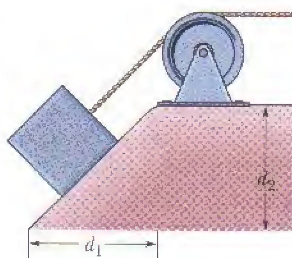


FIG. 8-67 Problema 94.

95 Uma bola de neve de 1,5 kg é atirada para cima em um ângulo de 34,0° com a horizontal e com uma velocidade inicial de 20,0 m/s. (a) Qual é a energia cinética inicial da bola? (b) De quanto varia a energia potencial gravitacional do sistema bola-Terra quando a bola se move do ponto de lançamento até o ponto de altura máxima? (c) Qual é a altura máxima?

96 Um objeto de 20 kg sofre a ação de uma força conservativa dada por $F = -3{,}0x - 5{,}0x^2$, com F em newtons e x em metros. Tome a energia potencial associada a essa força como sendo nula quando o objeto está em $x = 0$. (a) Qual é a energia potencial associada a essa força quando o objeto está em $x = 2{,}0$ m? (b) Se o objeto possui uma velocidade de 4,0 m/s no sentido negativo do eixo x quando está em $x = 5{,}0$ m, qual é sua velocidade ao passar pela origem? (c) Quais são as respostas dos itens (a) e (b) se a energia potencial do sistema é tomada como sendo $-8{,}0$ J quando o objeto está em $x = 0$?

97 Um projétil de 9,40 kg é lançado verticalmente para cima. O arrasto do ar diminui a energia mecânica do sistema projétil-Terra de 68,0 kJ durante a subida do projétil. Que altura a mais o projétil teria alcançado se o arrasto do ar fosse desprezível?

98 Uma ferramenta de metal é afiada sendo pressionada contra uma pedra de amolar giratória por uma força de 180 N. As forças de atrito entre a pedra de amolar e a ferramenta removem pequenos fragmentos da ferramenta. A pedra de amolar tem um raio de 20,0 cm e gira a 2,50 rev/s. O coeficiente de atrito cinético entre a pedra de amolar e a ferramenta é 0,320. A que taxa a energia está sendo transferida do motor que faz a pedra girar para a energia térmica da pedra e da ferramenta e para a energia cinética dos fragmentos removidos da ferramenta?

99 Uma mola com uma constante elástica de 3200 N/m é distendida até que a energia potencial elástica seja 1,44 J. ($U = 0$ para a mola relaxada.) Quanto é ΔU se a distensão muda para (a) uma distensão de 2,0 cm, (b) uma compressão de 2,0 cm e (c) uma compressão de 4,0 cm?

100 A mola de uma espingarda de brinquedo tem uma constante elástica de 700 N/m. Para atirar uma bola a mola é comprimida e a bola é introduzida no cano da espingarda. O gatilho libera a mola, que empurra a bola. A bola perde contato com a mola exatamente ao sair do cano. Quando a espingarda é inclinada para cima em um ângulo de 30° com a horizontal uma bola de 57 g atinge uma altura máxima de 1,83 m acima da ponta do cano. Suponha que o arrasto do ar sobre a bola é desprezível. (a) Com que velocidade a mola lança a bola? (b) Supondo que o atrito da bola dentro do cano da pistola seja desprezível, determine a compressão inicial da mola.

101 Uma artista de circo de 60,0 kg escorrega 4,00 m a partir do repouso, descendo do alto de um poste até o chão. Qual é a energia cinética da artista ao chegar ao chão se a força de atrito que o poste exerce sobre ela (a) é desprezível (ela irá se machucar) e (b) tem um módulo de 500 N?

102 Em 1981, Daniel Goodwin escalou 443 m pela *fachada* do Edifício Sears, em Chicago, com o auxílio de ventosas e grampos de metal. (a) Estime a massa do alpinista e calcule a energia biomecânica (interna) transferida para a energia potencial gravitacional do sistema Goodwin-Terra durante a escalada. (b) Quanta energia seria preciso transferir se ele tivesse subido até a mesma altura pelo interior do prédio, usando as escadas?

103 Uma bala de revólver de 30 g, movendo-se com uma velocidade horizontal de 500 m/s, pára depois de penetrar 12 cm em uma parede. (a) Qual é a variação da energia mecânica da bala? (b) Qual é a intensidade da força média exercida pela parede para fazer a bala parar?

104 A resistência ao movimento de um automóvel é constituída pelo atrito da estrada, que é quase independente da velocidade, e o arrasto do ar, que é proporcional ao quadrado da velocidade. Para um certo carro com um peso de 12 000 N a força de resistência total F é dada por $F = 300 + 1{,}8v^2$, com F em newtons e v em metros por segundo. Calcule a potência (em horsepower) necessária para acelerar o carro a 0,92 m/s² quando a velocidade é de 80 km/h.

105 Uma locomotiva com uma potência de 1,5 MW pode acelerar um trem de uma velocidade de 10 m/s para 25 m/s em 6,0 min. (a) Calcule a massa do trem. Determine, em função do tempo (em segundos), (b) a velocidade do trem e (c) a força que acelera o trem durante o intervalo de 6,0 min. (d) Determine a distância percorrida pelo trem durante esse intervalo.

106 Um bloco de 5,0 kg é projetado para cima em um plano inclinado de 30° com uma velocidade de 5,0 m/s. Que distância o bloco percorre (a) se o plano não possui atrito e (b) se o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é 0,40? (c) No último caso, qual é o aumento da energia térmica do bloco e do plano durante a subida do bloco? (d) Se o bloco desce de volta submetido à força de atrito, qual é a velocidade do bloco quando chega ao ponto de onde foi projetado?

107 Um bloco de 20 kg sobre uma superfície horizontal está preso a uma mola horizontal de constante elástica $k = 4{,}0$ kN/m. O bloco é puxado para a direita até a mola ficar distendida 10 cm em relação ao comprimento no estado relaxado, e depois liberado a partir do repouso. A força de atrito entre o bloco em movimento e a superfície tem um módulo de 80 N. (a) Qual é a energia cinética do bloco após ter-se movido 2,0 cm em relação ao ponto em que foi liberado? (b) Qual é a energia cinética do bloco quando volta pela primeira vez ao ponto no qual a mola está relaxada? (c) Qual é a máxima energia cinética atingida pelo bloco enquanto desliza do ponto em que foi liberado até o ponto em que a mola está relaxada?

108 Um homem de 70,0 kg pula de uma janela e vai cair em uma rede de salvamento dos bombeiros, 11,0 m abaixo da janela. Ele pára momentaneamente, após a rede ter esticado 1,50 m. Supondo que a energia mecânica é conservada durante esse processo e que a rede se comporta como uma mola ideal, determine a energia potencial elástica da rede quando está esticada 1,50 m.

109 Para formar um pêndulo, uma bola de 0,092 kg é presa em uma das extremidades de uma haste de 0,62 m de comprimento e massa desprezível; a outra extremidade da haste é montada em um eixo. A haste é levantada até a bola ficar verticalmente acima do eixo e liberada a partir do repouso. Quando a bola atinge o ponto mais baixo, quais são (a) a velocidade da bola e (b) a ten-

são da haste? Em seguida, a haste é colocada na horizontal e liberada a partir do repouso. (c) Para que ângulo em relação à vertical a tensão da haste é igual ao peso da bola? (d) Se a massa da bola aumenta, a resposta do item (c) aumenta, diminui ou permanece a mesma?

110 Uma esquiadora que pesa 600 N passa pelo alto de um monte circular sem atrito de raio $R = 20$ m (Fig. 8-68). Suponha que os efeitos da resistência do ar sejam desprezíveis. Enquanto a esquiadora está subindo sua velocidade é de 8,0 m/s no ponto B, onde o ângulo é $\theta = 20°$. (a) Qual é a velocidade da esquiadora no alto do monte (ponto A), se ela esquia sem usar os bastões? (b) Qual a menor velocidade que ela pode ter em B para que chegar ao alto do monte? (c) As respostas dessas duas perguntas aumentam, diminuem ou permanecem as mesmas se a esquiadora pesa 700 N?

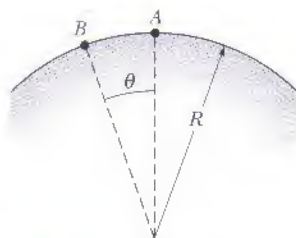


FIG. 8-68 Problema 110.

111 Uma bola de 50 g é lançada de uma janela com uma velocidade inicial de 8,0 m/s e com um ângulo de 30° acima da horizontal. Usando a lei de conservação da energia, determine (a) a energia cinética da bola no ponto mais alto da trajetória e (b) sua velocidade quando está 3,0 m abaixo da janela. A resposta do item (b) depende (c) da massa da bola ou (d) do ângulo de lançamento?

112 Um pára-quedista de 68 kg cai com uma velocidade terminal constante de 59 m/s. (a) A que taxa a energia potencial gravitacional do sistema Terra-pára-quedista está sendo reduzida? (b) A que taxa a energia mecânica do sistema está sendo reduzida?

113 Uma corredeira em um rio envolve uma descida de 15 m. A velocidade da água é de 3,2 m/s no início da corredeira e 13 m/s no final. Que porcentagem da energia potencial gravitacional do sistema água-Terra é transferida para energia cinética durante a descida da água? (*Sugestão:* Considere a descida de, por exemplo, 10 kg de água.)

114 O módulo da força gravitacional entre uma partícula de massa m_1 e uma partícula de massa m_2 é dado por

$$F(x) = G\frac{m_1 m_2}{x^2},$$

onde G é uma constante e x é a distância entre as partículas. (a) Qual é a função energia potencial $U(x)$? Suponha que $U(x) \to 0$ quando $x \to \infty$ e que x é positivo. (b) Qual é o trabalho necessário para aumentar a distância entre as partículas de $x = x_1$ para $x = x_1 + d$?

115 Aproximadamente $5{,}5 \times 10^6$ kg de água caem das cataratas do Niágara por segundo. (a) Qual é o decréscimo da energia potencial gravitacional do sistema água-Terra por segundo? (b) Se toda essa energia pudesse ser convertida em energia elétrica (isso não é possível), a que taxa a energia elétrica seria produzida? (A massa de 1 m^3 de água é de 1000 kg.) (c) Se a energia elétrica fosse vendida a 1 centavo de dólar/kW · h, qual seria a receita anual?

116 Um carro de 1500 kg parte do repouso em uma estrada horizontal e adquire uma velocidade de 72 km/h em 30 s. (a) Qual é sua energia cinética ao final dos 30 s? (b) Qual é a potência média desenvolvida pelo carro durante o intervalo de 30 s? (c) Qual é a potência instantânea no fim do intervalo de 30 s, supondo que a aceleração é constante?

117 Uma partícula pode se mover apenas ao longo de um eixo x, sob a ação de forças conservativas (Fig. 8-61 e a tabela a seguir). A partícula é liberada em $x = 5{,}00$ m com uma energia cinética $K = 14{,}0$ J e uma energia potencial $U = 0$. Se o movimento da partícula acontece no sentido negativo do eixo x, quais são as energias (a) K e (b) U em $x = 2{,}00$ m e suas energias (c) K e (d) U em $x = 0$? Se o movimento acontece no sentido positivo do eixo x, quais são as energias (e) K e (f) U em $x = 11{,}0$ m, as energias (g) K e (h) U em $x = 12{,}0$ m e as energias (i) K e (j) U em $x = 13{,}0$ m? (k) Plote $U(x)$ em função de x para o intervalo de $x = 0$ a $x = 13{,}0$ m.



FIG. 8-69 Problemas 117 e 118.

Em seguida, a partícula é liberada a partir do repouso em $x = 0$. Quais são (l) sua energia cinética em $x = 5{,}0$ m e (m) a posição positiva máxima $x_{máx}$ que ela atinge? (n) O que acontece com a partícula após atingir $x_{máx}$?

Intervalo	Força
0 a 2,00 m	$\vec{F}_1 = +(3{,}00\ N)\hat{i}$
2,00 m a 3,00 m	$\vec{F}_2 = +(5{,}00\ N)\hat{i}$
3,00 m a 8,00 m	$F = 0$
8,00 m a 11,0 m	$\vec{F}_3 = -(4{,}00\ N)\hat{i}$
11,0 m a 12,0 m	$\vec{F}_4 = -(1{,}00\ N)\hat{i}$
12,0 m a 15,0 m	$F = 0$

118 Com o arranjo de forças do Problema 117, uma partícula de 2,00 kg é liberada em $x = 5{,}00$ m com uma velocidade de 3,45 m/s, no sentido negativo do eixo x. (a) Se a partícula pode chegar ao ponto $x = 0$ m, qual é sua velocidade nesse ponto; se não pode, qual é o ponto de retorno? Suponha que a partícula se move no sentido positivo de x quando ela é liberada em $x = 5{,}00$ m com uma velocidade de 3,45 m/s. (b) Se a partícula pode chegar ao ponto $x = 13{,}0$ m, qual é sua velocidade nesse ponto, e, se não pode, qual é o ponto de retorno?

119 Um disco de *shuffleboard* de 0,42 kg está em repouso quando um jogador usa um taco para imprimir ao disco uma velocidade de 4,2 m/s com aceleração constante. A aceleração ocorre em uma distância de 2,0 m, ao final da qual o taco perde contato com o disco. O disco desliza uma distância adicional de 12 m antes de parar. Suponha que a pista de *shuffleboard* é plana e que a força de atrito sobre o disco é constante. Qual é o aumento da energia térmica do sistema disco-pista (a) para essa distância adicional de 12 m e (b) para a distância total de 14 m? (c) Qual é o trabalho realizado pelo taco sobre o disco?

120 Uma partícula se desloca ao longo de um eixo x, primeiro para fora, do ponto $x = 1{,}0$ m até o ponto $x = 4{,}0$ m, e depois para dentro, até o ponto $x = 1{,}0$ m, enquanto uma força externa age sobre a partícula. Essa força é aplicada ao longo do eixo x e pode ter valores diferentes no caso de deslocamentos para fora e para dentro. A tabela a seguir mostra os valores (em newtons) em quatro situações, onde x está em metros:

Para fora	Para dentro
(a) +3,0	−3,0
(b) +5,0	+5,0
(c) +2,0x	−2,0x
(d) +3,0x^2	+3,0x^2

Determine o trabalho total realizado sobre a partícula pela força externa *durante a viagem de ida e volta* nas quatro situações. (e) Em que situações a força externa é conservativa?

121 Uma força conservativa $F(x)$ age sobre uma partícula de 2,0 kg que se move ao longo de um eixo x. A energia potencial $U(x)$ associada a $F(x)$ está plotada na Fig. 8-70. Quando a partícula se encontra em x = 2,0 m, sua velocidade é de −1,5 m/s. Quais são (a) o módulo e (b) o sentido de $F(x)$ nesta posição? Entre que posições (c) à esquerda e (d) à direita a partícula se move? (e) Qual é a velocidade da partícula em x = 7,0 m?

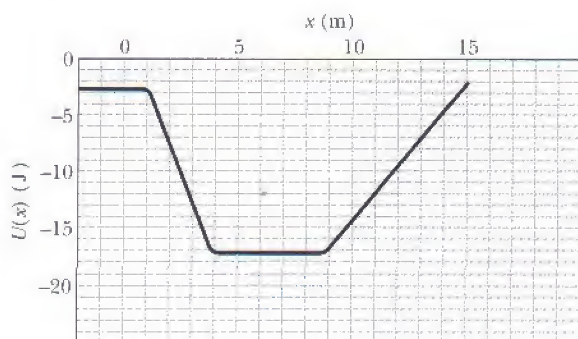


FIG. 8-70 Problema 121.

122 Para fazer um pêndulo, uma bola de 300 g é presa a uma das extremidades de uma corda com 1,4 m de comprimento e massa desprezível. (A outra extremidade da corda está fixa.) A bola é puxada para um lado até a corda fazer um ângulo de 30,0° com a vertical; em seguida (com a corda esticada) a bola é liberada a partir do repouso. Determine (a) a velocidade da bola quando a corda faz um ângulo de 20,0° com a vertical e (b) a velocidade máxima da bola. (c) Qual é o ângulo entre a corda e a vertical quando a velocidade da bola é igual a um terço do valor máximo?

123 Um carro de 1500 kg começa a escorregar para baixo, a 30 km/h, em uma estrada com uma inclinação de 5,0°. O motor do carro está desligado, e as únicas forças que agem sobre ele são a força de atrito exercida pela estrada e a força gravitacional. Após o carro ter-se deslocado 50 m, sua velocidade é de 40 km/h. (a) De quanto a energia mecânica do carro foi reduzida pela força de atrito? (b) Qual é o módulo da força de atrito?

124 Em um número de circo, um palhaço de 60 kg é disparado por um canhão com uma velocidade inicial de 16 m/s e um ângulo desconhecido acima da horizontal. Após um curto intervalo de tempo o palhaço cai em uma rede cuja altura é 3,9 m maior que a da posição inicial do palhaço. Despreze o arrasto do ar. Qual é a energia cinética do palhaço ao cair na rede?

125 A maior força que podemos exercer sobre um objeto com um dente molar é cerca de 750 N. Suponha que, quando você morde gradualmente um caramelo este resiste à compressão exercida por um dos dentes atuando como uma mola para a qual $k = 2{,}5 \times 10^5$ N/m. Determine (a) a compressão do caramelo e (b) o trabalho realizado pelo seu dente sobre o caramelo durante a compressão. (c) Plote o módulo da sua força em função da compressão. (d) Se existe uma energia potencial associada a essa compressão, desenhe um gráfico da energia potencial em função da compressão.

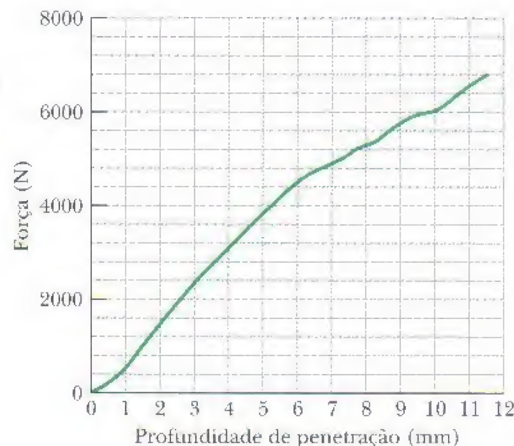


FIG. 8-71 Problema 125.

Na década de 1990, marcas profundas de dentadas foram descobertas na pelve do fóssil de um dinossauro *Triceratops*. A forma das marcas sugeria que tinham sido feitas por um dinossauro *Tiranossauro rex*. Para testar a idéia, os cientistas fabricaram uma réplica de um dente de um *T. rex* feita de bronze e alumínio e usaram uma prensa hidráulica para introduzir gradualmente a réplica em um osso de vaca até a profundidade observada no osso do *Triceratops*. A Fig. 8-71 mostra a força empregada em função da profundidade de penetração em um dos ensaios; a força aumenta com a profundidade porque, à medida que o dente aproximadamente cônico penetra no osso, uma parte maior do dente entra em contato com o osso. (e) Qual foi o trabalho realizado sobre o osso pela prensa hidráulica (e presumivelmente pelo *T. rex*) nesse ensaio? (f) Existe uma energia potencial associada a esse ensaio? (A grande força da mordida e o alto consumo de energia atribuídos ao *T. rex* por essa pesquisa sugerem que o animal foi um predador, e não um saprófago.)

126 Um bombeiro de 70 kg escorrega para baixo, a partir do repouso, 4,3 m em um poste vertical. (a) Se o bombeiro segura o poste de leve, de modo que a força de atrito exercida pelo poste seja desprezível, qual é sua velocidade imediatamente antes de atingir o solo? (b) Se o bombeiro segura o poste com força enquanto escorrega, de modo que a força de atrito média exercida sobre ele seja de 500 N, dirigida verticalmente para cima, qual é sua velocidade imediatamente antes de atingir o solo?

127 Um bloco de 15 kg sofre uma aceleração de 2,0 m/s^2 em uma superfície horizontal sem atrito que faz sua velocidade aumentar de 10 m/s para 30 m/s. Quais são (a) a variação da energia mecânica do bloco e (b) a taxa média com a qual a energia é transferida para o bloco? Qual é a taxa instantânea dessa transferência quando a velocidade do bloco é de (c) 10 m/s e (d) 30 m/s?

128 Repita o Problema 127 com o bloco acelerando para cima em plano inclinado de 5,0°.

129 Os Estados Unidos continentais têm uma área de aproximadamente 8×10^6 km^2 e uma altitude média de 500 m (acima

do nível do mar). A precipitação média anual é de 75 cm. A fração dessa água de chuva que retorna à atmosfera por evaporação é 2/3; o resto vai para o oceano. Se o decréscimo de energia potencial gravitacional do sistema água-Terra associado à parcela de água que vai para o oceano pudesse ser totalmente convertido em energia elétrica, qual seria a potência média? (A massa de 1 m^3 de água é de 1000 kg.)

130 Uma mola cuja constante elástica é $k = 200$ N/m é suspensa verticalmente, com a extremidade superior fixa no teto e a extremidade inferior na posição $y = 0$. Um bloco de 20 N de peso é preso à extremidade inferior, mantido nessa posição por um momento e depois liberado. Determine (a) a energia cinética K, (b) a variação (a partir do valor inicial) da energia potencial gravitacional ΔU_g e (c) a variação da energia potencial elástica ΔU_e do sistema bloco-mola quando o bloco está em $y = -5{,}0$ cm. Determine (d) K, (e) ΔU_g e (f) ΔU_e para $y = -10$ cm, (g) K, (h) ΔU_g e (i) ΔU_e para $y = -15$ cm e (j) K, (k) ΔU_g e (l) ΔU_e para $y = -20$ cm.

131 A cada segundo 1200 m^3 de água passam por uma queda d'água de 100 m de altura. Três quartos da energia cinética ganha pela água ao cair são transformados em energia elétrica por um gerador hidrelétrico. A que taxa o gerador produz energia elétrica? (A massa de 1 m^3 de água é de 1000 kg.)

132 A Fig. 8-72a mostra uma molécula composta por dois átomos de massas m e M (com $m \ll M$) separados por uma distância r. A Fig. 8-72b mostra a energia potencial $U(r)$ da molécula em função de r. Descreva o movimento dos átomos (a) se a energia mecânica total E do sistema de dois átomos é maior que zero (como E_1) e (b) se E é menor que zero (como E_2). Para $E_1 = 1 \times 10^{-19}$ J e $r = 0{,}3$ nm, determine (c) a energia potencial do sistema, (d) a energia cinética total dos átomos e (e) a força (módulo e orientação) que atua sobre cada átomo. Para que valores de r a força é (f) repulsiva, (g) atrativa e (h) nula?

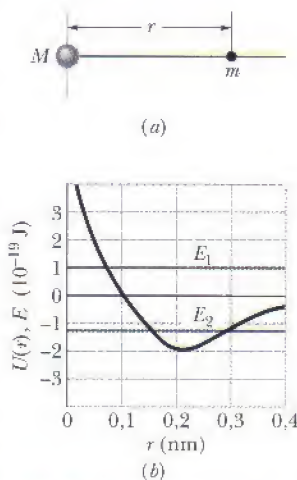


FIG. 8-72 Problema 132.

133 Uma haste rígida de massa desprezível e comprimento L possui uma bola de massa m presa a uma das extremidades (Fig. 8-73). A outra extremidade está presa a um eixo, de tal forma que a bola pode se mover em uma circunferência vertical. Primeiro, suponha que não existe atrito no eixo. A bola é lançada para baixo a partir da posição horizontal A com velocidade v_0 e chega exatamente ao ponto D antes de parar. (a) Escreva uma expressão para v_0 em termos de L, m e g. (b) Qual é a tensão na haste quando a bola passa pelo ponto B? (c) Coloca-se um pouco de areia no eixo para aumentar o atrito. Depois disso, a bola chega apenas ao ponto C quando é lançada a partir de A com a mesma velocidade de antes. Qual é o decréscimo de energia mecânica durante esse movimento? (d) Qual é o decréscimo de energia mecânica quando a bola finalmente entra em repouso no ponto B após várias oscilações?

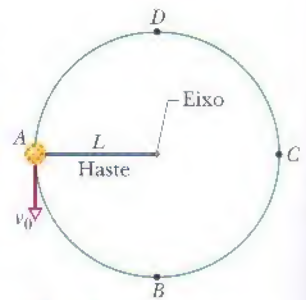


FIG. 8-73 Problema 133.

134 Uma força conservativa $F(x)$ age sobre uma partícula que se move ao longo de um eixo x. A Fig. 8-74 mostra como a energia potencial $U(x)$ associada à força $F(x)$ varia com a posição da partícula. (a) Plote $F(x)$ no intervalo $0 < x < 6$ m. (b) A energia mecânica E do sistema é de 4,0 J. Plote a energia cinética $K(x)$ da partícula diretamente na Fig. 8-74.

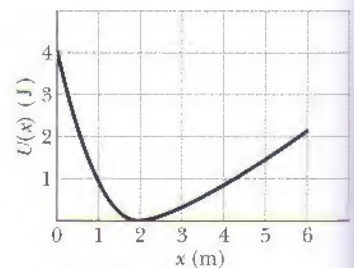


FIG. 8-74 Problema 134.

135 Fixe uma das extremidades de uma mola vertical ao teto, prenda um repolho à outra extremidade e baixe o repolho lentamente, até que a força para cima exercida pela mola sobre o repolho equilibre a força gravitacional que atua sobre ele. Mostre que a perda de energia potencial gravitacional do sistema repolho-Terra é igual a duas vezes o ganho de energia potencial da mola. Por que as duas grandezas não são iguais?

Centro de Massa e Momento Linear

9



©franzfoto.com/Alamy Images

Os machos do carneiro montês (Ovis canadensis) lutam entre si para atrair a atenção das fêmeas. Dois machos arremetem repetidamente um contra o outro de cabeça baixa, fazendo os chifres colidirem, até que um desista. Esses combates podem ser perigosos porque se um chifre quebrar o macho provavelmente morrerá ou ficará gravemente ferido. Mesmo que os chifres não quebrem, porém, a impressão é de que os dois carneiros deveriam sofrer uma concussão cerebral.

Como os carneiros monteses sobrevivem às cabeçadas violentas com as quais estabelecem sua supremacia?

A resposta está neste capítulo.



(a)



(b)

FIG. 9-1 (*a*) Uma bola arremessada para cima segue uma trajetória parabólica. (*b*) O centro de massa (ponto preto) de um taco de beisebol arremessado para cima com um movimento de rotação segue uma trajetória parabólica, mas todos os outros pontos do taco seguem trajetórias curvas mais complicadas. *(a: Richard Megna/Fundamental Photographs)*

9-1 O QUE É FÍSICA?

Todo engenheiro mecânico contratado como perito para reconstituir um acidente de trânsito usa a física. Todo treinador que ensina uma bailarina a saltar usa a física. Na verdade, para analisar qualquer tipo de movimento complicado é preciso recorrer a simplificações que são possíveis apenas com um entendimento da física. Neste capítulo discutimos de que forma o movimento complicado de um sistema de objetos, como um carro ou uma bailarina, pode ser simplificado se determinarmos um ponto especial do sistema: o *centro de massa*.

Eis um exemplo: se você arremessa uma bola sem imprimir nela muita rotação (Fig. 9-1*a*), o movimento é simples. A bola descreve uma trajetória parabólica, como discutimos no Capítulo 4, e pode ser tratada como uma partícula. Se, em vez disso, você arremessa um taco de beisebol (Fig. 9-1*b*), o movimento é mais complicado. Como cada parte do taco segue uma trajetória diferente, não é possível representar o taco como uma partícula. Entretanto, o taco possui um ponto especial, o centro de massa, que descreve uma trajetória parabólica simples; as outras partes do taco se movem em torno do centro de massa. (Para localizar o centro de massa, equilibre o taco em um dedo esticado; o ponto está acima do dedo, no eixo central do taco.)

É difícil fazer carreira arremessando tacos de beisebol, mas muitos treinadores ganham dinheiro ensinando atletas de salto em distância ou dançarinos a saltar da forma correta, movendo pernas e braços ou girando o torso. O ponto de partida é sempre o centro de massa da pessoa, porque é o ponto que se move de modo mais simples.

9-2 | O Centro de Massa

Definimos o **centro de massa** (CM) de um sistema de partículas (uma pessoa, por exemplo) para podermos prever com facilidade o movimento do sistema.

> O centro de massa de um sistema de partículas é o ponto que se move como se (1) toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e (2) todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto.

Nesta seção discutimos a forma de determinar a localização do centro de massa de um sistema de partículas. Começamos com um sistema de poucas partículas e, em seguida, consideramos sistemas com um número muito grande de partículas (um corpo maciço, como um taco de beisebol). Mais adiante discutiremos como o centro de massa de um sistema se move quando o sistema é submetido a forças externas.

Sistemas de Partículas

A Fig. 9-2*a* mostra duas partículas de massas m_1 e m_2 separadas por uma distância d. Escolhemos arbitrariamente como origem do eixo x a posição da partícula de massa m_1. *Definimos* a posição do centro de massa (CM) desse sistema de duas partículas como

$$x_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d. \tag{9-1}$$

Suponha, por exemplo, que $m_2 = 0$. Nesse caso, existe apenas uma partícula, de massa m_1, e o centro de massa deve estar na posição dessa partícula; é o que realmente acontece, já que a Eq. 9-1 se reduz a $x_{CM} = 0$. Se $m_1 = 0$, temos de novo apenas uma partícula (de massa m_2) e, como devia ser, $x_{CM} = d$. Se $m_1 = m_2$, o centro de massa deve estar a meio caminho entre as duas partículas; a Eq. 9-1 se reduz a $x_{CM} = d/2$, como seria de se esperar. Finalmente, de acordo com a Eq. 9-1, se nenhuma das duas massas é nula x_{CM} só pode assumir valores entre 0 e d, ou seja, o centro de massa deve estar em algum lugar entre as duas partículas.

A Fig. 9-2*b* mostra uma situação mais geral na qual o sistema de coordenadas foi deslocado para a esquerda. A posição do centro de massa é agora definida como

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (9\text{-}2)$$

Observe que se fizermos $x_1 = 0$, x_2 ficará igual a d e a Eq. 9-2 se reduzirá à Eq. 9-1, como seria de se esperar. Note também que, apesar do deslocamento da origem do sistema de coordenadas, o centro de massa continua à mesma distância de cada partícula.

Podemos escrever a Eq. 9-2 na forma

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}, \quad (9\text{-}3)$$

onde M é a massa total do sistema. (No exemplo que estamos discutindo, $M = m_1 + m_2$.) Podemos estender esta equação a uma situação mais geral, na qual n partículas estão posicionadas ao longo do eixo x. Nesse caso, a massa total é $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ e a posição do centro de massa é

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{M} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \quad (9\text{-}4)$$

Se as partículas estão distribuídas em três dimensões, a posição do centro de massa deve ser especificada por três coordenadas. Por extensão da Eq. 9-4, essas coordenadas são dadas por

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \qquad y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \qquad z_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i. \quad (9\text{-}5)$$

Também podemos definir o centro de massa usando a linguagem dos vetores. Primeiro, lembre-se de que a posição de uma partícula de coordenadas x_i, y_i e z_i é dada por um vetor posição

$$\vec{r}_i = x_i\hat{\mathrm{i}} + y_i\hat{\mathrm{j}} + z_i\hat{\mathrm{k}}, \quad (9\text{-}6)$$

onde o índice identifica a partícula, e $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$ e $\hat{\mathrm{k}}$ são vetores unitários que apontam, respectivamente, no sentido positivo dos eixos x, y e z. Analogamente, a localização do centro de massa de um sistema de partículas é dada por um vetor posição:

$$\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{\mathrm{i}} + y_{CM}\hat{\mathrm{j}} + z_{CM}\hat{\mathrm{k}}. \quad (9\text{-}7)$$

As três equações escalares da Eq. 9-5 podem ser substituídas, portanto, por uma única equação vetorial,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i, \quad (9\text{-}8)$$

onde M é de novo a massa total do sistema. É possível confirmar que esta equação está correta substituindo $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_{CM}$ por seus valores, dados pelas Eqs. 9-6 e 9-7, e separando as componentes x, y e z. O resultado são as relações escalares da Eq. 9-5.

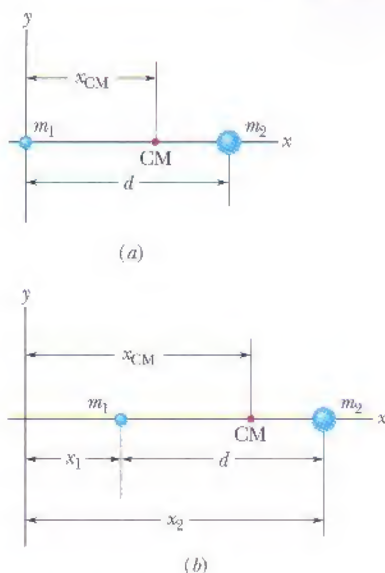


FIG. 9-2 (*a*) Duas partículas de massas m_1 e m_2 estão separadas por uma distância d. O ponto marcado como CM mostra a posição do centro de massa, calculado usando a Eq. 9-1. (*b*) O mesmo que (*a*), exceto pelo fato de que a origem foi deslocada para a esquerda. A posição do centro de massa pode ser calculada usando a Eq. 9-2. A localização do centro de massa em relação às partículas é a mesma nos dois casos.

Corpos Maciços

Um objeto comum, como um bastão de beisebol, contém tantas partículas (átomos) que podemos aproximá-lo por uma distribuição contínua de massa. As "partículas" nesse caso se tornam elementos infinitesimais de massa dm, as somas da Eq. 9-5 se tornam integrais e as coordenadas do centro de massa são definidas através das equações

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\ dm, \qquad y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\ dm, \qquad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\ dm, \tag{9-9}$$

onde M agora é a massa do objeto.

Como o cálculo dessas integrais para a maioria dos objetos do dia-a-dia (como um televisor ou um boi, por exemplo) seria muito difícil, vamos considerar neste texto apenas objetos *uniformes*. Esses objetos possuem *massa* específica (massa por unidade de volume) uniforme, ou seja, a massa específica ρ (letra grega rô) é a mesma para todos os elementos do objeto e para o objeto como um todo. De acordo com a Eq. 1-8, podemos escrever:

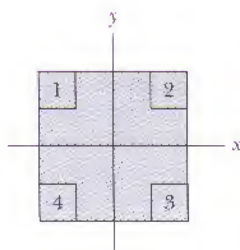
$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V}, \tag{9-10}$$

onde dV é o volume ocupado por um elemento de massa dm e V é o volume total do objeto. Substituindo dm na Eq. 9-9 por seu valor obtido a partir da Eq. 9-10 [$dm = (M/V)dV$], temos:

$$x_{CM} = \frac{1}{V}\int x\ dV, \qquad y_{CM} = \frac{1}{V}\int y\ dV, \qquad z_{CM} = \frac{1}{V}\int z\ dV. \tag{9-11}$$

Não é necessário calcular uma ou mais dessas integrais se o objeto possui um ponto, uma reta ou um plano de simetria, pois, nesse caso, o centro de massa está no ponto, linha ou plano de simetria. Assim, por exemplo, o centro de massa de uma esfera uniforme (que possui um ponto de simetria) está no centro da esfera (que é o ponto de simetria). O centro de massa de um cone uniforme (cujo eixo é uma reta de simetria) está sobre esse eixo. O centro de massa de uma banana (que tem um plano de simetria que a divide em duas partes iguais) está em algum ponto desse plano.

O centro de massa de um objeto não precisa estar no interior do objeto. Não existe massa no centro de massa de uma rosquinha, assim como não existe ferro no centro de massa de uma ferradura.





TESTE 1 A figura mostra uma placa quadrada uniforme, da qual quatro partes quadradas idênticas são removidas dos cantos. (a) Onde fica o centro de massa da placa original? Onde fica o centro de massa após a remoção (b) da parte 1; (c) das partes 1 e 2; (d) das partes 1 e 3; (e) das partes 1, 2 e 3; (f) das quatro partes? Responda em termos dos quadrantes, eixos ou pontos (sem realizar nenhum cálculo, é claro).

Exemplo 9-1

Três partículas de massas $m_1 = 1{,}2$ kg, $m_2 = 2{,}5$ kg e $m_3 = 3{,}4$ kg formam um triângulo eqüilátero de lado $a = 140$ cm. Onde fica o centro de massa desse sistema?

IDÉIA-CHAVE Como estamos lidando com partículas e não com um corpo maciço, podemos usar a Eq. 9-5 para localizar o centro de massa. As partículas estão no plano do triângulo eqüilátero, de modo que precisamos apenas das duas primeiras equações.

Cálculos: Podemos simplificar os cálculos escolhendo os eixos x e y de tal forma que uma das partículas esteja na origem e o eixo x coincida com um dos lados do triângulo (Fig. 9-3). Nesse caso, as três partículas têm as seguintes coordenadas:

Partícula	Massa (kg)	x (cm)	y (cm)
1	1,2	0	0
2	2,5	140	0
3	3,4	70	120

A massa total M do sistema é 7,1 kg.

De acordo com a Eq. 9-5, as coordenadas do centro de massa são

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{M}$$

$$= \frac{(1{,}2\text{ kg})(0) + (2{,}5\text{ kg})(140\text{ cm}) + (3{,}4\text{ kg})(70\text{ cm})}{7{,}1\text{ kg}}$$

$$= 83\text{ cm} \qquad \text{(Resposta)}$$

$$\text{e} \quad y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{M}$$

$$= \frac{(1{,}2\ \text{kg})(0) + (2{,}5\ \text{kg})(0) + (3{,}4\ \text{kg})(120\ \text{cm})}{7{,}1\ \text{kg}}$$

$$= 58\ \text{cm} \qquad \text{(Resposta)}$$

Na Fig. 9-3, a posição do centro de massa é dada pelo vetor posição $\vec{r}_{CM}$, cujas componentes são x_{CM} e y_{CM}.

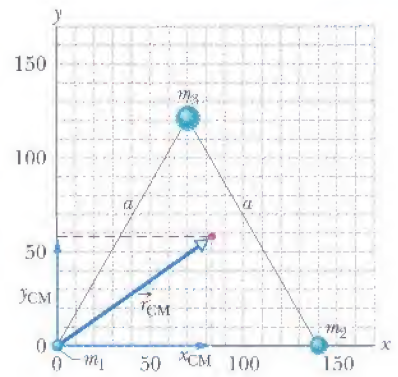


FIG. 9-3 Três partículas formam um triângulo eqüilátero do lado a. A localização do centro de massa é dada pelo vetor posição $\vec{r}_{CM}$.

Exemplo 9-2 Aumente sua capacidade

A Fig. 9-4a mostra uma placa de metal uniforme P de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido em uma linha de montagem. Usando o sistema de coordenadas xy da figura, localize o centro de massa (CM_P) da placa.

IDÉIAS-CHAVE (1) Em primeiro lugar, vamos determinar a localização aproximada do centro de massa da placa P usando conceitos de simetria. Observe que a placa é simétrica em relação ao eixo x (obtemos a parte de baixo da placa girando a parte de cima em torno do eixo x e vice-versa). Isso significa que o centro de massa da placa deve estar localizado nesse eixo. A placa (com o disco removido) não é simétrica em relação ao eixo y. Entretanto, como existe um pouco mais de massa do lado direito do eixo y, CM_P deve estar um pouco à direita do eixo y, como na Fig. 9-4a.

(2) Como a placa P é um corpo maciço, podemos usar as Eqs. 9-11 para calcular as coordenadas do centro de massa. Entretanto, é difícil resolver o problema por esse método. Eis uma forma muito mais fácil: ao trabalhar com centros de massa podemos supor que a massa de um objeto *uniforme* está concentrada em uma partícula localizada no centro de massa do objeto.

Cálculos: Primeiro, colocamos o disco que foi removido (vamos chamá-lo de disco S) de volta no lugar (Fig. 9-4b), para formar a placa composta original (que vamos chamar de placa C). Devido à simetria, o centro de massa CM_S do disco S está no centro de S, em $x = -R$ (como mostra a figura). Da mesma forma, o centro de massa CM_C da placa composta C está no centro de C, a origem (como mostra a figura). Temos, portanto, o seguinte:

Placa	Centro de massa	Posição do CM	Massa
P	CM_P	$x_P = ?$	m_P
S	CM_S	$x_S = -R$	m_S
C	CM_C	$x_C = 0$	$m_C = m_S + m_P$

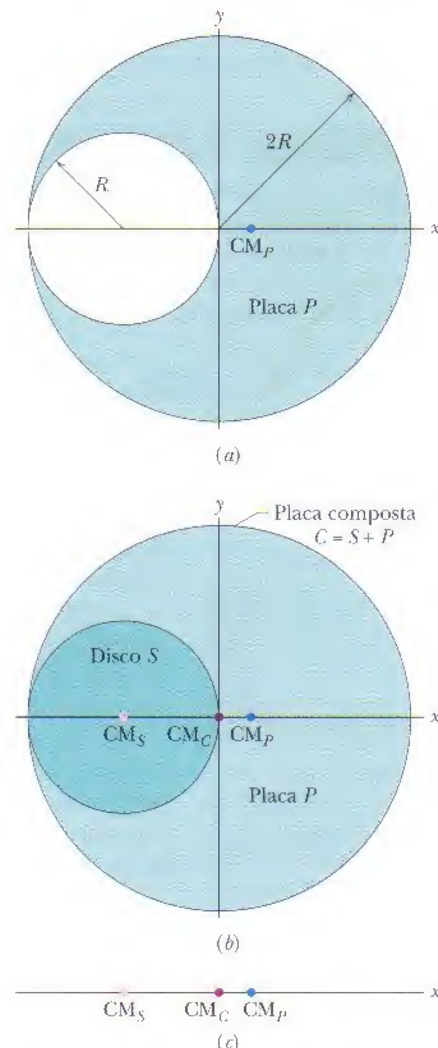


FIG. 9-4 (a) A placa P é uma placa de metal de raio $2R$, com um furo circular de raio R. O centro de massa de P está no ponto CM_P. (b) O disco S foi colocado de volta no lugar para formar a placa composta C. O centro de massa CM_S do disco S e o centro de massa CMC da placa C estão indicados. (c) O centro de massa CM_{S+P} da combinação de S e P coincide com CM_C, que está em $x = 0$.

Suponha que a massa m_S do disco S esteja concentrada em uma partícula em $x_S = -R$ e que a massa m_P esteja concentrada em uma partícula em x_P (Fig. 9-4c). Vamos tratar essas duas partículas como um sistema e usar a Eq. 9-2 para obter o centro de massa x_{S+P} do sistema. O resultado é o seguinte:

$$x_{S+P} = \frac{m_S x_S + m_P x_P}{m_S + m_P}. \quad (9\text{-}12)$$

Em seguida, note que a superposição do disco S com a placa P é a placa composta C. Assim, a posição x_{S+P} do CM_{S+P} deve coincidir com a posição x_C do CM_C, que está na origem: $x_{S+P} = x_C = 0$. Substituindo este resultado na Eq. 9-12 e explicitando x_P, obtemos

$$x_P = -x_S \frac{m_S}{m_P}. \quad (9\text{-}13)$$

Podemos relacionar essas massas às áreas de S e P, notando que

$$\begin{aligned}\text{massa} &= \text{massa específica} \times \text{volume}\\ &= \text{massa específica} \times \text{espessura} \times \text{área}.\end{aligned}$$

Portanto, $$\frac{m_S}{m_P} = \frac{\text{massa específica}_S}{\text{massa específica}_P} \times \frac{\text{espessura}_S}{\text{espessura}_P} \times \frac{\text{área}_S}{\text{área}_P}.$$

Como a placa é uniforme, as densidades e espessuras são iguais e, portanto,

$$\frac{m_S}{m_P} = \frac{\text{área}_S}{\text{área}_P} = \frac{\text{área}_S}{\text{área}_C - \text{área}_S}$$

$$= \frac{\pi R^2}{\pi(2R)^2 - \pi R^2} = \frac{1}{3}$$

Substituindo este resultado e fazendo $x_S = -R$ na Eq. 9-13, temos:

$$x_P = \tfrac{1}{3}R. \quad \text{(Resposta)}$$

TÁTICA PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 1: *Problemas de Centro de Massa* Os Exemplos 9-1 e 9-2 apresentam três estratégias para simplificar problemas de centros de massa. (1) Explore ao máximo a simetria do objeto, seja ela em relação a um ponto, uma linha ou um plano. (2) Se o objeto puder ser dividido em várias partes, trate cada uma dessas partes como uma partícula, localizada no centro de massa da parte em questão. (3) A escolha dos eixos é importante. Se o sistema for um grupo de partículas, posicione uma das partículas na origem. Se o sistema for um corpo com uma reta de simetria, use essa reta como eixo x ou y.

9-3 | A Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas

Agora que sabemos determinar a posição do centro de massa de um sistema de partículas, vamos discutir a relação entre forças externas e o centro de massa. Começamos com um exemplo simples, envolvendo duas bolas de sinuca.

Quando acertamos a bola branca em uma outra bola que está em repouso esperamos que o sistema de duas bolas continue a se mover na mesma direção após o choque. Ficaríamos surpresos, por exemplo, se as duas bolas se movessem em nossa direção ou se ambas se movessem para a direita ou para a esquerda.

O que continua a se mover para a frente, sem que o movimento seja alterado pela colisão, é o centro de massa do sistema de duas bolas. Se você focalizar a atenção neste ponto (que está sempre no ponto médio do segmento que une as duas bolas, pois elas têm massas iguais) poderá facilmente se convencer disso observando a trajetória das bolas em uma mesa de sinuca. Não importa se o choque é frontal ou de raspão; o centro de massa continua a se mover para a frente como se não tivesse havido uma colisão. Vamos examinar mais de perto esse movimento do centro de massa.

Para isso, vamos substituir o par de bolas de sinuca por um conjunto de n partículas de massas (possivelmente) diferentes. Não estamos interessados nos movimentos individuais dessas partículas, mas *apenas* no movimento do centro de massa do sistema. Embora o centro de massa seja apenas um ponto, ele se move como uma partícula cuja massa é igual à massa total do sistema; podemos atribuir-lhe uma posição, uma velocidade e uma aceleração. Afirmamos (e provaremos a seguir) que a equação vetorial que descreve o movimento do centro de massa de um sistema de partículas é

$$\vec{F}_{\text{res}} = M\vec{a}_{\text{CM}} \quad \text{(sistema de partículas)}. \quad (9\text{-}14)$$

Esta equação é a segunda lei de Newton para o movimento do centro de massa de um sistema de partículas. Note que a forma é a mesma da equação ($\vec{F}_{res} = m\vec{a}$) para o movimento de uma única partícula. Contudo, as três grandezas que aparecem na Eq. 9-14 devem ser usadas com algum critério:

1. $\vec{F}_{res}$ é a força resultante de *todas as forças externas* que agem sobre o sistema. Forças de uma parte do sistema que agem sobre outra parte (*forças internas*) não devem ser incluídas na Eq. 9-14.
2. M é a *massa total* do sistema. Supomos que nenhuma massa entra ou sai do sistema durante o movimento, de modo que M permanece constante. Nesse caso, dizemos que o sistema é **fechado**.
3. $\vec{a}_{CM}$ é a aceleração do *centro de massa* do sistema. A Eq. 9-14 não fornece nenhuma informação a respeito da aceleração de outros pontos do sistema.

A Eq. 9-14 é equivalente a três equações envolvendo as componentes de $\vec{F}_{res}$ e $\vec{a}_{CM}$ em relação aos três eixos de coordenadas. Essas equações são:

$$F_{res,x} = Ma_{CM,x} \qquad F_{res,y} = Ma_{CM,y} \qquad F_{res,z} = Ma_{CM,z}. \tag{9-15}$$

Agora podemos voltar a examinar o comportamento das bolas de sinuca. Depois que a bola branca é posta em movimento, nenhuma força externa age sobre o sistema (composto pelas duas bolas.) De acordo com a Eq. 9-14, se $\vec{F}_{res} = 0$, $\vec{a}_{CM} = 0$. Como a aceleração é a taxa de variação da velocidade, concluímos que a velocidade do centro de massa do sistema de duas bolas não varia. Quando as duas bolas se chocam, as forças que participam do processo são forças *internas* de uma bola sobre a outra. Essas forças não contribuem para a força resultante $\vec{F}_{res}$, que continua a ser nula. Assim, o centro de massa do sistema, que estava se movendo para a frente antes da colisão, deve continuar a se mover para a frente após a colisão com a mesma velocidade e a mesma orientação.

A Eq. 9-14 se aplica não só a um sistema de partículas mas também a um corpo sólido, como o bastão da Fig. 9-1*b*. Nesse caso, M na Eq. 9-14 é a massa do bastão e $\vec{F}_{res}$ é a força gravitacional sobre o bastão. De acordo com a Eq. 9-14, $\vec{a}_{CM} = \vec{g}$. Em outras palavras, o centro de massa do bastão se move como se o bastão fosse uma única partícula de massa M sujeita à força $\vec{F}_g$.

A Fig. 9-5 mostra outro caso interessante. Suponha que em um espetáculo de fogos de artifício um foguete seja lançado em uma trajetória parabólica. Em um certo ponto, o foguete explode em pedaços. Se a explosão não tivesse ocorrido, o foguete teria continuado na trajetória parabólica mostrada na figura. As forças da explosão são *internas* ao sistema (no início, o sistema é apenas o foguete; mais tarde, é composto pelos fragmentos do foguete), ou seja, elas são forças que partes do sistema exercem sobre outras partes. Se ignorarmos a resistência do ar, a força *externa* resultante $\vec{F}_{res}$ que age sobre o sistema é a força gravitacional, independentemente da explosão do foguete. Assim, de acordo com a Eq. 9-14 a aceleração $\vec{a}_{CM}$ do centro de massa dos fragmentos (enquanto estão voando) permanece igual a $\vec{g}$. Isso significa que o centro de massa dos fragmentos segue a mesma trajetória parabólica que o foguete teria seguido se não tivesse explodido.

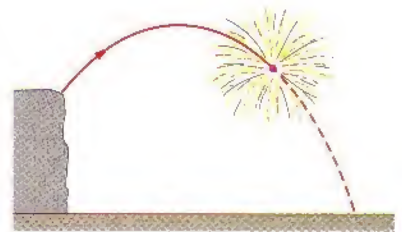


FIG. 9-5 Um fogo de artifício explode no ar. Na ausência de resistência do ar o centro de massa dos fragmentos continuaria a seguir a trajetória parabólica original até que os fragmentos começassem a atingir o solo.

Quando uma dançarina de balé salta no palco em um *grand jeté* ela levanta os braços e estica as pernas horizontalmente assim que seus pés deixam o piso (Fig. 9-6). Esses movimentos deslocam para cima o centro de massa. Embora o centro de massa siga fielmente uma trajetória parabólica, seu movimento em relação ao corpo faz diminuir a altura alcançada pela sua cabeça e pelo tronco da bailarina em relação a um salto normal. O resultado é que a cabeça e o tronco seguem uma trajetória aproximadamente horizontal, criando a ilusão de que a bailarina flutua no ar.

Demonstração da Equação 9-14

Vamos agora demonstrar esta importante equação. De acordo com a Eq. 9-8, temos, para um sistema de n partículas,



FIG. 9-6 Um *grand jeté*. (Adaptado de *The Physics of Dance*, de Kenneth Laws, Schirmer Books, 1984.)

$$M\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots + m_n\vec{r}_n, \tag{9-16}$$

onde M é a massa total do sistema e $\vec{r}_{CM}$ é o vetor posição do centro de massa do sistema.

Derivando a Eq. 9-16 em relação ao tempo, temos:

$$M\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n \tag{9.17}$$

onde $\vec{v}_i$ $(= d\vec{r}_i/dt)$ é a velocidade da partícula de ordem i e $\vec{v}_{CM}$ $(= d\vec{r}_{CM}/dt)$ é a velocidade do centro de massa.

Derivando a Eq. 9-17 em relação ao tempo, obtemos:

$$M\vec{a}_{CM} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \cdots + m_n\vec{a}_n \tag{9.18}$$

onde $\vec{a}_i$ $(= d\vec{v}_i/dt)$ é a aceleração da partícula de ordem i e $\vec{a}_{CM}$ $(= d\vec{v}_{CM}/dt)$ é a aceleração do centro de massa. Embora o centro de massa seja apenas um ponto geométrico ele possui uma posição, uma velocidade e uma aceleração, como se fosse uma partícula.

De acordo com a segunda lei de Newton, $m_i\vec{a}_i$ é igual à força resultante $\vec{F}_i$ que age sobre a partícula de ordem i. Assim, podemos escrever a Eq. 9-18 na forma

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_n. \tag{9-19}$$

Entre as forças que contribuem para o lado direito da Eq. 9-19 estão forças que as partículas do sistema exercem umas sobre as outras (forças internas) e forças exercidas sobre as partículas por agentes de fora do sistema (forças externas). De acordo com a terceira lei de Newton, as forças internas formam pares do tipo ação-reação que se cancelam mutuamente na soma do lado direito da Eq. 9-19. O que resta é a soma vetorial de todas as forças externas que agem sobre o sistema. Assim, a Eq. 9-19 se reduz à Eq. 9-14, como queríamos demonstrar.



TESTE 2 Dois patinadores em uma superfície de gelo sem atrito seguram extremidades opostas de uma corda esticada de massa desprezível. É escolhido um eixo de referência na mesma posição que a corda, com a origem no centro de massa do sistema de dois patinadores. Um patinador, Frederico, pesa duas vezes mais do que o outro patinador, Eduardo. Onde os patinadores se encontram se (a) Frederico puxa a corda para se aproximar de Eduardo, (b) Eduardo puxa a corda para se aproximar de Frederico e (c) os dois patinadores puxam a corda?

Exemplo 9-3

As três partículas da Fig. 9-7*a* estão inicialmente em repouso. Cada uma sofre a ação de uma força *externa* devido a agentes fora do sistema das três partículas. As orientações das forças estão indicadas e os módulos são F_1 = 6,0 N, F_2 = 12 N e F_3 = 14 N. Qual é a aceleração do centro de massa do sistema e em que direção ele se move?

IDÉIAS-CHAVE A posição do centro de massa, calculada pelo método do Exemplo 9-1, está assinalada por um ponto na figura. Podemos tratar o centro de massa como se fosse uma partícula real, com uma massa igual à massa total do sistema, M = 16 kg. Também podemos tratar as três forças externas como se fossem aplicadas ao centro de massa (Fig. 9-7*b*).

Cálculos: Agora podemos aplicar a segunda lei de Newton ($\vec{F}_{res} = m\vec{a}$) ao centro de massa, escrevendo

$$\vec{F}_{res} = M\vec{a}_{CM} \qquad (9\text{-}20)$$

ou

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = M\vec{a}_{CM}$$

e portanto,

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3}{M}. \qquad (9\text{-}21)$$

De acordo com a Eq. 9-20, a aceleração $\vec{a}_{CM}$ do centro de massa tem a mesma direção que a força externa resultante $\vec{F}_{res}$ aplicada ao sistema (Fig. 9-7*b*). Como as partículas estão inicialmente em repouso, o centro de massa também deve estar em repouso. Quando o centro de massa começa a acelerar, ele se move na direção de $\vec{a}_{CM}$ e $\vec{F}_{res}$.

Podemos calcular o lado direito da Eq. 9-21 usando uma calculadora ou escrever a Eq. 9-21 em termos das componentes, calcular as componentes de $\vec{a}_{CM}$ e em seguida obter $\vec{a}_{CM}$. Ao longo do eixo x, temos:

$$a_{CM,x} = \frac{F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}}{M}$$

$$= \frac{-6{,}0\text{ N} + (12\text{ N})\cos 45° + 14\text{ N}}{16\text{ kg}} = 1{,}03\text{ m/s}^2$$

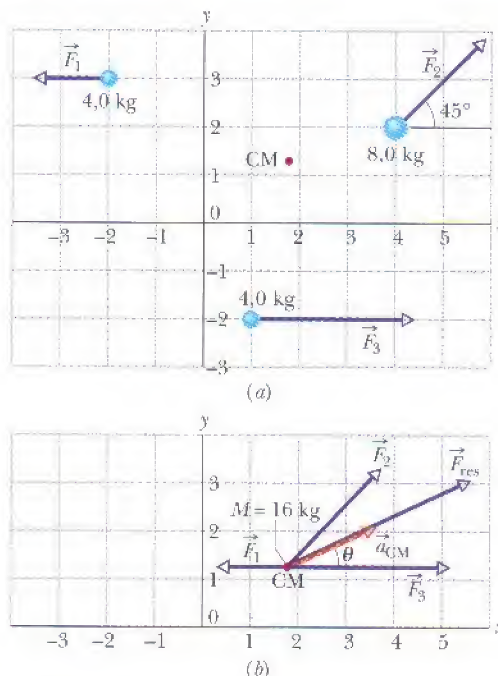


FIG. 9-7 (*a*) Três partículas, inicialmente em repouso nas posições indicadas, são submetidas às forças externas mostradas. O centro de massa (CM) do sistema está indicado. (*b*) As forças são transferidas para o centro de massa do sistema, que se comporta como uma partícula de massa M igual à massa total do sistema. A força externa resultante $\vec{F}_{res}$ e a aceleração $\vec{a}_{CM}$ do centro de massa estão indicadas.

Ao longo do eixo y, temos:

$$a_{CM,y} = \frac{F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}}{M}$$

$$= \frac{0 + (12\text{ N})\text{ sen } 45° + 0}{16\text{ kg}} = 0{,}530\text{ m/s}^2$$

Assim, o módulo de $\vec{a}_{CM}$ é dado por

$$a_{CM} = \sqrt{(a_{CM,x})^2 + (a_{CM,y})^2}$$
$$= 1{,}16\text{ m/s}^2 \approx 1{,}2\text{ m/s}^2 \qquad \text{(Resposta)}$$

e o ângulo (em relação ao semi-eixo x positivo) é dado por

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_{CM,y}}{a_{CM,x}} = 27°. \qquad \text{(Resposta)}$$

9-4 | Momento Linear

Nesta seção vamos concentrar nossa atenção em apenas uma partícula, com o objetivo de definir duas grandezas importantes. Na Seção 9-5 essas definições serão aplicadas a sistemas com muitas partículas.

A primeira definição é a de uma palavra, *momento*, que possui vários significados na linguagem comum, mas apenas um significado, bastante preciso, na física e na

engenharia. O **momento linear** de uma partícula é uma grandeza vetorial $\vec{p}$ definida através da equação

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \text{(momento linear de uma partícula)}, \tag{9-22}$$

onde m é a massa e $\vec{v}$ a velocidade da partícula. (O adjetivo *linear* é freqüentemente omitido, mas serve para distinguir $\vec{p}$ do *momento angular*, que será introduzido no Capítulo 11 e que está associado a rotações.) Como m é sempre uma grandeza escalar positiva, a Eq. 9-22 mostra que $\vec{p}$ e $\vec{v}$ têm a mesma orientação. De acordo com a Eq. 9-22, a unidade de momento no SI é o quilograma-metro por segundo (kg · m/s).

Newton expressou sua segunda lei originalmente em termos do momento:


A taxa de variação com o tempo do momento de uma partícula é igual à força resultante que atua sobre a partícula e tem a mesma orientação que essa força.

Em forma de equação, isso significa o seguinte:

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{9-23}$$

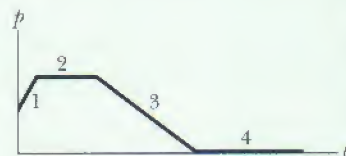
Em palavras, a Eq. 9-23 afirma que a força resultante $\vec{F}_{res}$ aplicada a uma partícula faz variar o momento linear $\vec{p}$ da partícula. Na verdade, o momento linear só pode mudar se a partícula estiver sujeita a uma força. Se não existe nenhuma força, $\vec{p}$ *não pode* mudar. Como vamos ver na Seção 9-7, este último fato pode ser uma ferramenta extremamente poderosa para resolver problemas.

Substituindo na Eq. 9-23 $\vec{p}$ pelo seu valor, dado pela Eq. 9-22, obtemos, para uma massa m constante,

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Assim, as relações $\vec{F}_{res} = d\vec{p}/dt$ e $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$ são expressões equivalentes da segunda lei de Newton para uma partícula.

TESTE 3 A figura mostra o módulo p do momento linear em função do tempo t para uma partícula que se move ao longo de um eixo. Uma força dirigida ao longo do eixo age sobre a partícula. (a) Ordene as quatro regiões indicadas de acordo com o módulo da força, do maior para o menor. (b) Em que região a velocidade da partícula está diminuindo?



9-5 | O Momento Linear de um Sistema de Partículas

Vamos estender a definição de momento linear para um sistema de partículas. Considere um sistema de n partículas, cada uma com sua própria massa, velocidade e momento linear. As partículas podem interagir umas com as outras e forças externas podem agir sobre elas. O sistema como um todo tem um momento linear total $\vec{P}$, que é definido como a soma vetorial dos momentos lineares de todas as partículas. Assim,

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots + \vec{p}_n \\ &= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n\end{aligned} \tag{9-24}$$

Comparando esta equação com a Eq. 9-17, vemos que

$$\vec{P} = M\vec{v}_{CM} \quad \text{(momento linear de um sistema de partículas)}, \tag{9-25}$$

que é outra forma de definir o momento linear de um sistema de partículas:

O momento linear de um sistema de partículas é igual ao produto da massa total do sistema pela velocidade do centro de massa.

Derivando a Eq. 9-25 em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM}. \quad (9\text{-}26)$$

Comparando as Eqs. 9-14 e 9-26, vemos que é possível escrever a segunda lei de Newton para um sistema de partículas na forma

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{(sistema de partículas)}, \quad (9\text{-}27)$$

onde $\vec{F}_{res}$ é a força externa resultante que age sobre o sistema. Esta equação é a generalização para um sistema de muitas partículas na equação $\vec{F}_{res} = d\vec{p}/dt$, válida para uma partícula isolada. Em palavras, a equação diz que a força externa $\vec{F}_{res}$, ao ser aplicada a um sistema de partículas, muda o momento linear $\vec{P}$ do sistema. Da mesma forma, o momento linear só pode ser mudado por uma força externa, $\vec{F}_{res}$. Se não existe uma força externa, $\vec{P}$ *não pode* mudar.



A colisão de uma bola com um taco faz com que a bola se deforme. *(Foto de Harold E. Edgerton. ©The Harold and Esther Edgerton Family Trust, cortesia de Palm Press, Inc.)*

9-6 | Colisão e Impulso

O momento $\vec{p}$ de qualquer corpo que se comporta como uma partícula não pode variar, a menos que uma força externa atue sobre o corpo. Assim, por exemplo, podemos empurrar um corpo para mudar seu momento. Mais drasticamente, podemos fazer com que o corpo colida com um taco de beisebol. Em uma *colisão*, a força exercida sobre o corpo é de curta direção, tem um módulo elevado e muda bruscamente o momento do corpo. Colisões ocorrem freqüentemente na vida real, mas antes de discuti-las vamos falar de um tipo mais simples de colisão na qual um corpo que se comporta como partícula (um *projétil*) colide com outro objeto (um *alvo*).

Colisão Simples

Suponha que o projétil seja uma bola e o alvo seja um taco. A colisão dura pouco tempo, mas a força que age sobre a bola é suficiente para inverter o movimento. A Fig. 9-8 mostra um instantâneo da colisão. A bola sofre a ação de uma força $\vec{F}(t)$ que varia durante a colisão e muda o momento linear $\vec{p}$ da bola. Esta variação está relacionada à força através da segunda lei de Newton, escrita na forma $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. Assim, no intervalo de tempo dt, a variação do momento da bola é dada por

$$d\vec{p} = \vec{F}(t)\,dt. \quad (9\text{-}28)$$

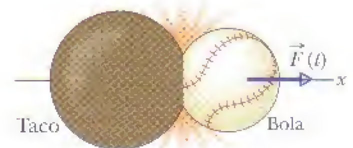


FIG. 9-8 A força $\vec{F}(t)$ age sobre uma bola quando a bola e um taco colidem.

Podemos determinar a variação total do momento da bola provocada pela colisão integrando ambos os membros da Eq. 9-28 de um instante t_i imediatamente antes da colisão até um instante t_f imediatamente após a colisão:

$$\int_{t_i}^{t_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt. \quad (9\text{-}29)$$

O lado esquerdo desta equação nos dá a variação do momento: $\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$. O lado direito, que é uma medida tanto da intensidade quanto da duração da força da colisão, é chamado de **impulso** da colisão e representado pelo símbolo $\vec{J}$:

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt \quad \text{(definição de impulso)}. \quad (9\text{-}30)$$

Assim, a variação do momento de um objeto é igual ao impulso exercido sobre o objeto:

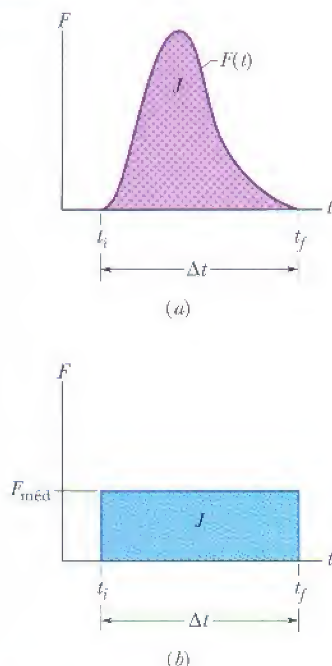


FIG. 9-9 (*a*) A curva mostra o módulo da força dependente do tempo $F(t)$ que age sobre a bola na colisão da Fig. 9-8. A área sob a curva é igual ao módulo do impulso $\vec{J}$ sobre a bola na colisão. (*b*) A altura do retângulo representa a força média $F_{méd}$ que age sobre a bola no intervalo Δt. A área do retângulo é igual à área sob a curva do item (*a*) e, portanto, também é igual ao módulo do impulso $\vec{J}$ na colisão.

$$\Delta\vec{p} = \vec{J} \quad \text{(teorema do momento linear e impulso).} \tag{9-31}$$

Esta expressão também pode ser escrita na forma vetorial

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{J} \tag{9-32}$$

e na forma de componentes, como

$$\Delta p_x = J_x \tag{9-33}$$

e

$$p_{fx} - p_{ix} = \int_{t_i}^{t_f} F_x \, dt. \tag{9-34}$$

Se a função $\vec{F}(t)$ é conhecida, podemos calcular $\vec{J}$ (e, portanto, a variação do momento) integrando a função. Se temos um gráfico de $\vec{F}$ em função do tempo t, podemos obter $\vec{J}$ calculando a área entre a curva e o eixo t, como na Fig. 9-9*a*. Em muitas situações não sabemos como a força varia com o tempo, mas conhecemos o módulo médio $F_{méd}$ da força e a duração Δt $(= t_f - t_i)$ da colisão. Nesse caso, podemos escrever o módulo do impulso como

$$J = F_{méd}\,\Delta t. \tag{9-35}$$

A Fig. 9-9*b* mostra a força média em função do tempo. A área sob a curva neste gráfico é igual à área sob a curva da força real na Fig. 9-9*a*, uma vez que as duas áreas são iguais a J, o módulo do impulso.

Em vez de nos preocuparmos com a bola, poderíamos ter concentrado nossa atenção no taco na Fig. 9-8. De acordo com a terceira lei de Newton, a força experimentada pelo taco em qualquer instante tem o mesmo módulo que a força experimentada pela bola e o sentido oposto. De acordo com a Eq. 9-30, isso significa que o impulso experimentado pelo taco tem o mesmo módulo que o impulso experimentado pela bola e o sentido oposto.



TESTE 4 Um pára-quedista, cujo pára-quedas não abriu, cai em um monte de neve e sofre ferimentos leves. Se caísse em um terreno sem neve o tempo de parada teria sido 10 vezes mais curto e a colisão teria sido fatal. A presença da neve aumenta, diminui ou mantém inalterados os valores (a) da variação do momento do pára-quedista, (b) do impulso experimentado pelo pára-quedista e (c) da força experimentada pelo pára-quedista?

Colisões em Série

Vamos considerar agora a força experimentada por um corpo quando sofre uma série de colisões iguais. Imagine, por exemplo, que uma daquelas máquinas de arremessar bolas de tênis tenha sido ajustada para disparar bolas em uma parede, uma após a outra. Cada colisão produz uma força sobre a parede, mas não é essa força que estamos procurando; estamos interessados na força média $F_{méd}$ a que a parede é submetida durante o bombardeio, ou seja, a força média associada a um grande número de colisões.

Na Fig. 9-10, projéteis igualmente espaçados, de massas iguais m e momentos iguais $m\vec{v}$, deslocam-se ao longo de um eixo x e colidem com um alvo fixo. Seja n o número de projéteis que colidem em um intervalo de tempo Δt. Como o movimento é apenas ao longo do eixo x, podemos usar as componentes dos momentos ao longo desse eixo. Assim, cada projétil tem momento inicial mv e sofre uma variação Δp do momento linear por causa da colisão. A variação total do momento linear de n projéteis durante o intervalo Δt é $n\,\Delta p$. O impulso resultante $\vec{J}$ a que é submetido o alvo no intervalo Δt está orientado ao longo do eixo x e tem o mesmo módulo $n\,\Delta p$ que a variação do momento linear, mas o sentido contrário. Podemos escrever essa relação na forma

$$J = -n\,\Delta p, \tag{9-36}$$

onde o sinal negativo indica que J e Δp têm sentidos opostos.

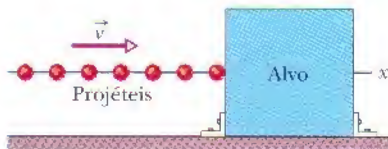


FIG. 9-10 Uma série de projéteis, todos com o mesmo momento linear, colide com um alvo fixo. A força média $F_{méd}$ exercida sobre o alvo aponta para a direita e tem um módulo que depende da taxa com a qual os projéteis colidem com o alvo ou, alternativamente, da taxa com a qual a massa colide com o alvo.

Combinando as Eqs. 9-35 e 9-36, podemos obter a força média $F_{méd}$ que age sobre o alvo durante as colisões:

$$F_{méd} = \frac{J}{\Delta t} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m\,\Delta v. \tag{9-37}$$

Esta equação expressa $F_{méd}$ em termos de $n/\Delta t$, a taxa com a qual os projéteis colidem com o alvo, e Δv, a variação de velocidade dos projéteis.

Se os projéteis param após o choque, a variação de velocidade é dada por

$$\Delta v = v_f - v_i = 0 - v = -v. \tag{9-38}$$

onde v_i (= v) e v_f (= 0) são as velocidades antes e depois da colisão, respectivamente. Se em vez disso os projéteis ricocheteiam no alvo sem nenhuma mudança na velocidade escalar, $v_f = -v$ e, portanto,

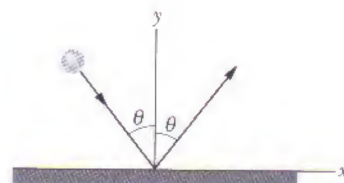
$$\Delta v = v_f - v_i = -v - v = -2v. \tag{9-39}$$

No intervalo de tempo Δt, uma quantidade de massa $\Delta m = nm$ colide com o alvo. Com este resultado, podemos reescrever a Eq. 9-37 na forma

$$F_{méd} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v. \tag{9-40}$$

Esta equação expressa a força média $F_{méd}$ em termos de $\Delta m/\Delta t$, a taxa com a qual a massa colide com o alvo. Mais uma vez, podemos substituir Δv pelo resultado da Eq. 9-38 ou 9-39, dependendo do que acontece com os projéteis após as colisões.

TESTE 5 A figura mostra uma vista superior de uma bola ricocheteando em uma parede vertical sem que sua velocidade escalar varie. Considere a variação $\Delta\vec{p}$ do momento linear da bola. (a) Δp_x é positiva, negativa ou nula? (b) Δp_y é positiva, negativa ou nula? (c) Qual é a orientação de $\Delta\vec{p}$?



Exemplo 9-4

Quando um carneiro montês se choca de frente com outro macho, a taxa com a qual sua velocidade escalar se anula é muito elevada. A Fig. 9-11 mostra um gráfico típico da aceleração a em função do tempo t para um choque desse tipo, com a aceleração sendo tomada como negativa para corresponder a uma velocidade inicialmente positiva. O módulo máximo da aceleração é 34 m/s² e a duração da colisão é de 0,27 s. Suponha que a massa de um carneiro é 90,0 kg. Qual são os módulos do impulso e da força média durante o choque?

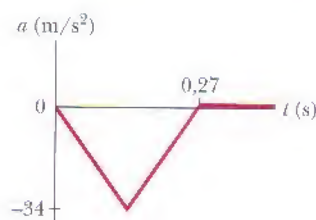


FIG. 9-11 Variação com o tempo da aceleração de um carneiro montês durante um choque com outro carneiro.

IDÉIAS-CHAVE (1) De acordo com a Eq. 9-30 [$\vec{J} = \int \vec{F}(t)\,dt$], o impulso é definido como a integral da força em relação ao tempo. (2) A força média está relacionada ao impulso e ao tempo através da Eq. 9-35 ($J = F_{méd}\Delta t$).

Cálculos: Não podemos usar diretamente a Eq. 9-30 porque não conhecemos a função $\vec{F}(t)$. Entretanto, dispomos de um gráfico de a em função de t que pode ser transformado em um gráfico de F em função de t multiplicando o eixo das acelerações pela massa de 90,0 kg. Em seguida, podemos integrar graficamente a função $F(t)$, calculando a área entre a curva e o eixo dos tempos. Como a curva tem a forma de um triângulo, o módulo do impulso é dado por

$$J = \text{área} = \tfrac{1}{2}(0{,}27\text{ s})(90{,}0\text{ kg})(34{,}0\text{m/s}^2)$$
$$= 4{,}13 \times 10^2\text{ N}\cdot\text{s} \approx 4{,}1 \times 10^2\text{ N}\cdot\text{s} \quad \text{(Resposta)}$$

Para calcular o módulo da força média, escrevemos

$$F_{méd} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{4{,}13\times10^2\text{ N}\cdot\text{s}}{0{,}27\text{ s}}$$
$$= 1{,}5 \times 10^3\text{ N} \quad \text{(Resposta)}$$

Comentário: O impulso é igual à variação do momento do carneiro durante a colisão. Assim, o tamanho do impulso depende da massa do carneiro e de sua velocidade

no momento da colisão. Para vencer a luta um carneiro precisa do maior momento possível. Entretanto, se os carneiros se chocassem cabeça com cabeça ou os chifres de um carneiro de chocassem com a cabeça do outro, a duração da colisão seria 10 vezes menor que aquela que aparece no enunciado do problema e a força média seria 10 vezes maior que o valor que acabamos de calcular. Uma força tão grande deixaria os adversários desacordados ou mortos, um resultado que não agradaria à fêmea que está sendo disputada. Os machos evitam esse desfecho desagradável dispondo de chifres flexíveis, que cedem um pouco durante a colisão, prolongando-a e reduzindo a força para cerca de 1500 N, um valor que o crânio, o cérebro e os músculos podem suportar. Assim, se um carneiro perde um chifre em uma luta pode não sobreviver à luta seguinte.

Exemplo 9-5

Colisão entre um carro de corrida e um muro de proteção. A Fig. 9-12*a* é uma vista superior da trajetória de um carro de corrida ao colidir com um muro de proteção. Antes da colisão o carro está se movendo com uma velocidade escalar v_i = 70 m/s, ao longo de uma linha reta que faz um ângulo de 30° com o muro. Após a colisão está se movendo com velocidade escalar v_f = 50 m/s, ao longo de uma linha reta que faz um ângulo de 10° com o muro. A massa m do piloto é de 80 kg.

(a) Qual é o impulso $\vec{J}$ a que o piloto é submetido no momento da colisão?

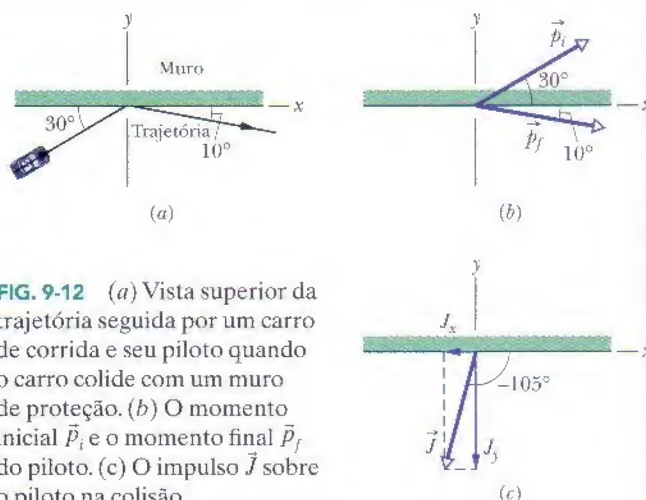


FIG. 9-12 (*a*) Vista superior da trajetória seguida por um carro de corrida e seu piloto quando o carro colide com um muro de proteção. (*b*) O momento inicial $\vec{p}_i$ e o momento final $\vec{p}_f$ do piloto. (c) O impulso $\vec{J}$ sobre o piloto na colisão.

IDÉIAS-CHAVE Podemos tratar o piloto como uma partícula, e assim aplicar os princípios de física discutidos nesta seção. Entretanto, não podemos calcular $\vec{J}$ diretamente a partir da Eq. 9-30 porque não conhecemos a força $\vec{F}(t)$ que age sobre o piloto durante a colisão. Em outras palavras, não dispomos de uma função nem de um gráfico que permita obter o valor de $\vec{J}$ por integração. Podemos, porém, usar a Eq. 9-32 ($\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$) para calcular $\vec{J}$ a partir da variação do momento linear.

Cálculos: A Fig. 9-12*b* mostra o momento do piloto antes da colisão, $\vec{p}_i$ (que faz um ângulo de 30° com o semi-eixo x positivo), e o momento do piloto depois da colisão, $\vec{p}_f$ (que faz um ângulo de −10° com o semi-eixo x positivo). De acordo com as Eqs. 9-32 e 9-22 ($\vec{p} = m\vec{v}$), podemos escrever

$$\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i). \qquad (9\text{-}41)$$

Poderíamos calcular o lado direito desta equação diretamente ou com o auxílio de uma calculadora, pois sabemos que m é 80 kg, $\vec{v}_f$ tem um módulo de 50 m/s e um ângulo de −10° e $\vec{v}_i$ tem um módulo de 70 m/s e um ângulo de 30°. Em vez disso, porém, vamos resolver a Eq. 9-41 separando-a em componentes.

Componente x: Para o eixo x, temos:

$$\begin{aligned} J_x &= m(v_{fx} - v_{ix}) \\ &= (80\text{ kg})[(50\text{ m/s})\cos(-10°) - (70\text{ m/s})\cos 30°] \\ &= -910\text{ kg}\cdot\text{m/s}. \end{aligned}$$

Componente y: Para o eixo y, temos:

$$\begin{aligned} J_y &= m(v_{fy} - v_{iy}) \\ &= (80\text{ kg})[(50\text{ m/s})\,\text{sen}(-10°) - (70\text{ m/s})\,\text{sen}\,30°] \\ &= -3495\text{ kg}\cdot\text{m/s} \approx -3500\text{ kg}\cdot\text{m/s}. \end{aligned}$$

Impulso: O impulso é, portanto,

$$\vec{J} = (-910\hat{\text{i}} - 3500\hat{\text{j}})\text{ kg}\cdot\text{m/s}, \qquad \text{(Resposta)}$$

o que significa que o módulo do impulso é

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = 3616\text{ kg}\cdot\text{m/s} \approx 3600\text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

O ângulo de $\vec{J}$ é dado por

$$\theta = \tan^{-1}\frac{J_y}{J_x} \qquad \text{(Resposta)}$$

que, de acordo com uma calculadora, é de 75,4°. Lembre-se de que o resultado fisicamente correto do arco tangente pode ser o indicado pela calculadora ou o indicado pela calculadora mais 180°. Para verificar qual dos dois é o resultado correto podemos desenhar as componentes de $\vec{J}$ (Fig. 9-12*c*). Fazendo isso, verificamos que θ é na verdade 75,4° + 180° = 255,4°, que também pode ser escrito como

$$\theta = -105°. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) A colisão dura 14 ms. Qual é o módulo da força média que o piloto experimenta durante a colisão?

IDÉIA-CHAVE De acordo com a Eq. 9-35 ($J = F_{méd}\Delta t$), o módulo $F_{méd}$ da força média é a razão entre o módulo do impulso, J, e a duração Δt da colisão.

Cálculos: Temos:

$$F_{méd} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{3616 \text{ kg}\cdot\text{m/s}}{0{,}014 \text{ s}}$$
$$= 2{,}583 \times 10^5 \text{ N} \approx 2{,}6 \times 10^5 \text{ N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Usando a relação $F = ma$ com m = 80 kg, é fácil mostrar que o módulo da aceleração do piloto durante a colisão é $3{,}22 \times 10^3$ m/s^2 = $329g$. Uma aceleração tão elevada seria provavelmente fatal.

Normas de segurança: Os engenheiros mecânicos tentam reduzir os riscos dos pilotos de corrida projetando muros mais "macios" para que as colisões durem mais tempo. Se a colisão examinada neste exemplo durasse 10 vezes mais e todos os outros parâmetros permanecessem iguais, os módulos da força média e da aceleração média seriam 10 vezes menores e o piloto provavelmente sobreviveria.

9-7 | Conservação do Momento Linear

Suponha que a força externa resultante $\vec{F}_{res}$ (e, portanto, o impulso $\vec{J}$) que age sobre um sistema de partículas seja zero (o sistema seja isolado) e que nenhuma partícula entre ou saia do sistema (o sistema seja fechado). Fazendo $\vec{F}_{res} = 0$ na Eq. 9-27, temos $d\vec{p}/dt = 0$ e, portanto,

$$\vec{P} = \text{constante} \quad \text{(sistema fechado e isolado).} \qquad (9\text{-}42)$$

Em palavras

Se um sistema de partículas não está submetido a nenhuma força externa, o momento linear total $\vec{P}$ do sistema não pode variar.

Este resultado, conhecido como **lei de conservação do momento linear**, também pode ser escrito na forma

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \quad \text{(sistema fechado e isolado).} \qquad (9\text{-}43)$$

Em palavras, esta equação significa que, em um sistema isolado,

$$\begin{pmatrix}\text{momento linear total}\\ \text{em um instante inicial } t_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{momento linear total}\\ \text{em um instante posterior } t_f\end{pmatrix}.$$

Atenção: O momento não deve ser confundido com energia. Nos exemplos desta seção o momento é conservado, mas a energia certamente não.

Como as Eqs. 9-42 e 9-43 são equações vetoriais, cada uma equivale a três equações para a conservação do momento linear em três direções mutuamente perpendiculares, como, digamos, em um sistema de coordenadas xyz. Dependendo das forças presentes no sistema, o momento linear pode ser conservado em uma ou duas direções, mas não em todas. Entretanto,

Se uma das componentes da força *externa* aplicada a um sistema fechado é nula, a componente do momento linear do sistema em relação ao mesmo eixo não pode variar.

Suponha, por exemplo, que você arremesse uma laranja do outro lado da sala. Durante o percurso a única força externa que age sobre a laranja (que estamos considerando como o sistema) é a força gravitacional $\vec{F}_g$, dirigia verticalmente para baixo. Assim, a componente vertical do momento linear da laranja varia, mas já que nenhuma força externa horizontal age sobre a laranja a componente horizontal do momento linear não pode variar.

Note que estamos falando das forças externas que agem sobre um sistema fechado. Embora forças internas possam mudar o momento linear de partes do sistema, não podem mudar o momento linear total do sistema.

Os exemplos desta seção envolvem explosões que são unidimensionais (o que significa que os movimentos antes e depois da explosão ocorrem ao longo de um único eixo) ou bidimensionais (o que significa que os movimentos ocorrem em um plano que contém dois eixos). Nas seções seguintes consideramos colisões unidimensionais e bidimensionais.



TESTE 6 Um artefato inicialmente em repouso sobre um piso sem atrito explode em dois pedaços, que deslizam pelo piso após a explosão. Um dos pedaços desliza no sentido positivo de um eixo x. (a) Qual é a soma dos momentos dos dois pedaços após a explosão? (c) O segundo pedaço pode se mover em uma direção diferente da do eixo x? (c) Qual é a orientação do momento do segundo pedaço?

Exemplo 9-6

Explosão unidimensional: Uma urna de votação de massa m = 6,0 kg desliza com velocidade v = 4,0 m/s em um piso sem atrito no sentido positivo de um eixo x. A urna explode em dois pedaços. Um pedaço, de massa m_1 = 2,0 kg, se move no sentido positivo do eixo x com v_1 = 8,0 m/s. Qual é a velocidade do segundo pedaço, de massa m_2?

IDÉIAS-CHAVE (1) Poderíamos calcular a velocidade do segundo pedaço se conhecêssemos seu momento, uma vez que já sabemos que sua massa é $m_2 = m - m_1 = 4{,}0$ kg. (2) Como o momento é conservado, podemos relacionar os momentos dos dois pedaços ao momento original da urna.

Cálculos: Vamos tomar o piso como referência. Nosso sistema, que consiste inicialmente na urna e depois nos dois pedaços, é fechado mas não isolado, pois tanto a caixa quanto os pedaços sofrem a ação da força normal do piso e da força gravitacional. Entretanto, essas forças são verticais e, portanto, não podem mudar a componente horizontal do momento do sistema. Essa componente também não pode ser alterada pelas forças associadas à explosão, pois essas forças são internas ao sistema. Assim, a componente horizontal do momento do sistema é conservada e podemos aplicar a Eq. 9-43 ao longo do eixo x.

O momento inicial do sistema é o da caixa:

$$\vec{P}_i = m\vec{v}.$$

Os momentos finais dos dois pedaços são

$$\vec{P}_{f1} = m_1\vec{v}_1 \quad \text{e} \quad \vec{P}_{f2} = m_2\vec{v}_2.$$

O momento final total do sistema, $\vec{P}_f$, é a soma vetorial dos momentos dos dois pedaços:

$$\vec{P}_f = \vec{P}_{f1} + \vec{P}_{f2} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2.$$

Como todas as velocidades e momentos neste problema são vetores ao longo do eixo x, podemos escrevê-los em termos de suas componentes x. Fazendo isso ao aplicar a Eq. 9-43, obtemos:

$$P_i = P_f$$

ou

$$mv = m_1v_1 + m_2v_2.$$

Substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$(6{,}0\text{ kg})(4{,}0\text{ m/s}) = (2{,}0\text{ kg})(8{,}0\text{ m/s}) + (4{,}0\text{ kg})v_2$$

e portanto $v_2 = 2{,}0$ m/s. (Resposta)

Como o resultado é positivo, o segundo pedaço se move no sentido positivo do eixo x.

Exemplo 9-7

Explosão unidimensional: A Fig. 9-13a mostra um rebocador espacial e um módulo de carga, de massa total M, viajando ao longo de um eixo x no espaço sideral. Eles têm uma velocidade inicial $\vec{v}_i$ de módulo 2100 km/h em relação ao Sol. Com uma pequena explosão o rebocador ejeta o módulo de carga, de massa 0,20M (Fig. 9-13b). Depois disso, o rebocador passa a viajar 500 km/h mais depressa que o módulo ao longo do eixo x, ou seja, a velocidade relativa v_{rel} entre o cargueiro e o módulo é de 500 km/h. Qual é, nesse momento, a velocidade $\vec{v}_{RS}$ do rebocador em relação ao Sol?

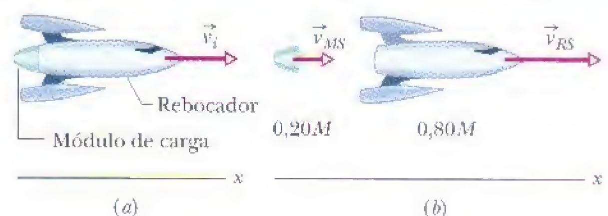


FIG. 9-13 (a) Um rebocador espacial, com um módulo de carga, movendo-se com velocidade inicial $\vec{v}_i$. (b) O rebocador ejetou o módulo de carga; agora as velocidades em relação ao Sol são $\vec{v}_{MS}$ para o módulo e $\vec{v}_{RS}$ para o rebocador.

IDÉIA-CHAVE Como o sistema rebocador-módulo é fechado e isolado, o momento linear total do sistema é conservado, ou seja,

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f, \tag{9-44}$$

onde os índices i e f indicam os valores antes e depois da ejeção, respectivamente.

Cálculos: Como o movimento é ao longo de um único eixo, podemos escrever os momentos e velocidades em termos de suas componentes x. Antes da ejeção, temos:

$$P_i = Mv_i. \tag{9-45}$$

Seja v_{MS} a velocidade do módulo ejetado em relação ao Sol. O movimento linear total do sistema após a ejeção é dado por

$$P_f = (0{,}20M)v_{MS} + (0{,}80M)v_{RS}, \tag{9-46}$$

onde o primeiro termo do lado direito é o momento linear do módulo de carga e o segundo termo é o momento do rebocador.

Não conhecemos a velocidade v_{MS} do módulo em relação ao Sol, mas podemos relacioná-la às velocidades conhecidas através da equação

$$\begin{pmatrix}\text{velocidade do}\\ \text{rebocador em}\\ \text{relação ao Sol}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{velocidade do}\\ \text{rebocador em}\\ \text{relação ao módulo}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{velocidade do}\\ \text{módulo em}\\ \text{relação ao Sol}\end{pmatrix}$$

Em símbolos, isto nos dá

$$v_{RS} = v_{\text{rel}} + v_{MS} \tag{9-47}$$

ou

$$v_{MS} = v_{RS} - v_{\text{rel}}.$$

Substituindo esta expressão para v_{MS} na Eq. 9-46 e substituindo as Eqs. 9-45 e 9-46 na Eq. 9-44, obtemos

$$Mv_i = 0{,}20M(v_{RS} - v_{\text{rel}}) + 0{,}80Mv_{RS},$$

o que nos dá

$$v_{RS} = v_i + 0{,}20v_{\text{rel}},$$

ou

$$v_{RS} = 2100 \text{ km/h} + (0{,}20)(500 \text{ km/h})$$
$$= 2200 \text{ km/h}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Exemplo 9-8

Explosão bidimensional: Ao explodir, uma cabeça-de-negro colocada no interior de um coco vazio de massa M, inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito, quebra o coco em três pedaços, que deslizam sobre a superfície. Uma vista superior é mostrada na Fig. 9-14*a*. O pedaço C, de massa $0{,}30M$, tem uma velocidade escalar final $v_{fC} = 5{,}0$ m/s.

(a) Qual é a velocidade do pedaço B, de massa $0{,}20M$?

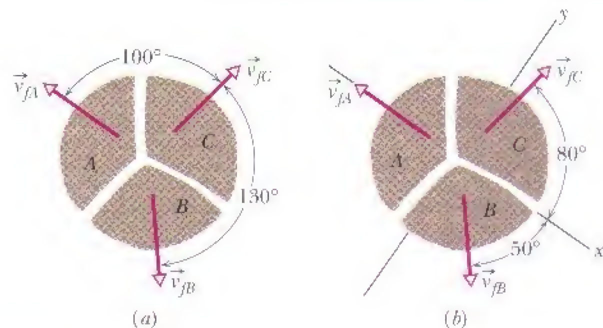


FIG. 9-14 Três pedaços de um coco que explodiu se afastam em três direções ao longo de um piso sem atrito. (*a*) Vista superior do evento. (*b*) O mesmo com um sistema de eixos bidimensional superposto.

IDÉIA-CHAVE Em primeiro lugar, precisamos saber se o momento linear é conservado. Observamos que (1) o coco e seus pedaços formam um sistema fechado, (2) as forças da explosão são internas ao sistema e (3) nenhuma força externa age sobre o sistema. Assim, o momento linear do sistema é conservado.

Cálculos: Para começar, introduzimos um sistema de coordenadas xy no sistema, como mostra a Fig. 9-14*b*, com o sentido negativo do eixo x coincidindo com o sentido de $\vec{v}_{fA}$. O eixo x faz 80° com a direção de $\vec{v}_{fC}$ e 50° com a direção de $\vec{v}_{fB}$.

O momento linear é conservado separadamente ao longo de cada eixo. Vamos usar o eixo y e escrever

$$P_{iy} = P_{fy}, \tag{9-48}$$

onde o índice i indica o valor inicial (antes da explosão), o índice f o valor final e o índice y a componente y de $\vec{P}_i$ ou $\vec{P}_f$.

A componente P_{iy} do momento linear inicial é zero, pois o coco está inicialmente em repouso. Para obter uma expressão para P_{fy} determinamos a componente y do momento linear final de cada pedaço usando a versão para a componente y da Eq. 9-22 ($p_y = mv_y$):

$$P_{fA,y} = 0,$$
$$P_{fB,y} = -0{,}20Mv_{fB,y} = -0{,}20Mv_{fB} \operatorname{sen} 50°,$$
$$P_{fC,y} = 0{,}30Mv_{fC,y} = 0{,}30Mv_{fC} \operatorname{sen} 80°,$$

(Note que $p_{fA,y} = 0$ por causa de nossa escolha de eixos.) A Eq. 9-48 pode ser escrita na forma

$$P_{iy} = P_{fy} = P_{fA,y} + P_{fB,y} + P_{fC,y}.$$

Nesse caso, com $v_{fC} = 5{,}0$ m/s, temos:

$$0 = 0 - 0{,}20Mv_{fB} \operatorname{sen} 50° + (0{,}30M)(5{,}0 \text{ m/s}) \operatorname{sen} 80°,$$

e, portanto,

$$v_{fB} = 9{,}64 \text{ m/s} \approx 9{,}6 \text{ m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a velocidade escalar do pedaço A?

Cálculos: Como o momento linear também é conservado ao longo do eixo x, temos:

$$P_{ix} = P_{fx}, \qquad (9\text{-}49)$$

onde P_{ix} =0, pois o coco está inicialmente em repouso. Para obter P_{fx}, determinamos as componentes x do momento linear final de cada pedaço usando o fato de que o pedaço A deve ter uma massa de $0{,}50M$ ($= M - 0{,}20M - 0{,}30M$):

$$p_{fA,x} = -0{,}50Mv_{fA},$$
$$p_{fB,x} = 0{,}20Mv_{fB,x} = 0{,}20Mv_{fB}\cos 50°,$$
$$p_{fC,x} = 0{,}30Mv_{fC,x} = 0{,}30Mv_{fC}\cos 80°.$$

A Eq. 9-49 pode ser escrita como

$$P_{ix} = P_{fx} = p_{fA,x} + p_{fB,x} + p_{fC,x}.$$

Nesse caso, com $v_{fC} = 5{,}0$ m/s e $v_{fB} = 9{,}64$ m/s, temos:

$$0 = -0{,}50Mv_{fA} + 0{,}20M(9{,}64 \text{ m/s})\cos 50° + 0{,}30M(5{,}0 \text{ m/s})\cos 80°,$$

e, portanto,

$$v_{fA} = 3{,}0 \text{ m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

TÁTICA PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 2: Conservação do Momento Linear Em problemas que envolvem a conservação do momento linear, certifique-se primeiro de que você escolheu um sistema fechado e isolado. *Fechado* significa que a massa do sistema é constante (nenhuma partícula entra ou sai do sistema). *Isolado* significa que a força externa total que age sobre o sistema é nula. Se o sistema não é isolado, lembre-se de que as componentes do momento linear são conservadas separadamente. Assim, é possível aplicar a lei de conservação às direções nas quais a força externa total é zero, mesmo que a força externa total não seja zero em outras direções.

A seguir, selecione dois estados apropriados do sistema (que você pode chamar de estados inicial e final) e escreva expressões para o momento linear do sistema nesses dois estados. Ao escrever essas expressões certifique-se de que você sabe qual sistema de referência está usando e de que está incluindo todo o sistema, sem deixar de fora alguma parte e sem incluir objetos que não pertencem ao sistema.

Finalmente, iguale as expressões de $\vec{P}_i$ e $\vec{P}_f$ e determine a solução pedida.

9-8 | Momento e Energia Cinética em Colisões

Na Seção 9-6 consideramos a colisão de dois corpos que se comportavam como partículas, mas nos concentramos em apenas um dos corpos de cada vez. Nas próximas seções mudaremos o enfoque para o sistema como um todo, supondo que se trata de um sistema fechado e isolado. Na Seção 9-7 discutimos uma regra para sistemas desse tipo: o momento linear total $\vec{P}$ do sistema não pode variar porque não há uma força externa para causar essa variação. Esta é uma regra muito importante, pois permite determinar o resultado de uma colisão *sem conhecer* detalhes da colisão (como a extensão dos danos).

Também estaremos interessados na energia cinética total de um sistema de dois corpos que colidem. Se a energia cinética total não é alterada pela colisão, a energia cinética do sistema é *conservada* (é a mesma antes e depois da colisão). Este tipo de colisão é chamado de **colisão elástica**. Nas colisões entre corpos comuns, que acontecem no dia-a-dia, como as colisões entre dois carros ou entre uma bola e um taco, parte da energia é sempre transferida de energia cinética para outras formas de energia, como a energia térmica e a energia sonora. Isso significa que a energia cinética não é conservada. Este tipo de colisão é chamado de **colisão inelástica**.

Em algumas situações, entretanto, podemos considerar uma colisão de corpos comuns como sendo *aproximadamente* elástica. Suponha que você deixe cair uma bola de borracha maciça em um piso duro. Se a colisão entre a bola e o piso (ou a Terra) fosse elástica, a bola não perderia energia cinética na colisão e voltaria à altura original. Na prática, a altura atingida pela bola após a colisão é ligeiramente menor, o que mostra que parte da energia cinética é perdida na colisão e, portanto, que a colisão é inelástica. Entretanto, podemos optar por desprezar a pequena quantidade de energia cinética perdida e considerar a colisão como sendo elástica.

A colisão inelástica de dois corpos sempre envolve uma perda de energia cinética por parte do sistema. A maior perda ocorre quando os dois corpos permanecem

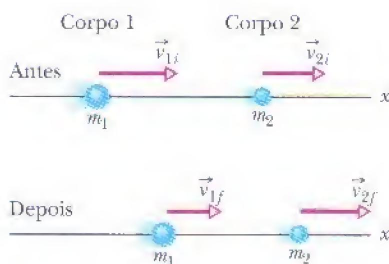


FIG. 9-15 Os corpos 1 e 2 se movem ao longo de um eixo x, antes e depois de sofrerem uma colisão inelástica.

juntos, caso em que a colisão é chamada de **colisão perfeitamente inelástica**. A colisão de uma bola de beisebol com um taco é inelástica; entretanto, a colisão de uma bola de massa de modelar com um taco é perfeitamente inelástica, pois neste caso a bola adere ao bastão.

9-9 | Colisões Inelásticas em Uma Dimensão

Colisão Inelástica Unidimensional

A Fig. 9-15 mostra dois corpos pouco antes e logo depois de sofrerem uma colisão unidimensional. As velocidades antes da colisão (índice i) e depois da colisão (índice f) estão indicadas. Os dois corpos constituem um sistema fechado e isolado. Podemos escrever a lei de conservação do momento linear para este sistema de dois corpos como

$$\begin{pmatrix}\text{momento total } \vec{P}_i \\ \text{antes da colisão}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{momento total } \vec{P}_f \\ \text{depois da colisão}\end{pmatrix},$$

ou, em símbolos,

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \qquad \text{(conservação do momento linear).} \qquad (9\text{-}50)$$

Como o movimento é unidimensional, podemos substituir os vetores por componentes em relação a um único eixo. Assim, a partir da equação $p = mv$ podemos escrever a Eq. 9-50 na forma

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}. \qquad (9\text{-}51)$$

Se conhecemos os valores, digamos, das massas, das velocidades iniciais e de uma das velocidades finais, podemos calcular a outra velocidade final usando a Eq. 9-51.

Colisões Perfeitamente Inelásticas Unidimensionais

A Fig. 9-16 mostra dois corpos antes e depois de sofrerem uma colisão perfeitamente inelástica (ou seja, eles permanecem unidos após a colisão). O corpo de massa m_2 está inicialmente em repouso ($v_{2i} = 0$). Podemos nos referir a esse corpo como *alvo* e ao corpo incidente como *projétil*. Após a colisão, dois corpos se movem juntos com velocidade V. Nesta situação, podemos escrever a Eq. 9-51 como

$$m_1v_{1i} = (m_1 + m_2)V \qquad (9\text{-}52)$$

ou

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_{1i}. \qquad (9\text{-}53)$$

Se conhecemos os valores, digamos, das massas e da velocidade inicial v_{1i} do projétil, podemos calcular a velocidade final V usando a Eq. 9-53. Note que V é sempre menor que v_{1i}, já que a razão $m_1/(m_1 + m_2)$ é sempre menor do que 1.

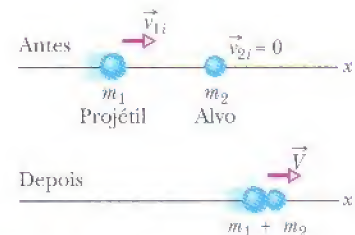


FIG. 9-16 Uma colisão perfeitamente inelástica entre dois corpos. Antes da colisão o corpo de massa m_2 está em repouso e o corpo de massa m_1 está se movendo em direção a ele. Após a colisão os corpos unidos se movem com a mesma velocidade $\vec{V}$.

Velocidade do Centro de Massa

Em um sistema fechado e isolado a velocidade $\vec{v}_{CM}$ do centro de massa do sistema não pode variar em uma colisão porque, com o sistema isolado, não existe uma força externa para causar essa variação. Para obter uma expressão para $\vec{v}_{CM}$ vamos voltar ao sistema de dois corpos e à colisão unidimensional da Fig. 9-15. De acordo com a Eq. 9-25 ($\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$), podemos relacionar $\vec{v}_{CM}$ ao momento linear total $\vec{P}$ do sistema de dois corpos escrevendo

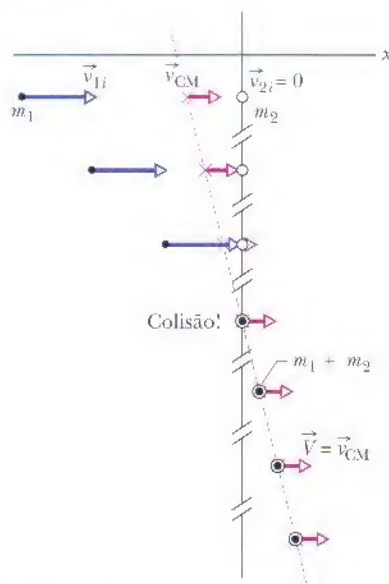


FIG. 9-17 (*a*) Alguns instantâneos do sistema de dois corpos da Fig. 9-16, que sofrem uma colisão perfeitamente inelástica. O centro de massa do sistema é mostrado em cada instantâneo. A velocidade $\vec{v}_{CM}$ do centro de massa não é afetada pela colisão. Como os corpos permanecem juntos após a colisão, a velocidade comum $\vec{V}$ deve ser igual a $\vec{v}_{CM}$.

$$\vec{P} = M\vec{v}_{CM} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM}. \tag{9-54}$$

O momento linear total $\vec{P}$ é conservado na colisão; assim, ele é dado por qualquer dos dois lados da Eq. 9-50. Vamos usar o lado esquerdo e escrever

$$\vec{P} = \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}. \tag{9-55}$$

Substituindo esta expressão de $\vec{P}$ na Eq. 9-54 e explicitando $\vec{v}_{CM}$, obtemos

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{P}}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}}{m_1 + m_2}. \tag{9-56}$$

O lado direito desta equação é uma constante, e $\vec{v}_{CM}$ tem este mesmo valor constante antes e depois da colisão.

Assim, por exemplo, a Fig. 9-17 mostra, em uma série de instantâneos, o movimento do centro de massa para a colisão perfeitamente inelástica da Fig. 9-16. O corpo 2 é o alvo, e seu momento linear inicial na Eq. 9-56 é $\vec{p}_{2i} = m_2\vec{v}_{2i} = 0$. O corpo 1 é o projétil, e seu momento linear inicial na Eq. 9-56 é $\vec{p}_{1i} = m_1\vec{v}_{1i}$. Note que antes e depois da colisão o centro de massa se move com velocidade constante para a direita. Depois da colisão a velocidade final V comum aos corpos é igual a $\vec{v}_{CM}$, uma vez que a partir desse momento o centro de massa coincide com o conjunto formado pelos dois corpos.

TESTE 7 O corpo 1 e o corpo 2 sofrem uma colisão perfeitamente inelástica. Qual é seu momento linear final se seus momentos iniciais são, respectivamente, (a) 10 kg · m/s e 0; (b) 10 kg · m/s e 4 kg · m/s; (c) 10 kg · m/s e −4 kg · m/s?

Exemplo 9-9 Aumente sua capacidade

O *pêndulo balístico* era usado para medir a velocidade dos projéteis antes que os dispositivos eletrônicos fossem inventados. A versão mostrada na Fig. 9-18 era composta por um grande bloco de madeira de massa $M = 5{,}4$ kg, pendurado por duas cordas compridas. Uma bala de massa $m = 9{,}5$ g é disparada contra o bloco e sua velocidade se anula rapidamente. O sistema *bloco-bala* oscila para cima, com o centro de massa subindo uma distância $h = 6{,}3$ cm antes de o pêndulo parar momentaneamente no final de uma trajetória em arco de circunferência. Qual é a velocidade da bala antes da colisão?

IDÉIAS-CHAVE É fácil perceber que a altura h da subida depende da velocidade v da bala. Não podemos usar a conservação da energia mecânica para relacionar essas duas grandezas, porque certamente alguma energia é transferida da energia mecânica para outras formas (como energia térmica e a energia necessária para quebrar a madeira) quando a bala penetra no bloco. Entretanto, podemos dividir esse movimento complicado em duas etapas que podem ser analisadas separadamente: (1) a colisão entre a bala e o bloco e (2) a subida do sistema bala-bloco, na qual a energia mecânica *é* conservada.

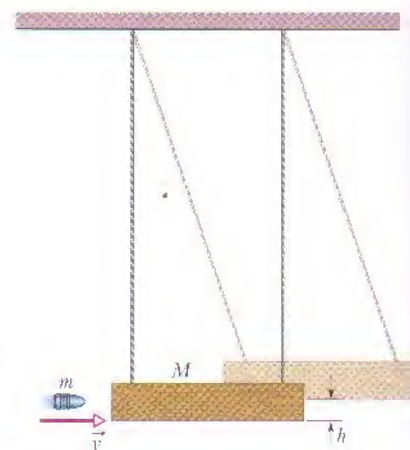


FIG. 9-18 Um pêndulo balístico, usado para medir a velocidade das balas.

Primeiro raciocínio: Como a colisão dentro do sistema bala-bloco dura muito pouco tempo, podemos fazer duas importantes suposições: (1) durante a colisão a força gravitacional e as forças das cordas sobre o bloco ainda estão equilibradas. Assim, durante a colisão o impulso externo total sobre o sistema bala-bloco é zero. Isso significa que o sistema está isolado e seu momento linear total é conservado. (2) A colisão é unidimensional no sentido de que a direção do movimento da bala e do bloco *imediatamente após a colisão* é a mesma da bala antes da colisão.

Como a colisão é unidimensional, o bloco está inicialmente em repouso e a bala fica presa no bloco, usamos a Eq. 9-53 para expressar a conservação do momento linear. Trocando os símbolos da Eq. 9-53 para os símbolos correspondentes do problema atual temos:

$$V = \frac{m}{m+M}v. \qquad (9\text{-}57)$$

Segundo raciocínio: Como a bala e o bloco agora oscilam juntos, a energia mecânica do sistema bala-bloco-Terra é conservada. (Esta energia mecânica não é afetada pela força das cordas sobre o bloco, porque essa força é sempre perpendicular à trajetória do bloco.) Vamos tomar o nível inicial do bloco como nível de referência de energia potencial gravitacional zero. Nesse caso, de acordo com a lei de conservação da energia mecânica, a energia cinética do sistema no início da oscilação deve ser igual à energia potencial gravitacional no ponto mais alto da oscilação. Como a velocidade da bala e do bloco no início da oscilação é a velocidade V imediatamente após a colisão, podemos escrever essa conservação como

$$\tfrac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh.$$

Combinando os resultados: Substituindo V na equação acima pelo seu valor, dado pela Eq. 9-57, obtemos:

$$v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$$
$$= \left(\frac{0{,}0095\text{ kg}+5{,}4\text{ kg}}{0{,}0095\text{ kg}}\right)\sqrt{(2)(9{,}8\text{ m/s}^2)(0{,}063\text{ m})}$$
$$= 630\text{ m/s} \qquad \text{(Resposta)}$$

O pêndulo balístico é uma espécie de "transformador", que troca a alta velocidade de um objeto leve (a bala) pela velocidade baixa (e, portanto, fácil de medir) de um objeto pesado (o bloco). No exemplo que acabamos de discutir, $v = 630$ m/s e $V = 1{,}11$ m/s.

Exemplo 9-10 Aumente sua capacidade

O tipo mais perigoso de colisão entre dois carros é a colisão frontal. Surpreendentemente, os estudos mostram que o risco de vida para o motorista é menor se existe um passageiro no carro. Vejamos por quê.

A Fig. 9-19 mostra dois carros iguais na iminência de um choque frontal em uma colisão perfeitamente inelástica e unidimensional ao longo de um eixo x. Durante a colisão os carros formam um sistema fechado. Vamos fazer a suposição razoável de que, durante a colisão, o impulso entre os carros é tão grande que podemos desprezar os impulsos relativamente pequenos associados às forças de atrito entre o piso e os pneus. Isso significa que podemos supor que nenhuma força externa age sobre o sistema dos dois carros.

A componente x da velocidade inicial do carro 1 ao longo do eixo x é $v_{1i} = +25$ m/s, e a do carro 2 é $v_{2i} = -25$ m/s. Durante a colisão, a força (e, portanto, o impulso) sobre cada carro provoca uma variação Δv da velocidade do carro. A probabilidade de um motorista morrer no acidente depende do módulo de Δv para o seu carro. Estamos interessados em calcular as variações Δv_1 e Δv_2 das velocidades dos dois carros.



FIG. 9-19 Dois carros na iminência de um choque frontal.

(a) Primeiro, suponha que cada carro transporte apenas o motorista. A massa total do carro 1 (incluindo o motorista 1) é $m_1 = 1400$ kg; a massa total do carro 2 (incluindo o motorista 2) é $m_2 = 1400$ kg. Quais são as variações Δv_1 e Δv_2 das velocidades dos carros?

IDÉIA-CHAVE Como o sistema é fechado e isolado, o momento linear total é conservado.

Cálculos: De acordo com a Eq. 9-51, podemos escrever:

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}. \qquad (9\text{-}58)$$

Como a colisão é perfeitamente inelástica, os carros ficam juntos após a colisão e, portanto, têm a mesma velocidade V. Substituindo v_{1f} e v_{2f} por V na Eq. 9-58 e explicitando V, temos:

$$V = \frac{m_1v_{1i} + m_2v_{2i}}{m_1 + m_2}. \qquad (9\text{-}59)$$

Substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$V = \frac{(1400\text{ kg})(+25\text{ m/s}) + (1400\text{ kg})(-25\text{ m/s})}{1400\text{ kg} + 1400\text{ kg}} = 0.$$

Assim, a variação na velocidade do carro 1 é

$$\Delta v_1 = v_{1f} - v_{1i} = V - v_{1i}$$
$$= 0 - (+25\text{ m/s}) = -25\text{ m/s}, \qquad \text{(Resposta)}$$

e a variação da velocidade do carro 2 é

$$\Delta v_2 = v_{2f} - v_{2i} = V - v_{2i}$$
$$= 0 - (-25\text{ m/s}) = +25\text{ m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Considere a mesma colisão, desta vez com um passageiro de 80 kg no carro 1. Quais são os novos valores de Δv_1 e Δv_2?

Cálculos: Repetindo os cálculos com $m_1 = 1480$ kg, obtemos

$$V = 0{,}694\text{ m/s},$$

o que nos dá

$$\Delta v_1 = -24{,}3 \text{ m/s}$$

e

$$\Delta v_2 = +25{,}7 \text{ m/s.} \qquad \text{(Resposta)}$$

(c) O módulo de Δv_1 é menor com o passageiro no carro. Como a probabilidade de o motorista morrer é diretamente proporcional a Δv, chegamos à conclusão de que a probabilidade é menor para o motorista 1.

Os dados a respeito de colisões frontais não incluem valores de Δv, mas incluem as massas dos carros e o fato de a colisão ter sido fatal ou não para o motorista. Ajustando uma função aos dados disponíveis, os pesquisadores constataram que o índice de mortalidade r_1 do motorista 1 é dado por

$$r_1 = c\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{1,79} \qquad (9\text{-}60)$$

onde c é uma constante. Justifique o fato de que a razão m_2/m_1 aparece nesta equação e use a equação para comparar os riscos de vida do motorista 1 com e sem passageiro.

Cálculos: Primeiro, escrevemos a Eq. 9-58 na forma

$$m_1(v_{1f} - v_{1i}) = -m_2(v_{2f} - v_{2i}).$$

Fazendo $v_{1f} - v_{1i} = \Delta v_1$ e $v_{2f} - v_{2i} = \Delta v_2$ e reagrupando os termos, obtemos:

$$\frac{m_2}{m_1} = -\frac{\Delta v_1}{\Delta v_2}. \qquad (9\text{-}61)$$

O índice de mortalidade de um motorista depende da variação Δv para esse motorista. De acordo com a Eq. 9-61, vemos que a razão entre os valores de Δv em uma colisão é o inverso da razão entre as massas; esta é a razão pela qual os pesquisadores podem relacionar o índice de mortalidade à razão entre as massas na Eq. 9-60.

De acordo com o item (a) e a Eq. 9-60, *sem* o passageiro, o índice de mortalidade para o motorista 1 é

$$r_1 = c\left(\frac{1400 \text{ kg}}{1400 \text{ kg}}\right)^{1,79} = c. \qquad (9\text{-}62)$$

De acordo com o item (b) e a Eq. 9-60, *com* o passageiro o índice de mortalidade para o motorista 1 é

$$r_1' = c\left(\frac{1400 \text{ kg}}{1400 \text{ kg} + 80 \text{ kg}}\right)^{1,79} = 0{,}9053c.$$

Substituindo o valor de c dado pela Eq. 9-62, encontramos

$$r_1' = 0{,}9053r_1 \approx 0{,}91r_1. \qquad \text{(Resposta)}$$

Em palavras, o risco de vida para o motorista 1 é aproximadamente 9% menor quando existe um passageiro no carro.

9-10 | Colisões Elásticas em Uma Dimensão

Como comentamos na Seção 9-8, as colisões que acontecem no dia-a-dia são sempre inelásticas, mas podemos supor que algumas são aproximadamente elásticas, ou seja, que a energia cinética total dos corpos envolvidos na colisão não é convertida em outras formas de energia e, portanto, é conservada:

$$\begin{pmatrix}\text{energia cinética total}\\ \text{antes da colisão}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{energia cinética total}\\ \text{depois da colisão}\end{pmatrix}.$$

Isso não significa que a energia dos corpos envolvidos na colisão não possa variar:

> Nas colisões elásticas a energia cinética dos corpos envolvidos na colisão pode variar, mas a energia cinética total do sistema não varia.

Assim, por exemplo, a colisão da bola branca com uma bola colorida no jogo de sinuca pode ser considerada aproximadamente elástica. Se a colisão é frontal (a bola branca incide em cheio na outra bola), a energia cinética da bola branca pode ser transferida quase inteiramente para a outra bola. (Entretanto, o fato de que a colisão produz ruído significa que pelo menos uma pequena parte da energia cinética se transforma em energia sonora.)

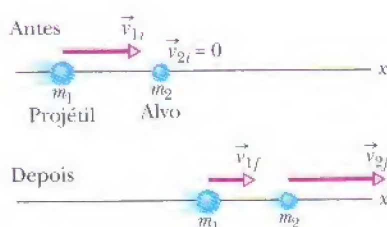


FIG. 9-20 O corpo 1 se move ao longo de um eixo x antes de sofrer uma colisão elástica com o corpo 2, que está inicialmente em repouso. Os dois corpos se movem ao longo do eixo x após a colisão.

Alvo Estacionário

A Fig. 9-20 mostra dois corpos antes e depois de uma colisão unidimensional, como uma colisão frontal de bolas de sinuca. Um projétil de massa m_1 e velocidade inicial v_{1i} se move em direção a um alvo de massa m_2 que está inicialmente em repouso ($v_{2i} = 0$). Vamos supor que este sistema de dois corpos é fechado e isolado. Nesse

caso, o momento linear total do sistema é conservado e, de acordo com a Eq. 9-51, podemos expressar esse fato através da equação

$$m_1v_{1i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f} \quad \text{(momento linear)}. \tag{9-63}$$

Se a colisão é elástica, a energia cinética total também é conservada e podemos expressar esse fato através da equação

$$\tfrac{1}{2}m_1v_{1i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \quad \text{(energia cinética)}. \tag{9-64}$$

Em cada uma dessas equações o índice i indica as velocidades iniciais, e o subscrito f indica as velocidades finais dos corpos. Se conhecemos as massas dos corpos e também conhecemos v_{1i}, a velocidade inicial do corpo 1, as únicas grandezas desconhecidas são v_{1f} e v_{2f}, as velocidades finais dos dois corpos. Com duas equações à nossa disposição, podemos determinar os valores dessas incógnitas.

Para isso, escrevemos a Eq. 9-63 na forma

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2v_{2f} \tag{9-65}$$

e a Eq. 9-64 na forma*

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2v_{2f}^2 \tag{9-66}$$

Dividindo a Eq. 9-66 pela Eq. 9-65 e reagrupando os termos, obtemos

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} \tag{9-67}$$

e

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i}. \tag{9-68}$$

De acordo com a Eq. 9-68, v_{2f} é sempre positiva (o alvo inicialmente parado de massa m_2 sempre se move para a frente). De acordo com a Eq. 9-67, v_{1f} pode ser positiva ou negativa (o projétil se move para a frente se $m_1 > m_2$, mas ricocheteia se $m_1 < m_2$).

Vamos examinar algumas situações especiais.

1. ***Massas iguais*** Se $m_1 = m_2$, as Eqs. 9-67 e 9-68 se reduzem a

$$v_{1f} = 0 \text{ e } v_{2f} = v_{1i},$$

que poderíamos chamar de resultado da sinuca. Depois de uma colisão elástica frontal de corpos de massas iguais o corpo 1 (inicialmente em movimento) pára totalmente e o corpo 2 (inicialmente em repouso) entra em movimento com a velocidade inicial do corpo 1. Em colisões elásticas frontais corpos de massas iguais simplesmente trocam suas velocidades. Isso é verdade mesmo que o corpo 2 não esteja inicialmente em repouso.

2. ***Alvo pesado*** Na Fig. 9-20 um alvo pesado significa que $m_2 \gg m_1$. Esta seria a situação, por exemplo, no caso de uma bola de tênis lançada contra uma bola de boliche em repouso. Nesse caso, as Eqs. 9-67 e 9-68 se reduzem a

$$v_{1i} \approx -v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} \approx \left(\frac{2m_1}{m_2}\right)v_{1i}. \tag{9-69}$$

A conclusão é que o corpo 1 (a bola de tênis) ricocheteia e refaz sua trajetória no sentido inverso, com a velocidade escalar praticamente inalterada. O corpo 2 (a bola de boliche), inicialmente em repouso, move-se para a frente em baixa velocidade, pois a grandeza entre parênteses na Eq. 9-69 é muito menor do que 1. Tudo isso está dentro do esperado.

3. ***Projétil pesado*** Este é o caso oposto, ou seja, $m_1 \gg m_2$. Dessa vez uma bola de boliche é lançada contra uma bola de tênis em repouso. As Eqs. 9-67 e 9-68 se reduzem a

---

* Nesta passagem usamos a identidade $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Isso facilita a solução do sistema de equações constituído pelas Eqs. 9-65 e 9-66.

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} \approx 2v_{1i}. \tag{9-70}$$

De acordo com a Eq. 9-70, o corpo 1 (a bola de boliche) simplesmente continua sua trajetória, praticamente sem ser freado pela colisão. O corpo 2 (a bola de tênis) é arremessado para a frente com o dobro da velocidade da bola de boliche.

Você deve estar se perguntando: por que o dobro da velocidade? Para compreender a razão, lembre-se da colisão descrita pela Eq. 9-69, na qual a velocidade do corpo leve incidente (a bola de tênis) mudou de $+v$ para $-v$, ou seja, a velocidade sofreu uma *variação* de $2v$. A mesma *variação* de velocidade (agora de 0 para $2v$) acontece neste exemplo.

Alvo em Movimento

Agora que examinamos a colisão elástica de um projétil com um alvo em repouso, vamos examinar a situação na qual os dois corpos estão em movimento antes de sofrer uma colisão elástica.



FIG. 9-21 Dois corpos prestes a sofrer uma colisão elástica unidimensional.

Para a situação da Fig. 9-21 a conservação do momento linear pode ser escrita na forma

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}, \tag{9-71}$$

e a conservação da energia cinética na forma

$$\tfrac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \tag{9-72}$$

Para resolver esse sistema de equações e obter os valores de v_{1f} e v_{2f}, primeiro escrevemos a Eq. 9-71 na forma

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = -m_2(v_{2i} - v_{2f}), \tag{9-73}$$

e a Eq. 9-72 na forma

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = -m_2(v_{2i} - v_{2f})(v_{2i} + v_{2f}). \tag{9-74}$$

Dividindo a Eq. 9-74 pela Eq. 9-73 e reagrupando os termos, obtemos

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2i} \tag{9-75}$$

e

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_{2i}. \tag{9-76}$$

Note que a correspondência entre os índices 1 e 2 e os dois corpos é arbitrária. Se trocarmos esses índices na Fig. 9-21 e nas Eqs. 9-75 e 9-76, acabaremos com o mesmo sistema de equações. Note também que se fizermos $v_{2i} = 0$ o corpo 2 se tornará um alvo estacionário, como na Fig. 9-29, e as Eqs. 9-75 e 9-76 se reduzirão às Eqs. 9-67 e 9-68, respectivamente.



TESTE 8 Qual é o momento linear final do alvo da Fig. 9-20 se o momento linear inicial do projétil é 6 kg · m/s e o momento linear final do projétil é (a) 2 kg · m/s e (b) −2 kg · m/s? (c) Qual é a energia cinética final do alvo se as energias cinéticas inicial e final do projétil são, respectivamente, 5 J e 2 J?

Exemplo 9-11

Duas esferas metálicas, inicialmente suspensas por cordas verticais, apenas se tocam, como mostra a Fig. 9-22. A esfera 1, de massa $m_1 = 30$ g, é puxada para a esquerda até a altura $h_1 = 8{,}0$ cm e liberada a partir do repouso. Na parte mais baixa da trajetória ela sofre uma colisão elástica com a esfera 2, cuja massa é $m_2 = 75$ g. Qual é a velocidade v_{1f} da esfera 1 imediatamente após a colisão?

IDÉIA-CHAVE Podemos separar esse movimento complicado em duas etapas que podem ser analisadas separada-

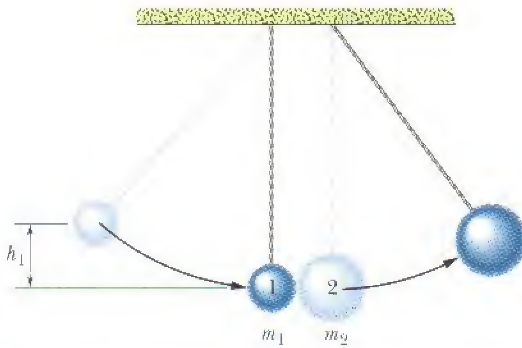


FIG. 9-22 Duas esferas de metal suspensas por cordas apenas se tocam quando estão em repouso. A esfera 1, de massa m_1, é puxada para a esquerda até a altura h_1 e depois liberada.

mente: (1) a descida da esfera 1 (na qual a energia mecânica é conservada) e (2) a colisão das duas esferas (na qual o momento é conservado).

1ª Etapa: Quando a esfera 1 desce, a energia mecânica do sistema esfera-Terra é conservada. (A energia mecânica não é alterada pela força da corda sobre a esfera 1 porque essa força é sempre perpendicular à trajetória da esfera.)

Cálculo: Vamos tomar o nível mais baixo como sendo o nível de referência de energia potencial gravitacional zero. Nesse caso, a energia cinética da esfera 1 no nível mais baixo deve ser igual à energia potencial gravitacional do sistema quando a esfera 1 está na altura h_1. Assim,

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = m_1 g h_1,$$

que podemos resolver para obter a velocidade v_{1i} da esfera 1 imediatamente antes da colisão:

$$v_{1i} = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{(2)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(0{,}080\ \text{m})}$$
$$= 1{,}252\ \text{m/s}$$

2ª Etapa: Além da suposição de que a colisão é elástica, podemos fazer outras duas. Primeiro, podemos supor que a colisão é unidimensional, já que os movimentos das esferas são aproximadamente horizontais nos momentos anteriores e posteriores à colisão. Segundo, como a colisão dura pouco tempo, podemos supor que o sistema de duas esferas é fechado e isolado. Isso significa que o momento linear total do sistema é conservado.

Cálculo: Podemos, portanto, usar a Eq. 9-67 para calcular a velocidade da esfera 1 imediatamente após a colisão:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$
$$= \frac{0{,}030\ \text{kg} - 0{,}075\ \text{kg}}{0{,}030\ \text{kg} + 0{,}075\ \text{kg}}(1{,}252\ \text{m/s})$$
$$= -0{,}537\ \text{m/s} \approx -0{,}54\ \text{m/s} \qquad \text{(Resposta)}$$

O sinal negativo significa que a esfera 1 se move para a esquerda imediatamente após a colisão.

9-11 | Colisões em Duas Dimensões

Quando a colisão não é frontal a direção do movimento dos corpos é diferente antes e depois da colisão. Se o sistema é fechado e isolado o momento linear total continua a ser conservado nessas colisões bidimensionais:

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}. \qquad (9\text{-}77)$$

Se a colisão também é elástica (um caso especial), a energia cinética total também é conservada:

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}. \qquad (9\text{-}78)$$

A Eq. 9-77 é freqüentemente mais útil para analisar uma colisão bidimensional se for escrita em termos das componentes em um sistema de coordenadas xy. Assim, por exemplo, a Fig. 9-23 mostra uma *colisão de raspão* (não-frontal) entre um projétil e um alvo inicialmente em repouso. As trajetórias dos corpos após a colisão fazem ângulos θ_1 e θ_2 com o eixo x, que coincide com a direção de movimento do projétil antes da colisão. Nesta situação, a componente da Eq. 9-77 em relação ao eixo x é

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta_1 + m_2 v_{2f} \cos \theta_2, \qquad (9\text{-}79)$$

e a componente ao longo do eixo y é

$$0 = -m_1 v_{1f} \operatorname{sen} \theta_1 + m_2 v_{2f} \operatorname{sen} \theta_2. \qquad (9\text{-}80)$$

Podemos também escrever a Eq. 9-78 (para o caso especial da colisão elástica) em termos de velocidades:

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad \text{(energia cinética)}. \qquad (9\text{-}81)$$

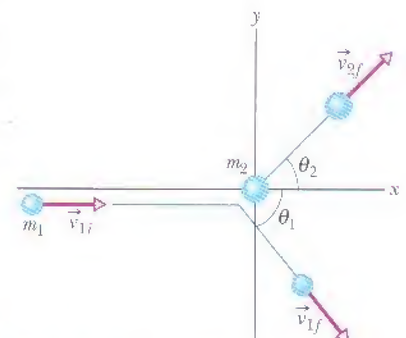


FIG. 9-23 Uma colisão elástica de raspão entre dois corpos. O corpo de massa m_2 (o alvo) está inicialmente em repouso.

As Eqs. 9-79 a 9-81 contêm sete variáveis: duas massas, m_1 e m_2; três velocidades, v_{1i}, v_{1f} e v_{2f}; e dois ângulos, θ_1 e θ_2. Se conhecemos quatro dessas variáveis podemos resolver as três equações para obter as três variáveis restantes.



TESTE 9 Suponha que, na situação da Fig. 9-23, o projétil tenha um momento inicial de 6 kg · m/s, uma componente x do momento final de 4 kg · m/s e uma componente y do momento final de -3 kg · m/s. Determine (a) a componente x do momento final do alvo e (b) a componente y do momento final do alvo.

9-12 | Sistemas de Massa Variável: Um Foguete

Em todos os sistemas que examinamos até agora a massa total permanecia constante. Em certos casos, como o de um foguete, isso não é verdade. A maior parte da massa de um foguete, antes do lançamento, é constituída de combustível, que será posteriormente queimado e ejetado pelo sistema de propulsão.

Levamos em consideração a variação de massa do foguete aplicando a segunda lei de Newton não ao foguete, mas ao conjunto formado pelo foguete e todos os produtos ejetados. A massa *desse* sistema *não varia* com o tempo.

Cálculo da Aceleração

Suponha que estamos em repouso em relação a um referencial inercial, observando um foguete acelerar no espaço sideral sem que qualquer força gravitacional ou de arrasto atue sobre ele. Seja M a massa do foguete e v sua velocidade em um instante arbitrário t (veja a Fig. 9-24a).

A Fig. 9-24b mostra a situação após um intervalo de tempo dt. O foguete agora está a uma velocidade $v + dv$ e possui uma massa $M + dM$, onde a variação de massa dM é uma *grandeza negativa*. Os produtos de exaustão liberados pelo foguete durante o intervalo dt têm massa $-dM$ e velocidade U em relação ao nosso referencial inercial.

Nosso sistema é formado pelo foguete e pelos produtos de exaustão ejetados no intervalo dt. Como esse sistema é fechado e isolado, o momento linear do sistema é conservado no intervalo dt, ou seja,

$$P_i = P_f, \tag{9-82}$$

onde os índices i e f indicam os valores no início e no fim do intervalo de tempo dt. Podemos escrever a Eq. 9-82 na forma

$$Mv = -dM\,U + (M + dM)(v + dv), \tag{9-83}$$

onde o primeiro termo do lado direito é o momento linear dos produtos de exaustão ejetados durante o intervalo dt e o segundo termo é o momento linear do foguete no fim do intervalo dt.

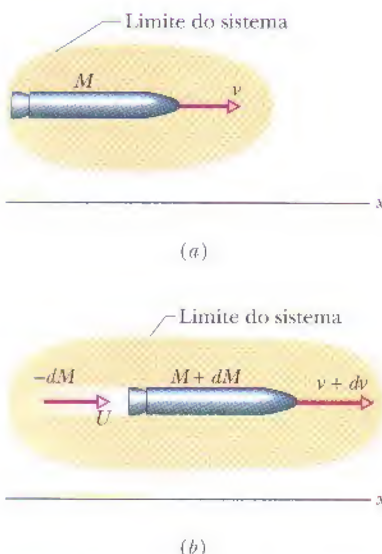


FIG. 9-24 (a) Um foguete de massa M acelerando no instante t, do ponto de vista de um referencial inercial. (b) O mesmo, mas no instante $t + dt$. Os produtos de combustão ejetados durante o intervalo dt são mostrados na figura.

Podemos simplificar a Eq. 9-83 usando a velocidade relativa v_{rel} entre o foguete e os produtos de exaustão, que está relacionada às velocidades em relação ao referencial inercial através da equação

$$\begin{pmatrix}\text{velocidade do}\\ \text{foguete em relação}\\ \text{ao referencial}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{velocidade do}\\ \text{foguete em relação}\\ \text{aos produtos}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{velocidade dos}\\ \text{produtos em relação}\\ \text{ao referencial}\end{pmatrix}.$$

Em símbolos, isso significa que

$$(v + dv) = v_{rel} + U,$$

ou

$$U = v + dv - v_{rel}. \tag{9-84}$$

Substituindo esse valor de U na Eq. 9-83 e reagrupando os termos, obtemos

$$-dM\, v_{rel} = M\, dv. \qquad (9\text{-}85)$$

Dividindo ambos os membros por dt, temos

$$-\frac{dM}{dt} v_{rel} = M \frac{dv}{dt}. \qquad (9\text{-}86)$$

Substituímos dM/dt (a taxa com a qual o foguete perde massa) por $-R$, onde R é a taxa (positiva) de consumo de combustível, e reconhecemos que dv/dt é a aceleração do foguete. Com essas mudanças, a Eq. 9-86 se torna

$$Rv_{rel} = Ma \quad \text{(primeira equação do foguete).} \qquad (9\text{-}87)$$

A Eq. 9-87 vale para qualquer instante, contanto que os valores da massa M, da taxa de consumo de combustível R e da aceleração a sejam os valores para esse instante.

Note que o lado esquerdo da Eq. 9-87 tem dimensões de força (kg/s · m/s = kg · m/s² = N) e depende apenas de características do motor do foguete, ou seja, da taxa R com a qual ele consome combustível e da velocidade relativa com a qual os produtos da combustão são expelidos. Este termo Rv_{rel} é chamado de **empuxo** do motor do foguete e representado pela letra T. A segunda lei de Newton se torna mais explícita quando escrevemos a Eq. 9-87 na forma $T = Ma$, onde a é a aceleração do foguete no instante em que a massa é M.

Cálculo da Velocidade

Como varia a velocidade do foguete à medida que ele consome combustível? De acordo com a Eq. 9-85, temos:

$$dv = -\, v_{rel} \frac{dM}{M}.$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_{rel} \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M},$$

onde M_i é a massa inicial do foguete e M_f é a massa final. Calculando as integrais, obtemos

$$v_f - v_i = v_{rel} \ln \frac{M_i}{M_f} \quad \text{(segunda equação do foguete)} \qquad (9\text{-}88)$$

para o aumento na velocidade do foguete quando a massa muda de M_i para M_f. (O símbolo "ln" na Eq. 9-88 significa *logaritmo natural.*) Essa equação ilustra muito bem a vantagem dos foguetes de vários estágios, nos quais M_f é reduzida descartando cada estágio quando o seu combustível se esgota. Um foguete ideal chegaria ao destino apenas com a carga útil.

Exemplo 9-12

Um foguete cuja massa inicial M_i é 850 kg consome combustível a uma taxa R = 2,3 kg/s. A velocidade v_{rel} dos gases expelidos em relação ao motor do foguete é 2800 m/s. Qual é o empuxo do motor do foguete?

IDÉIA-CHAVE De acordo com a Eq. 9-87, o empuxo T é igual ao produto da taxa de consumo de combustível R pela velocidade relativa v_{rel} dos gases expelidos.

Cálculo: Temos:

$$T = Rv_{rel} = (2{,}3 \text{ kg/s})(2800 \text{ m/s}) = 6440 \text{ N} \approx 6400 \text{ N.} \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a aceleração do foguete?

IDÉIA-CHAVE Podemos relacionar o empuxo T de um foguete ao módulo a da aceleração resultante através da

equação $T = Ma$, onde M é a massa do foguete. À medida que o combustível é consumido M diminui e a aumenta. Como estamos interessados no valor inicial de a, usamos o valor inicial da massa, M_i.

Cálculo: Temos:

$$a = \frac{T}{M_i} = \frac{6440\text{ N}}{850\text{ kg}} = 7{,}6\text{ m/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Para ser lançado da superfície da Terra um foguete deve ter uma aceleração inicial maior que $g = 9{,}8$ m/s². Isso equivale a dizer que o empuxo T do motor do foguete deve ser maior que a força gravitacional a que o foguete está submetido no instante do lançamento, que nesse caso é igual a $M_i g = (850\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2) = 8330$ N. Como o empuxo do nosso foguete (6400 N) não é suficiente, ele não poderia ser lançado da superfície da Terra.

REVISÃO E RESUMO

Centro de Massa O **centro de massa** de um sistema de n partículas é definido como o ponto cujas coordenadas são dadas por

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad z_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i \qquad (9\text{-}5)$$

ou

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i, \qquad (9\text{-}8)$$

onde M é a massa total do sistema.

Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas O movimento do centro de massa de qualquer sistema de partículas é governado pela **segunda lei de Newton para um sistema de partículas**, expressa pela equação

$$\vec{F}_{res} = M\vec{a}_{CM}. \qquad (9\text{-}14)$$

onde $\vec{F}_{res}$ é a resultante de todas as forças *externas* que agem sobre o sistema, M é a massa total do sistema e $\vec{a}_{CM}$ é a aceleração do centro de massa do sistema.

Momento Linear e a Segunda Lei de Newton Para uma única partícula definimos uma grandeza $\vec{p}$, o **momento linear**, através da equação

$$\vec{p} = m\vec{v}, \qquad (9\text{-}22)$$

em função da qual podemos escrever a segunda lei de Newton na forma

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \qquad (9\text{-}23)$$

Para um sistema de partículas, essas relações se tornam

$$\vec{P} = M\vec{v}_{CM} \quad \text{e} \quad \vec{F}_{res} = \frac{d\vec{P}}{dt}. \qquad (9\text{-}25, 9\text{-}27)$$

Colisão e Impulso A aplicação da segunda lei de Newton a um corpo que se comporta como uma partícula envolvido em uma colisão leva ao **teorema do impulso e momento linear**:

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} = \vec{J}, \qquad (9\text{-}31, 9\text{-}32)$$

onde $\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$ é a variação do momento linear do corpo e $\vec{J}$ é o **impulso** produzido pela força $\vec{F}(t)$ exercida sobre o corpo pelo outro corpo envolvido na colisão:

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\, dt. \qquad (9\text{-}30)$$

Se $F_{méd}$ é o módulo médio de $\vec{F}(t)$ durante a colisão e Δt é a duração da colisão, para um movimento unidimensional temos:

$$J = F_{méd}\,\Delta t. \qquad (9\text{-}35)$$

Quando uma série de projéteis de massa m e velocidade v colide com um corpo fixo, a força média que age sobre o corpo fixo é dada por

$$F_{méd} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m\,\Delta v, \qquad (9\text{-}37)$$

onde $n/\Delta t$ é a taxa com a qual os corpos colidem com o corpo fixo e Δv é a variação da velocidade de cada corpo que colide. Essa força média também pode ser escrita na forma

$$F_{méd} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v, \qquad (9\text{-}40)$$

onde $\Delta m/\Delta t$ é a taxa com a qual a massa colide com o corpo fixo. Nas Eqs. 9-37 e 9-40, $\Delta v = -v$ se os corpos param no momento do impacto e $\Delta v = -2v$ se ricocheteiam com a mesma velocidade escalar.

Conservação do Momento Linear Se um sistema está isolado de tal forma que nenhuma força resultante *externa* atua sobre ele, o momento linear $\vec{P}$ do sistema permanece constante:

$$\vec{P} = \text{constante} \quad \text{(sistema fechado e isolado)}. \qquad (9\text{-}42)$$

Esta equação também pode ser escrita na forma

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \quad \text{(sistema fechado e isolado)}, \qquad (9\text{-}43)$$

onde os índices se referem aos valores de $\vec{P}$ em um instante inicial e em um instante posterior. As Eqs. 9-42 e 9-43 são expressões equivalentes da **lei de conservação do momento linear**.

Colisões Inelásticas em Uma Dimensão Em uma *colisão inelástica* de dois corpos a energia cinética do sistema de dois corpos não é conservada. Se o sistema é fechado e isolado o momento linear total do sistema é conservado, o que podemos expressar em forma vetorial como

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}, \qquad (9\text{-}50)$$

onde os índices i e f se referem a valores imediatamente antes e imediatamente depois da colisão, respectivamente.

Se o movimento dos corpos ocorre ao longo de um único eixo, a colisão é unidimensional e podemos escrever a Eq. 9-50 em termos das componentes das velocidades ao longo desse eixo:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}. \qquad (9\text{-}51)$$

Se os dois corpos se movem juntos após a colisão, a colisão é *perfeitamente inelástica* e os corpos têm a mesma velocidade final V (já que se *movem* juntos).

Movimento do Centro de Massa O centro de massa de um sistema fechado e isolado de dois corpos que colidem não é afetado pela colisão. Em particular, a velocidade $\vec{v}_{CM}$ do centro de massa é a mesma antes e depois da colisão.

Colisões Elásticas em Uma Dimensão Uma *colisão elástica* é um tipo especial de colisão em que a energia cinética de um sistema de corpos que colidem é conservada. Se o sistema é fechado e isolado, o momento linear também é conservado. Para uma colisão unidimensional na qual o corpo 2 é um alvo e o corpo 1 é um projétil, a conservação da energia cinética e a conservação do momento linear levam às seguintes expressões para as velocidades imediatamente após a colisão:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (9\text{-}67)$$

e

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}. \quad (9\text{-}68)$$

Colisões em Duas Dimensões Se dois corpos colidem e não estão se movendo ao longo de um único eixo (a colisão não é frontal), a colisão é bidimensional. Se o sistema de dois corpos é fechado e isolado, a lei de conservação do momento se aplica à colisão e pode ser escrita como

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}, \quad (9\text{-}77)$$

Na forma de componentes, a lei fornece duas equações que descrevem a colisão (uma equação para cada uma das duas dimensões). Se a colisão é elástica (um caso especial), a conservação da energia cinética na colisão fornece uma terceira equação:

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}. \quad (9\text{-}78)$$

Sistemas de Massa Variável Na ausência de forças externas a aceleração instantânea de foguete obedece à equação

$$Rv_{rel} = Ma \quad \text{(primeira equação do foguete)}, \quad (9\text{-}87)$$

onde M é a massa instantânea do foguete (que inclui o combustível ainda não consumido), R é a taxa de consumo de combustível e v_{rel} é a velocidade dos produtos de exaustão em relação ao foguete. O termo Rv_{rel} é o **empuxo** do motor do foguete. Para um foguete com R e v_{rel} constantes, cuja velocidade varia de v_i para v_f quando a massa varia de M_i para M_f,

$$v_f - v_i = v_{rel} \ln \frac{M_i}{M_f} \quad \text{(segunda equação do foguete)}. \quad (9\text{-}88)$$

PERGUNTAS

1 A Fig. 9-25 mostra uma vista superior de três partículas sobre as quais atuam forças externas. Os módulos e as orientações das forças que agem sobre duas das partículas estão indicados. Quais são o módulo e a orientação da força que age sobre a terceira partícula se o centro de massa do sistema de três partículas está (a) em repouso, (b) se movendo com velocidade constante para a direita e (c) acelerando para a direita?

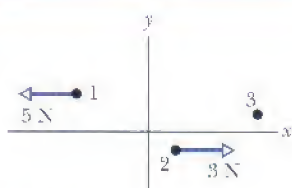


FIG. 9-25 Pergunta 1.

2 A Fig. 9-26 mostra uma vista superior de quatro partículas de massas iguais que deslizam sobre uma superfície sem atrito com velocidade constante. As orientações das velocidades estão indicadas; os módulos são iguais. Considere pares dessas partículas. Que pares formam um sistema cujo centro de massa (a) está em repouso, (b) está em repouso na origem e (c) passa pela origem?

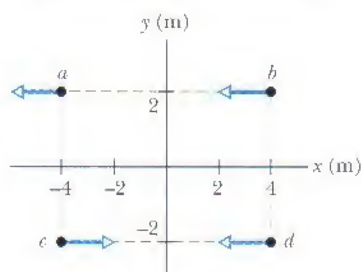


FIG. 9-26 Pergunta 2.

3 Os diagramas de corpo livre na Fig. 9-27 são vistas superiores de forças horizontais agindo sobre três caixas de chocolate que se movem em um balcão sem atrito. Para cada caixa, determine se as componentes x e y do momento linear são conservadas.

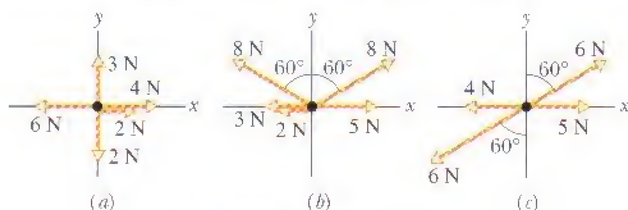


FIG. 9-27 Pergunta 3.

4 A Fig. 9-28 mostra quatro grupos de três ou quatro partículas iguais que se movem paralelamente ou ao eixo x ou ao eixo y, com a mesma velocidade escalar. Ordene os grupos de acordo com a velocidade escalar do centro de massa, começando pela maior.

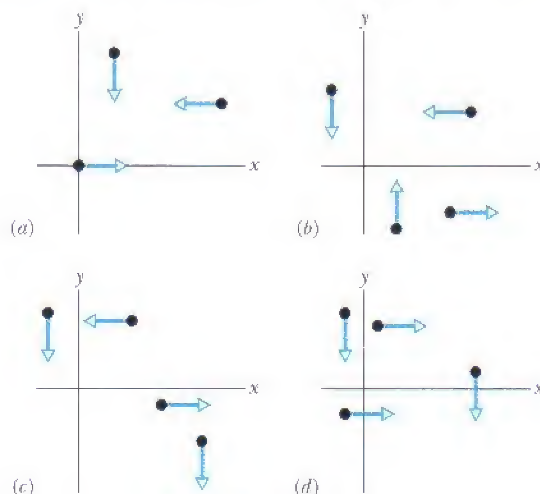


FIG. 9-28 Pergunta 4.

5 Considere uma caixa, como a do Exemplo 9-6, que explode em dois pedaços enquanto se move com velocidade constante positiva ao longo de um eixo x. Se um dos pedaços, de massa m_1, possui uma velocidade positiva $\vec{v}_1$, o outro pedaço, de massa m_2, pode ter (a) uma velocidade positiva $\vec{v}_2$ (Fig. 9-29*a*), (b) uma velocidade negativa $\vec{v}_2$ (Fig. 9-29*b*) ou (c) velocidade zero (Fig. 9-29*c*). Ordene esses três resultados possíveis para o segundo pedaço de acordo com o módulo de $\vec{v}_1$ correspondente, começando pelo maior.

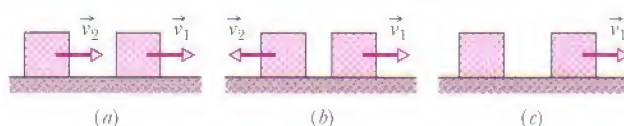


FIG. 9-29 Pergunta 5.

6 A Fig. 9-30 mostra gráficos do módulo da força sobre um corpo envolvido em uma colisão em função do tempo. Ordene os gráficos de acordo com o módulo do impulso sobre o corpo, do maior para o menor.

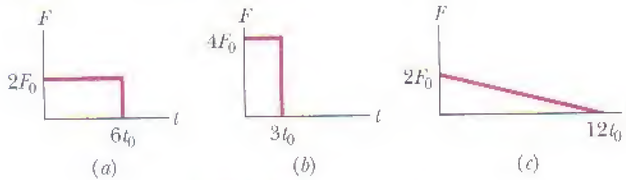


FIG. 9-30 Pergunta 6.

7 Dois corpos sofrem uma colisão elástica unidimensional ao longo de um eixo x. A Fig. 9-31 mostra a posição dos corpos e do centro de massa em função do tempo. (a) Os dois corpos estavam se movendo antes da colisão ou um deles estava em repouso? Que reta corresponde ao movimento do centro de massa (b) antes da colisão e (c) depois da colisão? (d) A massa do corpo que estava se movendo mais depressa antes da colisão é maior, menor ou igual à do outro corpo?

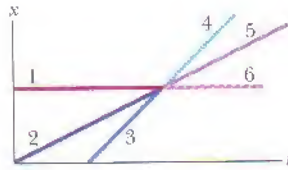


FIG. 9-31 Pergunta 7.

8 Um bloco sobre um piso horizontal está inicialmente em repouso, em movimento no sentido positivo de um eixo x ou em movimento no sentido negativo do mesmo eixo. O bloco explode em dois pedaços que continuam a se mover ao longo do eixo x. Suponha que o bloco e os dois pedaços formem um sistema fechado e isolado. A Fig. 9-32 mostra seis possibilidades para o gráfico dos momentos do bloco e dos pedaços em função do tempo t. Indique as possibilidades que representam situações fisicamente impossíveis e explique por quê.

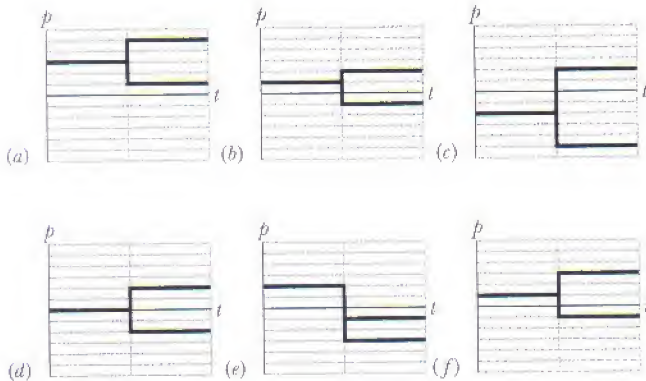


FIG. 9-32 Pergunta 8.

9 O bloco 1, de massa m_1, desliza ao longo de um eixo x sobre um piso sem atrito e sofre uma colisão elástica com um bloco 2 de massa m_2 inicialmente em repouso. A Fig. 9-33 mostra um gráfico da posição x em função do tempo t do bloco 1 até a colisão ocorrer na posição x_c e no instante t_c. Em qual das regiões identificadas com letras continua o gráfico (após a colisão) se (a) $m_1 < m_2$, (b) $m_1 > m_2$? (c) Ao longo de qual das retas identificadas com números continua o gráfico se $m_1 = m_2$?

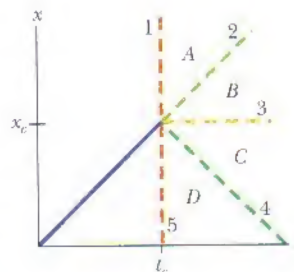


FIG. 9-33 Pergunta 9.

10 A Fig. 9-34 mostra quatro gráficos da posição em função do tempo para dois corpos e seu centro de massa. Os dois corpos formam um sistema fechado e isolado e sofrem uma colisão unidimensional perfeitamente inelástica, ao longo de um eixo x. No gráfico 1 (a) os dois corpos estão se movendo no sentido positivo ou no sentido negativo do eixo x? (b) E o centro de massa? (c) Quais são os gráficos que correspondem a situações fisicamente impossíveis? Justifique sua resposta.

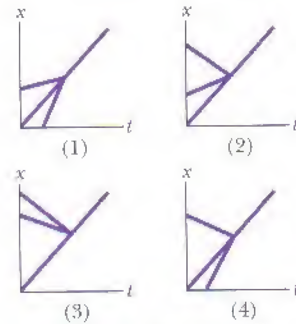


FIG. 9-34 Pergunta 10.

11 Um bloco desliza ao longo de um piso sem atrito em direção a um segundo bloco que está inicialmente em repouso e tem a mesma massa. A Fig. 9-35 mostra quatro possibilidades para um gráfico das energias cinéticas K dos blocos antes e depois da colisão. (a) Indique quais são as possibilidades que representam situações fisicamente impossíveis. Das outras possibilidades, qual é a que representa (b) uma colisão elástica e (c) uma colisão inelástica?

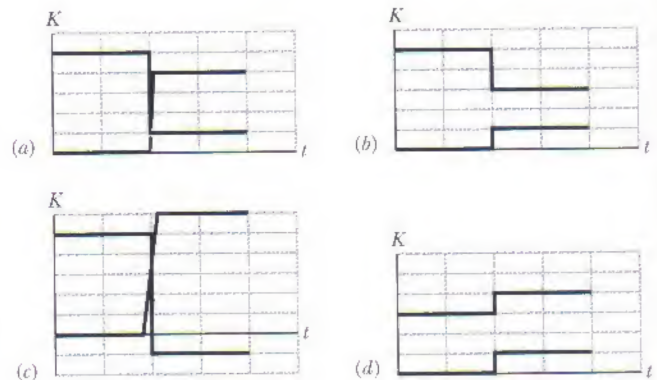


FIG. 9-35 Pergunta 11.

12 A Fig. 9-36 mostra um instantâneo do bloco 1 enquanto desliza ao longo de um eixo x sobre um piso sem atrito, antes de sofrer uma colisão elástica com um bloco 2 inicialmente em repouso. A figura também mostra três posições possíveis para o centro de massa (CM) do sistema dos dois blocos no mesmo instante. (O ponto B está eqüidistante dos centros dos dois blocos.) Após a colisão, o bloco 1 permanece em repouso, continua a se mover no mesmo sentido ou passa a se mover no sentido oposto se o CM está (a) em A, (b) em B e (c) em C?

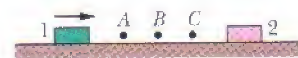


FIG. 9-36 Pergunta 12.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema


Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 9-2 O Centro de Massa

•1 Uma partícula de 2,00 kg tem coordenadas xy (−1,20 m, 0,500 m) e uma partícula de 4,00 kg tem coordenadas xy (0,600 m, −0,750 m). Ambas estão em um plano horizontal. Em que coordenada (a) x e (b) y deve ser posicionada uma terceira partícula de 3,00 kg para que o centro de massa do sistema de três partículas tenha coordenadas (−0,500 m, −0,700 m)?

•2 A Fig. 9-37 mostra um sistema de três partículas de massas m_1 = 3,0 kg, m_2 = 4,0 kg e m_3 = 8,0 kg. As escalas do gráfico são definidas por x_s = 2,0 m e y_s = 2,0 m. Quais são (a) a coordenada x e (b) a coordenada y do centro de massa do sistema? (c) Se m_3 aumenta gradualmente, o centro de massa do sistema se aproxima de m_3, se afasta de m_3 ou permanece onde está?

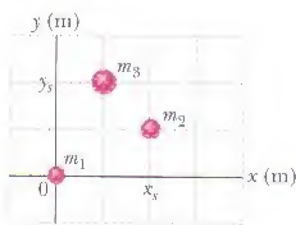


FIG. 9-37 Problema 2.

••3 Quais são (a) a coordenada x e (b) a coordenada y do centro de massa da placa uniforme da Fig. 9-38 se L = 5,0 cm?

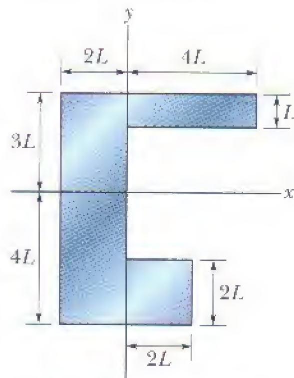


FIG. 9-38 Problema 3.

••4 Na Fig. 9-39, três barras finas e uniformes, de comprimento L = 22 cm, formam um U invertido. Cada barra vertical tem uma massa de 14 g; a barra horizontal tem massa de 42 g. Quais são (a) a coordenada x e (b) a coordenada y do centro de massa do sistema?

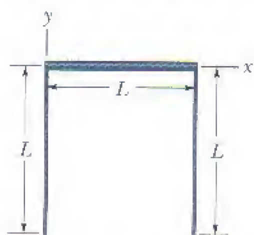


FIG. 9-39 Problema 4.

••5 Na molécula de amônia (NH_3) da Fig. 9-40, três átomos de hidrogênio (H) formam um triângulo eqüilátero, com o centro do triângulo a uma distância $d = 9{,}40 \times 10^{-11}$ m de cada átomo de hidrogênio. O átomo de nitrogênio (N) está no vértice superior de uma pirâmide, com os três átomos de hidrogênio formando a base. A razão entre as massas do nitrogênio e do hidrogênio é 13,9, e a distância nitrogênio-hidrogênio é $L = 10{,}14 \times 10^{-11}$ m. Quais são as coordenadas (a) x e (b) y do centro de massa da molécula?

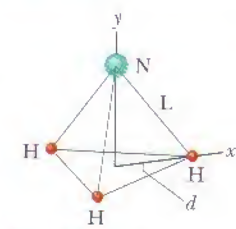


FIG. 9-40 Problema 5.

••6 A Fig. 9-41 mostra uma caixa cúbica que foi construída com placas metálicas uniformes de espessura desprezível. A caixa não tem tampa e tem uma aresta L = 40 cm. Determine (a) a coordenada x, (b) a coordenada y e (c) a coordenada z do centro de massa da caixa.

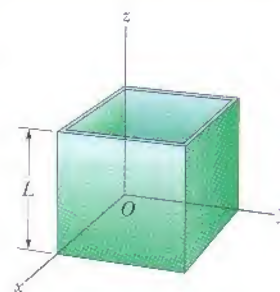


FIG. 9-41 Problema 6.

••7 A Fig. 9-42 mostra uma placa composta de dimensões d_1 = 11,0 cm, d_2 = 2,80 cm e d_3 = 13,0 cm. Metade da placa é feita de alumínio (massa específica = 2,70 g/cm³) e a outra metade de ferro (massa específica = 7,85 g/cm³). Determine (a) a coordenada x, (b) a coordenada y e (c) a coordenada z do centro de massa da placa.

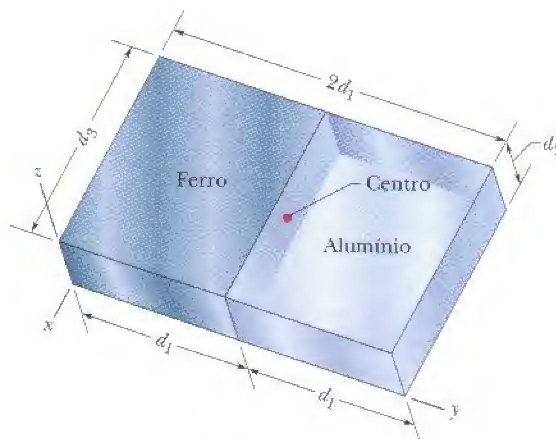


FIG. 9-42 Problema 7.

•••8 Uma lata tem uma massa de 0,140 kg, uma altura de 12,0 cm e contém 1,31 kg de refrigerante (Fig. 9-42). Pequenos furos são feitos na base e no topo (com perda de massa desprezível) para drenar o refrigerante. Qual é a altura h do centro de massa da lata e seu conteúdo (a) inicialmente e (b) após a lata perder todo o refrigerante? (c) O que acontece com h enquanto o refrigerante está sendo drenado? (d) Se x é a altura do refrigerante que ainda resta na lata em um dado instante, determine o valor de x quando o centro de massa atinge seu ponto mais baixo.



FIG. 9-43 Problema 8.

seção 9-3 A Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas

•9 Uma grande azeitona (m = 0,50 kg) está na origem de um sistema de coordenadas xy e uma grande castanha-do-pará (M = 1,5 kg) está no ponto (1,0, 2,0) m. Em t = 0 uma força $\vec{F}_o = (2{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j})$ N começa a agir sobre a azeitona e uma força $\vec{F}_n = (-3{,}0\hat{i} - 2{,}0\hat{j})$ N começa a agir sobre a castanha. Em termos dos vetores unitários, qual é o deslocamento do centro de massa do sistema azeitona-castanha em t = 4,0 s em relação à sua posição em t = 0?

•10 Dois patinadores, um de 65 kg e outro de 40 kg, estão em uma pista de gelo e seguram as extremidades de uma vara de 10 m de comprimento e massa desprezível. Os patinadores se puxam ao longo da vara até se encontrarem. Que distância percorre o patinador de 40 kg?

•11 Uma pedra é deixada cair em $t = 0$. Uma segunda pedra, com uma massa duas vezes maior, é deixada cair do mesmo ponto em $t = 100$ ms. (a) A que distância do ponto inicial da queda está o centro de massa das duas pedras em $t = 300$ ms? (Suponha que as pedras ainda não chegaram ao solo.) (b) Qual é a velocidade do centro de massa das duas pedras nesse instante?

•12 Um automóvel de 1000 kg está parado em um sinal de trânsito. No instante em que o sinal abre o automóvel começa a se mover com uma aceleração constante de 4,0 m/s^2. No mesmo instante um caminhão de 2000 kg, movendo-se no mesmo sentido com velocidade constante de 8,0 m/s, ultrapassa o automóvel. (a) Qual é a distância entre o CM do sistema carro-caminhão e o sinal de trânsito em $t = 3{,}0$ s? (b) Qual é a velocidade do CM nesse instante?

••13 A Fig. 9-44 mostra um arranjo com um trilho de ar no qual um carrinho está preso por uma corda a um bloco pendurado. O carrinho tem massa $m_1 = 0{,}600$ kg e seu centro está inicialmente nas coordenadas xy ($-0{,}500$ m, 0 m); o bloco tem massa $m_2 = 0{,}400$ kg e seu centro está inicialmente nas coordenadas xy (0, $-0{,}100$ m). As massas da corda e da polia são desprezíveis. O carrinho é liberado a partir do repouso e o carrinho e o bloco se movem até que o carrinho atinge a polia. O atrito entre o carrinho e o trilho de ar e o atrito da polia são desprezíveis. (a) Em termos dos vetores unitários, qual é a aceleração do centro de massa do sistema carrinho-bloco? (b) Qual é o vetor velocidade do CM em função do tempo t? (c) Plote a trajetória do CM. (d) Se a trajetória for curva, determine se apresenta um desvio para cima e para a direita ou para baixo e para a esquerda em direção a uma linha reta; se for retilínea, determine o ângulo da trajetória com o eixo x.

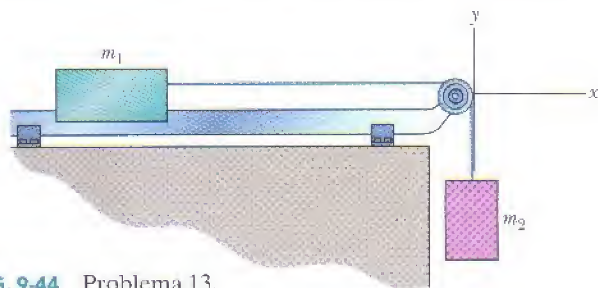


FIG. 9-44 Problema 13.

••14 Na Fig. 9-45 duas partículas são lançadas a partir da origem do sistema de coordenadas no instante $t = 0$. A partícula 1, de massa $m_1 = 5{,}00$ g, é lançada no sentido positivo do eixo x sobre um piso sem atrito, com uma velocidade constante de 10,0 m/s. A partícula 2, de massa $m_2 = 3{,}00$ g, é lançada com uma velocidade escalar de 20,0 m/s, com um ângulo para cima tal que se mantém sempre diretamente acima da partícula 1. (a) Qual é a altura máxima $H_{máx}$ alcançada pelo CM do sistema de duas partículas? Em termos dos vetores unitários, quais são (b) a velocidade e (c) a aceleração do CM ao atingir a altura máxima $H_{máx}$?



FIG. 9-45 Problema 14.

••15 Um canhão dispara um projétil com uma velocidade inicial $v_0 = 20$ m/s e um ângulo $\theta_0 = 60°$ com a horizontal. No ponto mais alto da trajetória o projétil explode em dois fragmentos de massas iguais (Fig. 9-46). Um fragmento, cuja velocidade imediatamente após a colisão é zero, cai verticalmente. A que distância do canhão cai o outro fragmento, supondo que o terreno é plano e que a resistência do ar pode ser desprezada?

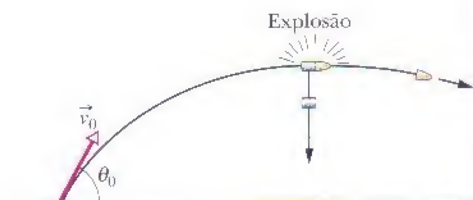
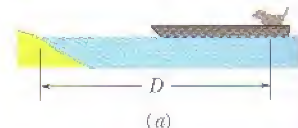


FIG. 9-46 Problema 15.

•••16 Ricardo, com 80 kg de massa, e Carmelita, que é mais leve, estão apreciando o pôr-do-sol no lago Mercedes em uma canoa de 30 kg. Com a canoa imóvel nas águas calmas do lago, eles trocam de lugar. Seus assentos estão separados por uma distância de 3,0 m e simetricamente dispostos em relação ao centro da embarcação. Se a canoa se desloca 40 cm em relação ao atracadouro, qual é a massa de Carmelita?

•••17 Na Fig. 9-47a, um cachorro de 4,5 kg está em um barco de 18 kg a uma distância $D = 6{,}1$ m da margem. Ele caminha 2,4 m ao longo do barco na direção da margem e pára. Supondo que não há atrito entre o barco e a água, determine a nova distância entre o cachorro e a margem. (*Sugestão:* Veja a Fig. 9-47b.)



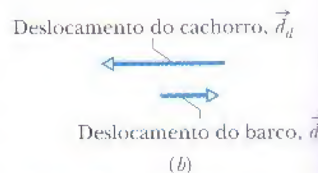


FIG. 9-47 Problema 17.

seção 9-5 O Momento Linear de um Sistema de Partículas

•18 Uma bola de 0,70 kg está se movendo horizontalmente com uma velocidade de 5,0 m/s quando se choca com uma parede vertical e ricocheteia com uma velocidade de 2,0 m/s. Qual é o módulo da variação do momento linear da bola?

•19 Um caminhão de 2100 kg viajando para o norte a 41 km/h vira para leste e acelera até 51 km/h. (a) Qual é a variação da energia cinética do caminhão? Quais são (b) o módulo e (c) o sentido da variação do momento?

••20 A Fig. 9-48 mostra uma vista superior da trajetória de uma bola de sinuca de 0,165 kg que se choca com uma das tabelas. A velocidade escalar da bola antes do choque é de 2,00 m/s e o ângulo θ_1 é 30,0°. O choque inverte a componente y da velocidade da bola, mas não altera a componente x. Determine (a) o ângulo θ_2 e (b) a variação do momento linear da bola em termos dos vetores unitários. (O fato de que a bola está rolando é irrelevante para o problema.)

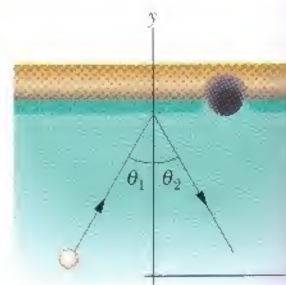


FIG. 9-48 Problema 20.

••21 Uma bola de softball de 0,30 kg tem uma velocidade escalar de 15 m/s e um ângulo de 35° abaixo da horizontal imediatamente antes de ser golpeada por um taco. Qual é o módulo da

variação do momento linear da bola na colisão com o taco se ela adquire uma velocidade escalar (a) de 20 m/s, verticalmente para baixo; (b) de 20 m/s, horizontalmente na direção do lançador?

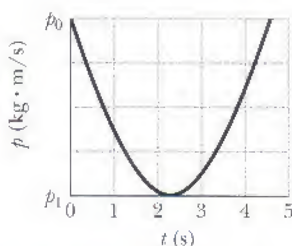


FIG. 9-49 Problema 22.

••22 No instante $t = 0$, uma bola é lançada para cima a partir do nível do solo, em terreno plano. A Fig. 9-49 mostra o módulo p do momento linear da bola em função do tempo t após o lançamento ($p_0 = 6{,}0$ kg·m/s e $p_1 = 4{,}0$ kg·m/s). Determine o ângulo de lançamento.

seção 9-6 Colisão e Impulso

•23 Uma força no sentido negativo de um eixo x é aplicada por 27 ms a uma bola de 0,40 kg que estava se movendo a 14 m/s no sentido positivo do eixo. O módulo da força é variável e o impulso tem um módulo de 32,4 N · s. Quais são (a) o módulo e (b) o sentido da velocidade da bola imediatamente após a aplicação da força? Quais são (c) a intensidade média da força e (d) a orientação do impulso aplicado à bola?

•24 Em uma brincadeira comum, mas muito perigosa, alguém puxa uma cadeira quando uma pessoa está prestes a se sentar, fazendo com que a vítima se estatele no chão. Suponha que a vítima tem 70 kg, cai de uma altura de 0,50 m e a colisão com o piso dura 0,082 s. Quais são os módulos (a) do impulso e (b) da força média aplicada pelo piso sobre a pessoa durante a colisão?

•25 Com mais de 70 anos de idade, Henri LaMothe (Fig. 9-50) assombrava os espectadores mergulhando de barriga de uma altura de 12 m em um tanque de água com 30 cm de profundidade. Supondo que ele parava quando estava prestes a chegar ao fundo do tanque e estimando sua massa, calcule o módulo do impulso que a água exercia sobre ele em um desses mergulhos.

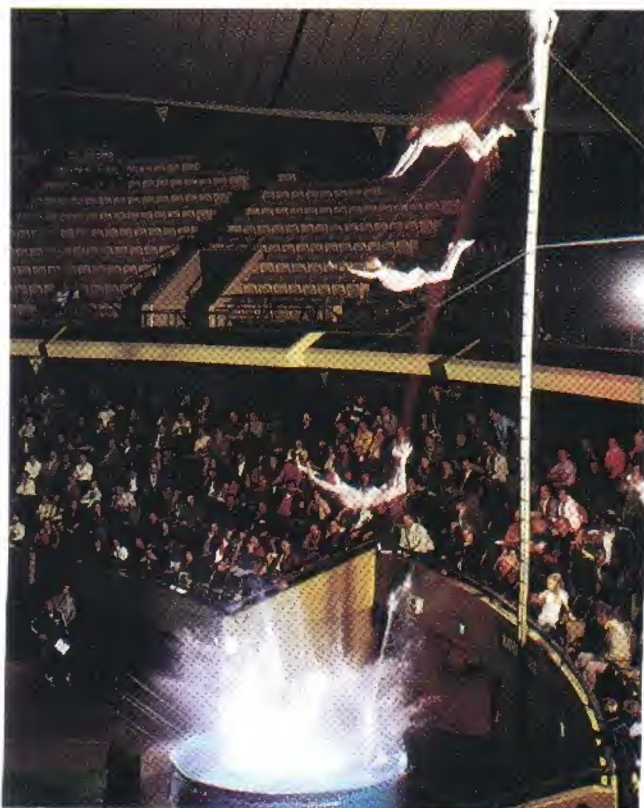


FIG. 9-50 Problema 25. Mergulho de barriga em um tanque de água com 30 cm de profundidade. *(George Long/Sports Illustrated/©Time, Inc.)*

•26 Em fevereiro de 1955 um pára-quedista saltou de um avião, caiu 370 m sem conseguir abrir o pára-quedas e aterrissou em um campo de neve, sofrendo apenas pequenas escoriações. Suponha que sua velocidade imediatamente antes do impacto era de 56 m/s (velocidade terminal), que sua massa (incluindo os equipamentos) era de 85 kg e que a força da neve sobre ele tenha atingido o valor (relativamente seguro) de $1{,}2 \times 10^5$ N. Determine (a) a profundidade mínima da neve para que escapasse sem ferimentos graves e (b) o módulo do impulso da neve sobre ele.

•27 Uma bola de 1,2 kg cai verticalmente em um piso com uma velocidade de 25 m/s e ricocheteia com uma velocidade inicial de 10 m/s. (a) Qual é o impulso recebido pela bola durante o contato com o piso? (b) Se a bola fica em contato com o piso por 0,020 s, qual é a força média exercida pela bola sobre o piso?

•28 No tae kwon do, a mão de um atleta atinge o alvo com uma velocidade de 13 m/s e pára após 5,0 ms. Suponha que durante o choque a mão é independente do braço e tem uma massa de 0,70 kg. Determine os módulos (a) do impulso e (b) da força média que a mão exerce sobre o alvo.

•29 Um bandido aponta uma metralhadora para o peito do Super-homem e dispara 100 balas/min. Suponha que a massa de uma bala é de 3 g, que a velocidade das balas é de 500 m/s e que as balas ricocheteiam no peito do super-herói sem perder velocidade. Qual é o módulo da força média que as balas exercem sobre o peito do Super-homem?

••30 Um carro de brinquedo de 5,0 kg pode se mover ao longo de um eixo x; a Fig. 9-51 mostra a componente F_x da força que age sobre o carro, que parte do repouso no instante $t = 0$. A escala do eixo x é definida por $F_{xs} = 5{,}0$ N. Em termos dos vetores unitários, determine (a) $\vec{p}$ em $t = 4{,}0$ s; (b) $\vec{p}$ em $t = 7{,}0$ s; (c) $\vec{v}$ em $t = 9{,}0$ s.

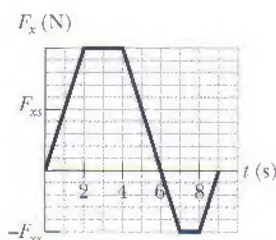


FIG. 9-51 Problema 30.

••31 A Fig. 9-52 mostra uma bola de beisebol de 0,300 kg imediatamente antes e imediatamente depois de colidir com um taco. Imediatamente antes a bola tem uma velocidade $\vec{v}_1$ de módulo 12,0 m/s e ângulo $\theta_1 = 35°$. Imediatamente depois a bola se move para cima na vertical com uma velocidade $\vec{v}_2$ de módulo 10,0 m/s. A duração da colisão é de 2,00 ms. Quais são (a) o módulo e (b) a orientação (em relação ao semi-eixo x positivo) do impulso do taco sobre a bola? Quais são (c) o módulo e (d) o sentido da força média que o taco exerce sobre a bola?

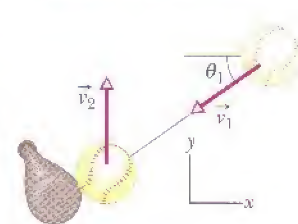


FIG. 9-52 Problema 31.

••32 O lagarto basilisco é capaz de correr sobre a superfície da água (Fig. 9-53). Em cada passo o lagarto bate na água com a pata e a mergulha tão depressa que uma cavidade de ar se forma acima da pata. Para não ter que puxar a pata de volta sob a ação da força de arrasto da água, o lagarto levanta a pata antes que a água penetre na cavidade de ar. Para que o lagarto não afunde o impulso médio para cima exercido durante essa manobra de bater na água

com a pata, afundá-la e recolhê-la deve ser igual ao impulso para baixo exercido pela força gravitacional. Suponha que a massa de um lagarto basilisco seja de 90,0 g, a massa de cada pata seja de 3,00 g, a velocidade de uma pata ao bater na água seja de 1,50 m/s e a duração de um passo seja de 0,600 s. (a) Qual é o módulo do impulso que a água exerce sobre o lagarto quando este bate com a pata na água? (Suponha que esse impulso está orientado verticalmente para cima.) (b) Durante os 0,600 s de um passo, qual é o impulso para baixo sobre o lagarto devido à força gravitacional? (c) Existe um movimento, o de bater com a pata na água ou o de afundá-la, que é o principal responsável pela sustentação do lagarto, ou ambos contribuem igualmente?



FIG. 9-53 Problema 32. Lagarto correndo sobre a água. *(Stephen Dalton/Photo Researchers)*

••33 *Pulando antes do choque.* Quando o cabo arrebenta e o sistema de segurança falha, um elevador cai em queda livre de uma altura de 36 m. Durante a colisão no fundo do poço do elevador a velocidade de um passageiro de 90 kg se anula em 5,0 ms. (Suponha que não há ricochete nem do passageiro nem do elevador.) Quais são os módulos (a) do impulso e (b) da força média experimentados pelo passageiro durante a colisão? Se o passageiro pula verticalmente para cima com uma velocidade de 7,0 m/s em relação ao piso do elevador quando o elevador está prestes a se chocar com o fundo do poço, quais são os módulos (c) do impulso e (d) da força média (supondo que o tempo que o passageiro leva para parar permaneça o mesmo)?

••34 *Duas forças médias.* Uma série de bolas de neve de 0,250 kg é disparada perpendicularmente contra uma parede com uma velocidade de 4,00 m/s. As bolas ficam grudadas na parede. A Fig. 9-54 mostra o módulo F da força sobre a parede em função do tempo t para dois choques consecutivos. Os choques ocorrem a intervalos $\Delta t_r = 50{,}0$ ms, duram um intervalo de tempo $\Delta t_d = 10$ ms e produzem triângulos isósceles no gráfico, com cada choque resultando em uma força máxima $F_{máx} = 200$ N. Para cada choque,

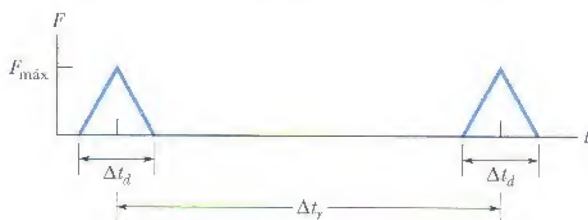


FIG. 9-54 Problema 34.

quais são os módulos (a) do impulso e (b) da força média aplicada à parede? (c) Em um intervalo de tempo correspondente a muitos choques, qual é o módulo da força média exercida sobre a parede?

••35 Um jogador de futebol chuta uma bola com massa de 0,45 kg que se encontra em repouso. O pé do jogador fica em contato com a bola por $3{,}0 \times 10^{-3}$ s e a força do chute é dada por

$$F(t) = [(6{,}0 \times 10^6)t - (2{,}0 \times 10^9)t^2]\ \text{N}$$

para $0 \le t \le 3{,}0 \times 10^{23}$ s, onde t está em segundos. Determine o módulo (a) do impulso sobre a bola devido ao chute, (b) da força média do pé do jogador sobre a bola durante o contato, (c) da força máxima exercida pelo pé do jogador sobre a bola durante o contato e (d) da velocidade da bola imediatamente após perder o contato com o pé do jogador.

••36 Na vista superior da Fig. 9-55, uma bola de 300 g com uma velocidade escalar v de 6,0 m/s de choca com uma parede com um ângulo θ de 30° e ricocheteia com a mesma velocidade escalar e o mesmo ângulo. A bola permanece em contato com a parede por 10 ms. Em termos dos vetores unitários, quais são (a) o impulso da parede sobre a bola e (b) a força média da bola sobre a parede?

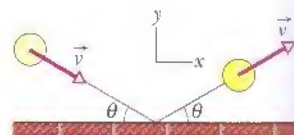


FIG. 9-55 Problema 36.

••37 A Fig. 9-56 mostra um gráfico aproximado do módulo da força F em função do tempo t para uma colisão de uma superbola de 58 g com uma parede. A velocidade inicial da bola é 34 m/s, perpendicular à parede; ela ricocheteia praticamente com a mesma velocidade escalar, também perpendicular à parede. Quanto vale $F_{máx}$, o módulo máximo da força exercida pela parede sobre a bola durante a colisão?

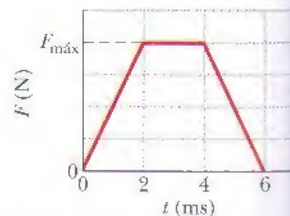


FIG. 9-56 Problema 37.

••38 Um disco de metal de 0,25 kg está inicialmente em repouso sobre uma superfície de gelo de atrito desprezível. No instante $t = 0$, uma força horizontal começa a agir sobre o disco. A força é dada por $\vec{F} = (12{,}0 - 3{,}00t^2)\hat{\imath}$, com $\vec{F}$ em newtons e t em segundos, e age até que seu módulo se anule. (a) Qual é o módulo do impulso da força sobre o disco entre $t = 0{,}500$ s e $t = 1{,}25$ s? (b) Qual é a variação do momento do disco entre $t = 0$ e o instante em que $F = 0$?

seção 9-7 Conservação do Momento Linear

•39 Um homem de 91 kg em repouso sobre uma superfície de atrito desprezível arremessa uma pedra de 68 g com uma velocidade horizontal de 4,0 m/s. Qual é a velocidade do homem após o arremesso?

•40 Uma nave espacial está se movendo a 4300 km/h em relação à Terra quando, após ter queimado todo o combustível, o motor do foguete (de massa $4m$) é desacoplado e ejetado para trás com uma velocidade de 82 km/h em relação ao módulo de comando (de massa m). Qual é a velocidade do módulo de comando em relação à Terra imediatamente após a separação?

••41 Na Olimpíada de 708 a.C. alguns atletas disputaram a prova de salto em distância segurando pesos chamados *halteres* para melhorar o desempenho (Fig. 9-57). Os pesos eram colocados à frente do corpo no início do salto e arremessados para trás durante o salto. Suponha que um atleta moderno de 78 kg

use dois halteres de 5,50 kg, arremessando-os horizontalmente para trás ao atingir a altura máxima, de tal forma que a velocidade horizontal dos pesos em relação ao chão seja zero. Suponha que a velocidade inicial do atleta seja $\vec{v} = (9{,}5\hat{i} + 4{,}0\hat{j})$ m/s com ou sem os halteres e que o terreno seja plano. Qual é a diferença entre as distâncias que o atleta consegue saltar com e sem os halteres?

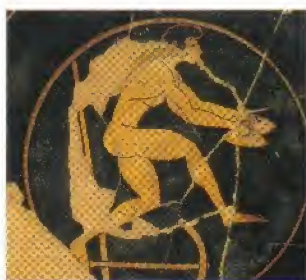


FIG. 9-57 Problema 41. *(Réunion des Musées Nationaux/Art Resource)*

••42 Um balde de 4 kg que está deslizando em uma superfície sem atrito explode em dois fragmentos de 2,0 kg, um que se move para o norte a 3,0 m/s e outro que se move em uma direção 30° ao norte do leste a 5,0 m/s. Qual era a velocidade escalar do balde antes da explosão?

••43 A Fig. 9-58 mostra um "foguete" de duas pontas que está inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito, com o centro na origem de um eixo x. O foguete é formado por um bloco central C (de massa $M = 6{,}00$ kg) e dois blocos E e D (de massa $m = 2{,}00$ kg cada um) dos lados esquerdo e direito. Pequenas explosões podem arremessar esses blocos para longe do bloco C, ao longo do eixo x. Considere a seguinte seqüência: (1) no instante $t = 0$ o bloco E é arremessado para a esquerda com uma velocidade de 3,00 m/s *em relação* à velocidade que a explosão imprime ao resto do foguete. (2) No instante $t = 0{,}80$ s o bloco D é arremessado para a direita com uma velocidade de 3,00 m/s *em relação* à velocidade do bloco C nesse momento. No instante $t = 2{,}8$ s, quais são (a) a velocidade do bloco C e (b) a posição do centro do bloco C?

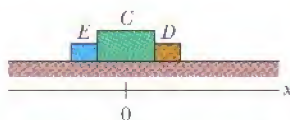


FIG. 9-58 Problema 43.

••44 Um objeto de massa m e velocidade v em relação a um observador explode em dois pedaços, um com massa três vezes maior do que o outro; a explosão ocorre no espaço sideral. O pedaço de menor massa fica em repouso em relação ao observador. Qual é o aumento da energia cinética do sistema causado pela explosão, no referencial do observador?

••45 Um copo em repouso na origem de um sistema de coordenadas xy explode em três pedaços. Logo depois da explosão um dos pedaços, de massa m, está se movendo com velocidade $(-30 \text{ m/s})\hat{i}$, e um segundo pedaço, também de massa m, está se movendo em velocidade $(-30 \text{ m/s})\hat{j}$. O terceiro pedaço tem massa $3m$. Determine (a) o módulo e (b) a orientação da velocidade do terceiro pedaço logo após a explosão.

••46 Na Fig. 9-59, um bloco inicialmente em repouso explode em dois pedaços, E e D, que deslizam sobre um piso em um trecho sem atrito e depois entram em regiões com atrito, onde acabam parando. O pedaço E, com uma massa de 2,0 kg, encontra um coeficiente de atrito cinético $\mu_E = 0{,}40$ e chega ao repouso em uma distância $d_E = 0{,}15$ m. O pedaço D encontra um coeficiente de atrito cinético $\mu_D = 0{,}50$ e desliza até o repouso em uma distância $d_D = 0{,}25$ m. Qual era a massa do bloco?

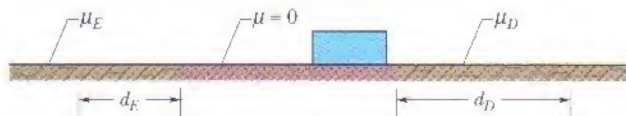


FIG. 9-59 Problema 46.

••47 Um corpo de 20,0 kg está se movendo no sentido positivo de um eixo x com uma velocidade de 200 m/s quando, devido a uma explosão interna, se quebra em três pedaços. Um dos pedaços, com uma massa de 10,0 kg, se afasta do ponto da explosão com uma velocidade de 100 m/s no sentido positivo do eixo y. Um segundo pedaço, com uma massa de 4,00 kg, se move no sentido negativo do eixo x com uma velocidade de 500 m/s. (a) Em termos dos vetores unitários, qual é a velocidade da terceira parte? (b) Qual é a energia liberada na explosão? Ignore os efeitos da força gravitacional.

•••48 Uma partícula A e uma partícula B são empurradas uma contra a outra, comprimindo uma mola colocada entre elas. Quando são liberadas, a mola as arremessa em sentidos opostos. A massa de A é 2,00 vezes a massa de B, e a energia armazenada na mola era de 60 J. Suponha que a mola tenha massa desprezível e que toda a energia armazenada seja transferida para as partículas. Depois de terminada essa transferência, qual é a energia cinética (a) da partícula A e (b) da partícula B?

seção 9-9 Colisões Inelásticas em Uma Dimensão

•49 Uma bala com 10 g de massa se choca com um pêndulo balístico com 2,00 kg de massa. O centro de massa do pêndulo sobe uma distância vertical de 12 cm. Supondo que a bala fica alojada no pêndulo, calcule a velocidade inicial da bala.

•50 Uma bala de 5,20 g a 672 m/s atinge um bloco de madeira de 700 g inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito. A bala atravessa o bloco e emerge, viajando no mesmo sentido, com sua velocidade reduzida para 428 m/s. (a) Qual é a velocidade final do bloco? (b) Qual é a velocidade do centro de massa do sistema bala-bloco?

••51 Em Anchorage, as colisões de um veículo com um alce são tão comuns que são chamadas de CVA. Suponha que um carro de 1000 kg derrape até atropelar um alce estacionário de 500 kg em uma estrada muito escorregadia, com o alce atravessando o pára-brisa (o que acontece muitas vezes nesse tipo de atropelamento). (a) Que porcentagem da energia cinética do carro é transformada pela colisão em outras formas de energia? Acidentes semelhantes acontecem na Arábia Saudita, nas chamadas CVC (colisões entre um veículo e um camelo). (b) Que porcentagem da energia cinética do carro é perdida se a massa do camelo é de 300 kg? (c) No caso geral, a perda percentual aumenta ou diminui quando a massa do animal diminui?

••52 Na situação "antes" da Fig. 9-60, o carro A (com uma massa de 1100 kg) está parado em um sinal de trânsito quando é atingido na traseira pelo carro B (com uma massa de 1400 kg). Os dois carros derrapam com as rodas travadas até que a força de atrito com o asfalto molhado (com um coeficiente de atrito μ_k de 0,13) os leva ao repouso depois de percorrer as distâncias d_A =

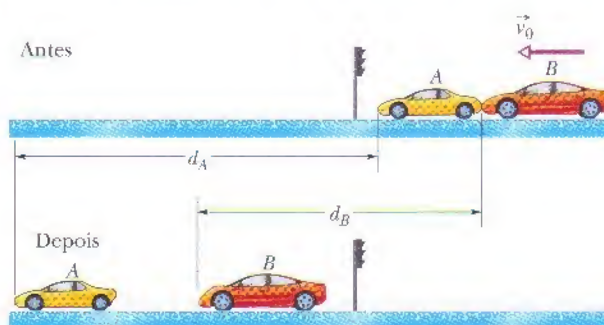


FIG. 9-60 Problema 52.

8,2 m e d_B = 6,1 m. Qual é a velocidade escalar (a) do carro *A* e (b) do carro *B* no início da derrapagem, logo após a colisão? (b) Supondo que o momento linear é conservado na colisão, determine a velocidade escalar do carro *B* pouco antes da colisão. (d) Explique por que esta suposição pode não ser válida.

••53 Na Fig. 9-61*a* uma bala de 3,50 g é disparada horizontalmente contra dois blocos inicialmente em repouso sobre uma mesa sem atrito. A bala atravessa o bloco 1 (com 1,20 kg de massa) e fica alojada no bloco 2 (com 1,80 kg de massa). Os blocos terminam com velocidades v_1 = 0,630 m/s e v_2 = 1,40 m/s (Fig. 9-61*b*). Desprezando o material removido do bloco 1 pela bala, encontre a velocidade da bala (a) ao sair do bloco 1 e (b) ao entrar no bloco 1.

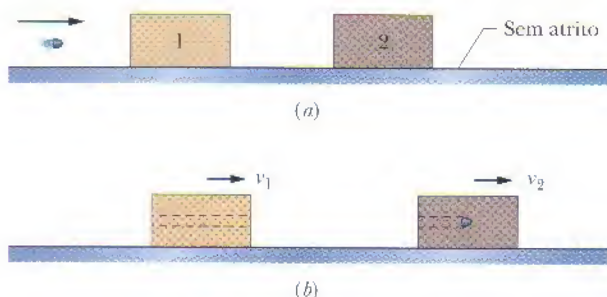


FIG. 9-61 Problema 53.

••54 Na Fig. 9-62, uma bala de 10 g que se move verticalmente para cima a 1000 m/s se choca com um bloco de 5,0 kg inicialmente em repouso, passando pelo seu centro de massa. A bala deixa o bloco movendo-se verticalmente para cima a 400 m/s. Que altura máxima o bloco atinge em relação à posição inicial?

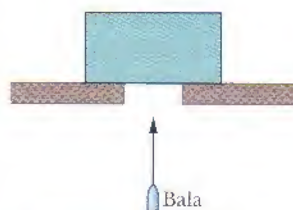


FIG. 9-62 Problema 54.

••55 Na Fig. 9-63, uma bola de massa *m* = 60 g é disparada com velocidade v_i = 22 m/s para dentro do cano de um canhão de mola de massa *M* = 240 g inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito. A bola fica presa no cano do canhão no ponto de máxima compressão da mola. Suponha que o aumento da energia térmica devido ao atrito da bola com o cano é desprezível. (a) Qual é a velocidade escalar do canhão depois que a bola pára dentro do cano? (b) Que fração da energia cinética inicial da bola fica armazenada na mola?



FIG. 9-63 Problema 55.

••56 Uma colisão perfeitamente inelástica ocorre entre duas bolas de massa de modelar que se movem diretamente uma contra a outra ao longo de um eixo vertical. Imediatamente antes da colisão uma das bolas, de massa 3,00 kg, está se movendo para cima a 20 m/s e a outra bola, de massa 2,0 kg, está se movendo para baixo a 12 m/s. Que altura acima do ponto de colisão as duas bolas unidas atingem? (Despreze a resistência do ar.)

••57 Um bloco de 5,0 kg, com uma velocidade escalar de 3,0 m/s, colide com um bloco de 10 kg com uma velocidade escalar de 2,00 m/s na mesma direção e sentido. Após a colisão, o bloco de 10 kg passa a se mover no mesmo sentido com uma velocidade de 2,5 m/s. (a) Qual é a velocidade do bloco de 5,0 kg imediatamente após a colisão? (b) De quanto varia a energia cinética total do sistema dos dois blocos por causa da colisão? (c) Suponha que a velocidade do bloco de 10 kg após o choque é de 4,0 m/s. Qual é, nesse caso, a variação da energia cinética total? (d) Explique o resultado do item (c).

•••58 Na Fig. 9-64 o bloco 2 (com uma massa de 1,0 kg) está em repouso sobre uma superfície sem atrito e em contato com uma extremidade de uma mola relaxada de constante elástica 200 N/m. A outra extremidade da mola está presa em uma parede. O bloco 1 (com uma massa de 2,0 kg), que se move com uma velocidade v_1 = 4,0 m/s, colide com o bloco 2 e os dois blocos permanecem juntos. No instante em que os blocos param momentaneamente, qual é a compressão da mola?



FIG. 9-64 Problema 58.

•••59 Na Fig. 9-65, o bloco 1 (com uma massa de 2,0 kg) está se movendo para a direita a 10 m/s e o bloco 2 (com uma massa de 5,0 kg) está se movendo para a direita a 3,0 m/s. A superfície não tem atrito, e uma mola com uma constante elástica de 1120 N/m está presa no bloco 2. Quando os blocos colidem, a compressão da mola é máxima no instante em que os blocos têm a mesma velocidade. Determine a máxima compressão da mola.

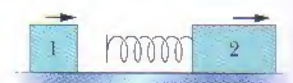


FIG. 9-65 Problemas 59 e 126.

seção 9-10 Colisões Elásticas em Uma Dimensão

•60 Duas esferas de titânio se aproximam com a mesma velocidade escalar e sofrem uma colisão elástica frontal. Após a colisão, uma das esferas, cuja massa é de 300 g, permanece em repouso. (a) Qual é a massa da outra esfera? (b) Qual é a velocidade do centro de massa das duas esferas se a velocidade escalar inicial de cada esfera é de 2,00 m/s?

•61 Um carrinho com 340 g de massa, que se move em uma pista sem atrito com uma velocidade inicial de 1,2 m/s, sofre uma colisão elástica com outro carrinho inicialmente em repouso de massa desconhecida. Após a colisão o primeiro carrinho continua a se mover na mesma direção e sentido com uma velocidade escalar de 0,66 m/s. (a) Qual é a massa do segundo carrinho? (b) Qual é a velocidade do segundo carrinho após a colisão? (c) Qual é a velocidade do centro de massa do sistema dos dois carrinhos?

•62 Na Fig. 9-66, o bloco *A* (com uma massa de 1,6 kg) desliza em direção ao bloco *B* (com uma massa de 2,4 kg) ao longo de uma superfície sem atrito. Os sentidos de três velocidades antes (*i*) e depois (*f*) da colisão estão indicados; as velocidades escalares correspondentes são v_{Ai} = 5,5 m/s, v_{Bi} = 2,5 m/s e v_{Bf} = 4,9 m/s. Determine (a) o módulo e (b) o sentido (para a esquerda ou para a direita) da velocidade $\vec{v}_{Af}$. (c) A colisão é elástica?

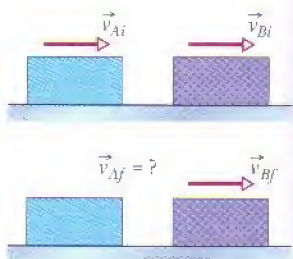


FIG. 9-66 Problema 62.

••63 Um corpo com 2,0 kg de massa sofre uma colisão elástica com outro corpo em repouso e continua a se mover na mesma direção e sentido, mas com um quarto da velocidade inicial. (a) Qual é a massa do outro corpo? (b) Qual é a velocidade do centro de massa dos dois corpos se a velocidade inicial do corpo de 2,0 kg era 4,0 m/s?

••64 Um bloco 1, de massa m_1 e velocidade 4,0 m/s, que desliza ao longo de um eixo *x* sobre um piso sem atrito, sofre uma colisão

elástica com um bloco 2 de massa $m_2 = 0{,}40m_1$, inicialmente em repouso. Os dois blocos deslizam para uma região onde o coeficiente de atrito cinético é 0,50, onde acabam parando. Que distância dentro desta região (a) o bloco 1 percorre e (b) o bloco 2 percorre?

••65 Na Fig. 9-67, a partícula 1, de massa $m_1 = 0{,}30$ kg, desliza para a direita ao longo de um eixo x sobre um piso sem atrito com uma velocidade escalar de 2,0 m/s. Quando chega ao ponto $x = 0$ sofre uma colisão elástica unidimensional com a partícula 2 de massa $m_2 = 0{,}40$ kg, inicialmente em repouso. Quando a partícula 2 se choca com uma parede no ponto $x_p = 70$ cm ricocheteia sem perder velocidade escalar. Em que ponto do eixo x a partícula 2 volta a colidir com a partícula 1?

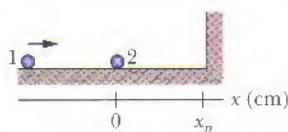
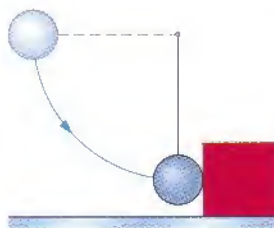


FIG. 9-67 Problema 65.

••66 Uma bola de aço de massa 0,500 kg está presa em uma extremidade de uma corda de 70,0 cm de comprimento. A outra extremidade está fixa. A bola é liberada quando a corda está na horizontal (Fig. 9-68). Na parte mais baixa da trajetória a bola se choca com um bloco de metal de 2,50 kg inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito. A colisão é elástica. Determine (a) a velocidade escalar da bola e (b) a velocidade escalar do bloco, ambas imediatamente após a colisão.


FIG. 9-68 Problema 66.

••67 O bloco 1 de massa m_1 desliza sobre um piso sem atrito e sofre uma colisão elástica unidimensional com o bloco 2 de massa $m_2 = 3m_1$. Antes da colisão, o centro de massa do sistema de dois blocos tinha uma velocidade de 3,00 m/s. Quais as velocidades (a) do centro de massa e (b) do bloco 2 após a colisão?

••68 Na Fig. 9-69, o bloco 1 de massa m_1 desliza sem velocidade inicial ao longo de uma rampa sem atrito a partir de uma altura $h = 2{,}50$ m e colide com o bloco 2 de massa $m_2 = 2{,}00m_1$, inicialmente em repouso. Após a colisão o bloco 2 desliza em uma região onde o coeficiente de atrito cinético μ_k é 0,500 e pára depois de percorrer uma distância d nessa região. Qual é o valor da distância d se a colisão é (a) elástica e (b) perfeitamente inelástica?

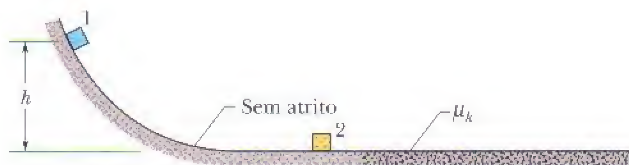


FIG. 9-69 Problema 68.

•••69 Uma pequena esfera de massa m está verticalmente acima de uma bola maior de massa $M = 0{,}63$ kg (com uma pequena separação, como no caso das bolas de beisebol e basquete da Fig. 9-70a), e as duas bolas são deixadas cair simultaneamente da altura $h = 1{,}8$ m. (Suponha que os raios das bolas são desprezíveis em relação a h.) (a) Se a bola maior ricocheteia elasticamente no chão e depois a bola menor ricocheteia elasticamente na maior, que valor de m faz com que a bola maior pare no momento em que colide com a menor? (b) Nesse caso, que altura atinge a bola menor (Fig. 9-70b)?



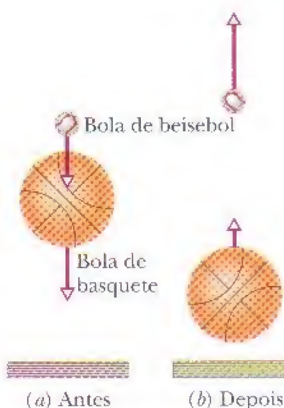


FIG. 9-70 Problema 69.

•••70 Na Fig. 9-71 o disco 1, de massa $m_1 = 0{,}20$ kg, desliza sem atrito em uma bancada de laboratório até sofrer uma colisão unidimensional com o disco 2, inicialmente em repouso. O disco 2 é arremessado para fora da bancada e vai cair a uma distância d da base da bancada. A colisão faz o disco 1 inverter o movimento e ele é arremessado para fora da extremidade oposta da bancada, indo cair a uma distância $2d$ da base oposta. Qual é a massa do disco 2? (*Sugestão:* Tome cuidado com os sinais.)

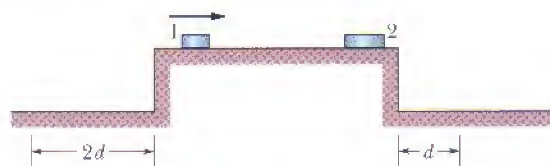


FIG. 9-71 Problema 70.

seção 9-11 Colisões em Duas Dimensões

••71 O próton 1, com uma velocidade de 500 m/s, colide elasticamente com o próton 2, inicialmente em repouso. Depois do choque os dois prótons se movem em trajetórias perpendiculares, com a trajetória do próton 1 fazendo 60° com a direção inicial. Após a colisão, quais são as velocidades escalares (a) do próton 1 e (b) do próton 2?

••72 Dois corpos de 2,0 kg, A e B, sofrem uma colisão. As velocidades antes da colisão são $\vec{v}_A = (15\hat{i} + 30\hat{j})$ m/s e $\vec{v}_B = (-10\hat{i} + 5{,}0\hat{j})$ m/s. Após a colisão, $\vec{v}\,'_A = (-5{,}0\hat{i} + 20\hat{j})$ m/s. Determine (a) a velocidade final de B e (b) a variação da energia cinética total (incluindo o sinal).

••73 Na Fig. 9-23 a partícula 1 é uma partícula alfa e a partícula 2 é um núcleo de oxigênio. A partícula alfa é espalhada de um ângulo $\theta_1 = 64{,}0°$ e o núcleo de oxigênio recua com velocidade $1{,}20 \times 10^5$ m/s e um ângulo $\theta_2 = 51{,}0°$. Em unidades de massa atômica, a massa da partícula alfa é 4,00 u e a massa do núcleo de hidrogênio é 16,0 u. Quais são as velocidades (a) final e (b) inicial da partícula alfa?

••74 A bola B, que se move no sentido positivo de um eixo x com velocidade v, colide com a bola A inicialmente em repouso na origem. A e B têm massas diferentes. Após a colisão, B se move no sentido negativo do eixo y com velocidade escalar $v/2$. (a) Qual é a orientação de A após a colisão? (b) Mostre que a velocidade de A não pode ser determinada a partir das informações dadas.

•••75 Após uma colisão perfeitamente inelástica, dois objetos de mesma massa e mesma velocidade escalar deslocam-se juntos com metade da velocidade inicial. Determine o ângulo entre as velocidades iniciais dos objetos.

seção 9-12 Sistemas de Massa Variável: Um Foguete

•76 Considere um foguete que está no espaço sideral e em repouso em relação a um referencial inercial. O motor do foguete

deve ser acionado por um certo intervalo de tempo. Determine a *razão de massa* do foguete (razão entre as massas inicial e final) neste intervalo para que a velocidade original do foguete em relação ao referencial inercial seja igual (a) à velocidade de exaustão (velocidade dos produtos de exaustão em relação ao foguete) e (b) a duas vezes a velocidade de exaustão.

•77 Um foguete que se encontra no espaço sideral e está inicialmente em repouso em relação a um referencial inercial tem uma massa de $2{,}55 \times 10^5$ kg, da qual $1{,}81 \times 10^5$ kg são de combustível. O motor do foguete é acionado por 250 s, durante os quais o combustível é consumido à taxa de 480 kg/s. A velocidade dos produtos de exaustão em relação ao foguete é de 3,27 km/s. (a) Qual é o empuxo do foguete? Após os 250 s de funcionamento do motor, quais são (b) a massa e (c) a velocidade do foguete?

•78 Uma sonda espacial de 6090 kg, movendo-se em direção a Júpiter a uma velocidade de 105 m/s em relação ao Sol, aciona o motor, ejetando 80,0 kg de produtos de combustão a uma velocidade de 253 m/s em relação à sonda espacial. Qual é a velocidade final da sonda?

•79 Na Fig. 9-72 duas longas barcaças estão se movendo na mesma direção em águas tranqüilas, uma a 10 km/h e a outra a 20 km/h. Quando estão passando uma pela outra, operários jogam carvão da mais lenta para a mais rápida a uma taxa de 1000 kg/min. Que força adicional deve ser fornecida pelos motores (a) da barcaça mais rápida e (b) da barcaça mais lenta para que suas velocidades não mudem? Suponha que a transferência de carvão é perpendicular à direção do movimento das barcaças e que a força de atrito entre as barcaças e a água não depende de suas massas.

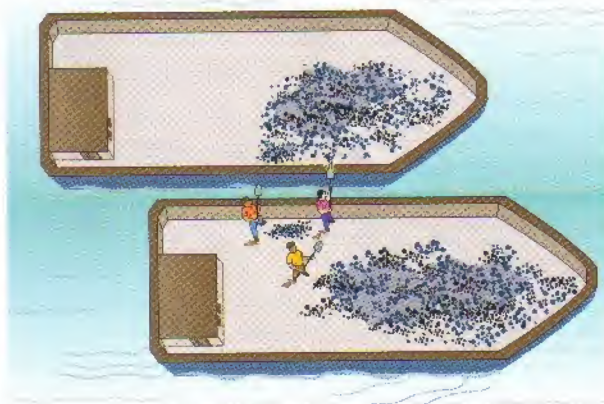


FIG. 9-72 Problema 79.

Problemas Adicionais

80 *Amplificador de velocidade.* Na Fig. 9-73 o bloco 1, de massa m_1, desliza ao longo de um eixo x sobre um piso sem atrito com uma velocidade v_{1i} = 4,00 m/s, até sofrer uma colisão elástica unidimensional com o bloco 2, de massa $m_2 = 0{,}500m_1$, inicialmente em repouso. Em seguida, o bloco 2 sofre uma colisão elástica unidimensional com o bloco 3 de massa $m_3 = 0{,}500m_2$, inicialmente em repouso. (a) Qual é a velocidade do bloco 3 após a colisão? (b) A velocidade, (c) a energia cinética e (d) o momento do bloco 3 são maiores, menores ou iguais aos valores iniciais do bloco 1?



FIG. 9-73 Problema 80.

81 *Redutor de velocidade.* Na Fig. 9-74 o bloco 1, de massa m_1, desliza ao longo de um eixo x sobre um piso sem atrito com uma velocidade de 4,00 m/s, até sofrer uma colisão elástica unidimensional com o bloco 2, de massa $m_2 = 2{,}00m_1$, inicialmente em repouso. Em seguida, o bloco 2 sofre uma colisão elástica unidimensional com o bloco 3, de massa $m_3 = 2{,}00m_2$, inicialmente em repouso. (a) Qual é a velocidade final do bloco 3? (b) A velocidade, (c) a energia cinética e (d) o momento do bloco 3 são maiores, menores ou iguais aos valores iniciais do bloco 1?

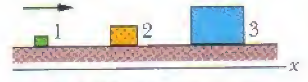


FIG. 9-74 Problema 81.

82 A Fig. 9-75 mostra uma vista superior de duas partículas deslizando com velocidade constante sobre uma superfície sem atrito. As partículas têm a mesma massa e a velocidade escalar inicial v = 4,00 m/s, e colidem no ponto em que suas trajetórias se interceptam. Um eixo x coincide com a bissetriz do ângulo entre as trajetórias incidentes; θ = 40,0°. A região à direita da colisão está dividida em quatro partes, identificadas por letras, pelo eixo x e quatro retas tracejadas numeradas. Em que região ou ao longo de que reta as partículas viajam se a colisão é (a) perfeitamente inelástica, (b) elástica e (c) inelástica? Quais são as velocidades escalares finais das partículas se a colisão é (d) perfeitamente inelástica e (e) elástica?

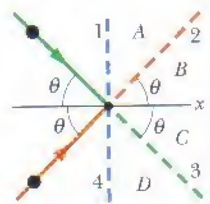


FIG. 9-75 Problema 82.

83 *"Relativamente" é uma palavra importante.* Na Fig. 9-76 o bloco E de massa m_E = 1,00 kg e o bloco D de massa m_D = 0,500 kg são mantidos no lugar com uma mola comprimida entre eles. Quando os blocos são liberados a mola os impulsiona e eles passam a deslizar em um piso sem atrito. (A mola tem massa desprezível e cai no piso depois de impulsionar os blocos.) (a) Se a mola imprime ao bloco E uma velocidade de 1,20 m/s *relativamente* ao piso, que distância o bloco D percorre em 0,800 s? (b) Se, em vez disso, a mola imprime ao bloco E uma velocidade de 1,20 m/s *relativamente* ao bloco D, que distância o bloco D percorre em 0,800 s?

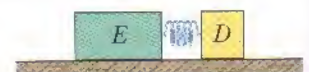


FIG. 9-76 Problema 83.

84 *Desabamento de um edifício.* Na seção reta de um edifício que aparece na Fig. 9-77*a* a infra-estrutura de um andar qualquer, K, deve ser capaz de sustentar o peso P de todos os andares que estão acima. Normalmente, a infra-estrutura é projetada com um fator de segurança s e pode sustentar uma força para baixo $sP > P$. Se, porém, as colunas de sustentação entre K e L cedem bruscamente e permitem que os andares mais altos caiam em queda livre sobre o andar K (Fig. 9-77*b*), a força da colisão pode exceder sP e fazer com que, depois de um breve período de tempo, o andar K caia sobre o andar J, que cai sobre o andar I, e assim por diante, até o andar térreo. Suponha que a distância entre os andares é d = 4,0 m e que todos têm a mesma massa. Suponha também que quando os andares que estão acima do andar K caem sobre o andar K em queda livre a colisão leva 1,5 ms. Nessas condições simplificadas, que valor deve ter o coeficiente de segurança s para que o edifício não desabe?

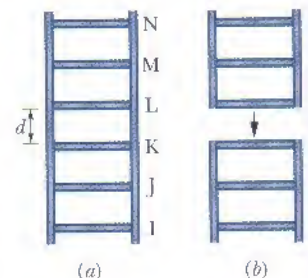


FIG. 9-77 Problema 84.

85 Um vagão de trem se move sob uma esteira transportadora de grãos com uma velocidade de 3,20 m/s. Os grãos caem no vagão a uma taxa de 540 kg/min. Qual é o módulo da força neces-

sária para manter o vagão em movimento com velocidade constante se o atrito é desprezível?

86 O *Tiranossauro rex* deve ter aprendido com a experiência a não correr muito depressa por causa do risco de tropeçar, situação na qual as curtas patas dianteiras não seriam de muita ajuda para amortecer a queda. Suponha que um *T. rex* de massa m tropece ao caminhar, tombando de modo que seu centro de massa desça em queda livre uma distância de 1,5 m. O centro de massa desce mais 0,30 m quando o corpo do animal é comprimido contra o solo. (a) Qual é, aproximadamente, o módulo da força vertical média exercida sobre o dinossauro durante a colisão com o chão (na descida de 0,30 cm), em múltiplos do peso do dinossauro? Suponha agora que o dinossauro está correndo com uma velocidade de 19 m/s (bem depressa) quando tropeça, cai no chão e desliza até parar com um coeficiente de atrito cinético de 0,6. Suponha também que a força vertical média na colisão e durante o deslizamento é a que foi calculada no item (a). Quais são, aproximadamente, (b) o módulo da força média total exercida pelo chão sobre o dinossauro (novamente em múltiplos do seu peso) e (c) a distância que ele desliza? Os módulos das forças calculados em (a) e (b) sugerem que a colisão produziria ferimentos no tronco do dinossauro. A cabeça, que percorreria uma distância maior na queda, estaria sujeita a ferimentos ainda mais graves.

87 Um homem (com 915 N de peso) está em pé em um vagão de trem (com 2415 N de peso) enquanto este se move a 18,2 m/s no sentido positivo de um eixo x, com atrito desprezível. O homem começa a correr no sentido negativo do eixo x a 4,00 m/s em relação ao vagão. Qual é o aumento na velocidade do vagão?

88 A Fig. 9-78 mostra uma placa quadrada uniforme de lado $6d$ = 6,0 m da qual um pedaço quadrado de lado $2d$ foi retirado. Quais são (a) a coordenada x e (b) a coordenada y do centro de massa da parte restante?

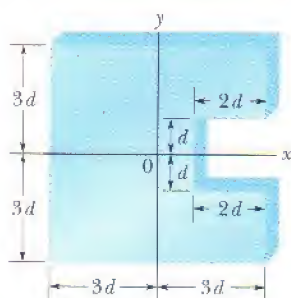


FIG. 9-78 Problema 88.

89 O último estágio de um foguete, que está viajando a uma velocidade de 7600 m/s, é composto de duas partes presas por uma trava: o invólucro do foguete, com uma massa de 290,0 kg, e uma cápsula de carga, com uma massa de 150,0 kg. Quando a trava é aberta uma mola inicialmente comprimida faz as duas partes se separarem com uma velocidade relativa de 910,0 m/s. Quais são as velocidades (a) do invólucro do foguete e (b) da cápsula de carga depois de separados? Suponha que todas as velocidades estão ao longo de uma mesma linha reta. Determine a energia cinética total das duas partes (c) antes e (d) depois de separadas. (e) Explique a diferença.

90 Um objeto é rastreado por uma estação de radar, e se verifica que seu vetor posição é dado por $\vec{r} = (3500 - 160t)\hat{\mathrm{i}} + 2700\hat{\mathrm{j}} + 300\hat{\mathrm{k}}$, com $\vec{r}$ em metros e t em segundos. O eixo x da estação de radar aponta para leste, o y para o norte e o z verticalmente para cima. Se o objeto é um foguete meteorológico de 250 kg, quais são (a) o momento linear do foguete, (b) a direção do movimento do foguete e (c) a força que age sobre o foguete?

91 Uma metralhadora de chumbinho dispara dez balas de 2,0 g por segundo com velocidade de 500 m/s. As balas são paradas por uma parede rígida. Quais são (a) o módulo do momento de cada bala, (b) a energia cinética de cada bala e (c) o módulo da força média exercida pelas balas sobre a parede? (d) Se cada bala permanece em contato com a parede por 0,60 ms, qual é o módulo da força média exercida por uma bala sobre a parede? (e) Por que essa força média é tão diferente da força média calculada em (c)?

92 Um corpo está se movendo a 2,0 m/s no sentido positivo de um eixo x; nenhuma força age sobre o corpo. Uma explosão interna separa o corpo em duas partes, ambas de 4,0 kg, e aumenta a energia cinética em 16 J. A parte da frente continua a se mover na mesma direção e sentido que o corpo original. Qual é a velocidade escalar (a) da parte de trás e (b) da parte da frente do corpo?

93 Um carro de 1400 kg está se movendo inicialmente para o norte a 5,3 m/s, no sentido positivo de um eixo y. Depois de fazer uma curva de 90° para a direita em 4,6 s, o motorista desatento bate em uma árvore, que pára o carro em 350 ms. Na notação de vetores unitários, qual é o impulso sobre o carro (a) devido à curva e (b) devido à colisão? Qual é o módulo da força média que age sobre o carro (c) durante a curva e (d) durante a colisão? (e) Qual é a direção da força média que age sobre o carro durante a curva?

94 Uma espaçonave é separada em duas partes pela detonação dos rebites explosivos que as mantêm unidas. As massas das partes são 1200 kg e 1800 kg; o módulo do impulso que a explosão dos rebites exerce sobre cada parte é 300 N · s. Com que velocidade relativa as duas partes se separam?

95 Uma bola com uma massa de 150 g se choca com uma parede a uma velocidade de 5,2 m/s e ricocheteia com apenas 50% da energia cinética inicial. (a) Qual é a velocidade escalar da bola imediatamente após o choque? (b) Qual é o módulo do impulso da bola sobre a parede? (c) Se a bola permanece em contato com a parede por 7,6 ms, qual é o módulo da força média que a parede exerce sobre a bola durante esse intervalo de tempo?

96 Um velho Chrysler com 2400 kg de massa está viajando em uma estrada retilínea a 80 km/h. Ele é seguido por um Ford com 1600 kg de massa a 60 km/h. Qual é a velocidade do centro de massa dos dois carros?

97 Uma locomotiva com uma massa de $3{,}18 \times 10^4$ kg colide com um vagão inicialmente em repouso. Eles permanecem juntos após a colisão e 27% da energia cinética inicial são transformados em energia térmica, sons, vibrações, e assim por diante. Determine a massa do vagão.

98 Dois blocos de massas 1,0 kg e 3,0 kg estão ligados por uma mola e repousam em uma superfície sem atrito. Eles adquirem velocidades um em direção ao outro de modo que o bloco de 1,0 kg viaja inicialmente a 1,7 m/s em direção ao centro de massa, que permanece em repouso. Qual é a velocidade inicial do outro bloco?

99 Um homem de 75 kg está andando em um carrinho de golfe de 39 kg a 2,3 m/s. Ele pula do carrinho com velocidade horizontal nula em relação ao chão. Qual é a variação da velocidade do carrinho, incluindo o sinal?

100 Um certo núcleo radioativo (pai) se transforma em um núcleo diferente (filho) emitindo um elétron e um neutrino. O núcleo-pai estava em repouso na origem de um sistema de coordenadas xy. O elétron se afasta da origem com um momento linear $(-1{,}2 \times 10^{-22}\ \mathrm{kg \cdot m/s})\hat{\mathrm{i}}$; o neutrino se afasta da origem com momento linear $(-6{,}4 \times 10^{-23}\ \mathrm{kg \cdot m/s})\hat{\mathrm{j}}$. Quais são (a) o módulo e (b) a orientação do momento linear do núcleo-filho? (c) Se o núcleo-filho tem uma massa de $5{,}8 \times 10^{-26}$ kg, qual é sua energia cinética?

101 No arranjo da Fig. 9-23 a bola de sinuca 1, que se move a 2,2 m/s, sofre uma colisão oblíqua com a bola de sinuca 2, que está inicialmente em repouso. Após a colisão a bola 2 se move com uma velocidade escalar de 1,1 m/s e um ângulo $\theta_2 = 60°$. Quais são (a) o módulo e (b) a orientação da velocidade da bola 1 após a colisão? (c) Os dados fornecidos mostram que a colisão é elástica ou inelástica?

102 Um foguete está se afastando do sistema solar com uma velocidade de $6,0 \times 10^3$ m/s. Ele aciona o motor, que ejeta produtos de combustão com uma velocidade de $3,0 \times 10^3$ m/s em relação ao foguete. A massa do foguete neste momento é $4,0 \times 10^4$ kg e a aceleração é de $2,0$ m/s^2. (a) Qual é o empuxo do motor do foguete? (b) A que taxa, em quilogramas por segundo, os produtos de combustão são ejetados?

103 As três bolas vistas de cima na Fig. 9-79 são iguais. As bolas 2 e 3 estão se tocando e alinhadas perpendicularmente à trajetória da bola 1. A velocidade da bola 1 tem módulo $v_0 = 10$ m/s e está dirigida para o ponto de contato das bolas 2 e 3. Após a colisão, quais são (a) o módulo e (b) a orientação da velocidade da bola 2, (c) o módulo e (d) a orientação da velocidade da bola 3 e (e) o módulo e (f) a orientação da velocidade da bola 1? (*Sugestão:* Sem atrito, cada impulso está dirigido ao longo da reta que liga os centros das bolas envolvidas na colisão e é perpendicular às superfícies que se tocam.)

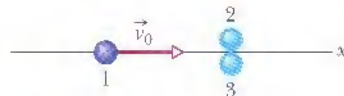


FIG. 9-79 Problema 103.

104 Em um jogo de sinuca a bola branca se choca com outra bola inicialmente em repouso. Após o choque, a bola branca se move a 3,50 m/s ao longo de uma reta que faz um ângulo de 22,0° com a direção do movimento da bola branca antes do choque, e a segunda bola tem uma velocidade escalar de 2,00 m/s. Determine (a) o ângulo entre a direção do movimento da segunda bola e a direção do movimento da bola branca antes do choque e (b) a velocidade escalar da bola branca antes do choque. (c) A energia cinética (dos centros de massa, não considere as rotações) é conservada?

105 Na Fig. 9-80, dois baldes com açúcar estão ligados por uma corda que passa por uma polia sem atrito. A corda e a polia têm massas desprezíveis, cada balde tem uma massa de 500 g (incluindo o açúcar), os centros dos baldes estão separados por uma distância de 50 mm e os baldes são mantidos à mesma altura. Qual é a distância horizontal entre o centro de massa do balde 1 e o centro de massa do sistema de dois baldes (a) inicialmente e (b) após 20 g de açúcar serem transferidos do balde 1 para o balde 2? Após a transferência e após os baldes serem liberados a partir do repouso, (c) em que sentido e (d) com que aceleração o centro de massa se move?

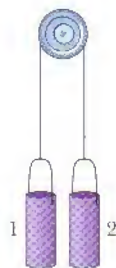


FIG. 9-80 Problema 105.

106 Uma bola de 0,15 kg se choca com uma parede com uma velocidade de $(5,00 \text{ m/s})\hat{i} + (6,50 \text{ m/s})\hat{j} + (4,0 \text{ m/s})\hat{k}$. Ela ricocheteia na parede e passa a ter uma velocidade de $(2,00 \text{ m/s})\hat{i} + (3,50 \text{ m/s})\hat{j} + (-3,20 \text{ m/s})\hat{k}$. Determine (a) a variação do momento da bola, (b) o impulso exercido pela parede sobre a bola e (c) o impulso exercido pela bola sobre a parede.

107 No instante $t = 0$ a força $\vec{F}_1 = (-4,00\hat{i} + 5,00\hat{j})$ N age sobre uma partícula de massa $2,00 \times 10^{-3}$ kg, inicialmente em repouso, e a força $\vec{F}_2 = (2,00\hat{i} - 4,00\hat{j})$ N age sobre uma partícula de massa $4,00 \times 10^{-3}$ kg, também inicialmente em repouso. Do instante $t = 0$ ao instante $t = 2,00$ ms quais são (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação ao semi-eixo x positivo) do deslocamento do centro de massa do sistema das duas partículas? (c) Qual é a energia cinética do centro de massa em $t = 2,00$ ms?

108 Uma bola de 0,550 kg cai verticalmente sobre um piso de concreto, atingindo-o com uma velocidade escalar de 12,0 m/s e ricocheteando verticalmente para cima com uma velocidade escalar de 3,00 m/s. Defina um eixo y vertical, com o sentido positivo para cima. Em termos dos vetores unitários, quais são (a) a variação do momento da bola, (b) o impulso que o piso exerce sobre a bola e (c) o impulso que a bola exerce sobre o piso?

109 Uma colisão ocorre entre um corpo de 2,00 kg que se move com uma velocidade $\vec{v}_1 = (-4,00 \text{ m/s})\hat{i} + (-5,00 \text{ m/s})\hat{j}$ e um corpo de 4,00 kg que se move com uma velocidade $\vec{v}_2 = (6,00 \text{ m/s})\hat{i} + (-2,00 \text{ m/s})\hat{j}$. Os dois corpos permanecem unidos após a colisão. Determine a velocidade comum dos dois corpos após a colisão (a) em termos dos vetores unitários e como (b) um módulo e (c) um ângulo.

110 Um núcleo atômico em repouso na origem de um sistema de coordenadas xy se transforma em três partículas. A partícula 1, de massa $16,7 \times 10^{-27}$ kg, se afasta da origem com uma velocidade de $(6,00 \times 10^6 \text{ m/s})\hat{i}$; a partícula 2, de massa $8,35 \times 10^{-27}$ kg se afasta com uma velocidade de $(-8,00 \times 10^6 \text{ m/s})\hat{j}$. (a) Qual é o momento linear da terceira partícula, de massa $11,7 \times 10^{-27}$ kg, em termos dos vetores unitários? (b) Qual é o aumento de energia cinética associado a esta transformação?

111 Um elétron sofre uma colisão elástica unidimensional com um átomo de hidrogênio inicialmente em repouso. Que porcentagem da energia cinética inicial do elétron é transferida para a energia cinética do átomo de hidrogênio? (A massa do átomo de hidrogênio é 1840 vezes maior que a massa do elétron.)

112 O roteiro de um filme de ação requer que um pequeno carro de corrida (com uma massa de 1500 kg e um comprimento de 3,0 m) acelere ao longo de uma barcaça (com uma massa de 4000 kg e um comprimento de 14 m), de uma extremidade a outra da embarcação, e salte para um cais um pouco mais abaixo. Você é o consultor técnico do filme. No momento em que o carro entra em movimento o barco está encostado no cais, como na Fig. 9-81; o barco pode deslizar na água sem resistência significativa; a distribuição de massa do carro e da barcaça pode ser considerada uniforme. Calcule qual será a distância entre o barco e o cais no instante do salto.

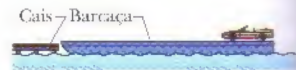


FIG. 9-81 Problema 112.

113 Um trenó-foguete com uma massa de 2900 kg se move a 250 m/s sobre dois trilhos. Em um certo ponto um tubo a bordo do trenó é mergulhado em um canal situado entre os trilhos e passa a transferir água para um tanque do trenó, inicialmente vazio. Aplicando a lei de conservação do momento linear, determine a velocidade do trenó depois que 920 kg de água são transferidos do canal para o trenó. Ignore o atrito do tubo com a água do canal.

114 Uma bola de 140 g com uma velocidade escalar de 7,8 m/s se choca perpendicularmente com uma parede e ricocheteia no sentido oposto com a mesma velocidade escalar. O choque dura 3,80 ms. Quais são os módulos (a) do impulso e (b) da força média que a bola exerce sobre a parede?

115 (a) A que distância do centro da Terra se encontra o centro de massa do sistema Terra-Lua? (O Apêndice C fornece as mas-

sas da Terra e da Lua e a distância entre os dois astros.) (b) A que porcentagem do raio da Terra corresponde essa distância?

116 Um módulo de 500,0 kg está acoplado a uma nave de transporte de 400,0 kg que se move a 1000 m/s em relação a uma nave-mãe em repouso. Uma pequena explosão faz o módulo se mover para trás com uma velocidade de 100,0 m/s em relação à nova velocidade da nave de transporte. Qual é o aumento relativo da energia cinética do módulo e da nave de transporte em conseqüência da explosão, do ponto de vista dos tripulantes da nave-mãe?

117 Um foguete de 6100 kg está preparado para ser lançado verticalmente a partir do solo. Se a velocidade de exaustão é de 1200 m/s, qual é a massa de gás que deve ser ejetada por segundo para que o empuxo (a) seja igual ao módulo da força gravitacional que age sobre o foguete e (b) proporcione ao foguete uma aceleração inicial para cima de 21 m/s²?

118 Um vagão aberto de 2140 kg, que pode se mover com atrito desprezível, está parado ao lado de uma plataforma. Um lutador de sumô de 242 kg corre a 5,3 m/s pela plataforma (paralelamente aos trilhos) e pula no vagão. Qual é a velocidade do vagão se o lutador (a) pára imediatamente, (b) continua a correr a 5,3 m/s em relação ao vagão, no mesmo sentido, e (c) faz meia-volta e passa a correr a 5,3 m/s em relação ao vagão no sentido oposto?

119 Na Fig. 9-82, o bloco 1 desliza ao longo de um eixo x sobre um piso sem atrito com uma velocidade de 0,75 m/s até sofrer uma colisão elástica com o bloco 2, inicialmente em repouso. A tabela a seguir mostra a massa e o comprimento dos blocos (homogêneos) e a posição dos seus centros no instante $t = 0$. Determine a posição do centro de massa do sistema de dois blocos (a) em $t = 0$, (b) no instante do choque e (c) em $t = 4{,}0$ s.

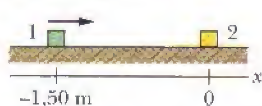


FIG. 9-82 Problema 119.

Bloco	Massa (kg)	Comprimento (cm)	Centro em $t = 0$
1	0,25	5,0	$x = -1{,}50$ m
2	0,50	6,0	$x = 0$

120 Na Fig. 9-83 um homem de 80 kg está em uma escada pendurada em um balão que possui uma massa total de 320 kg (incluindo o passageiro na cesta). O balão está inicialmente em repouso em relação ao solo. Se o homem na escada começa a subir a 2,5 m/s em relação à escada, (a) em que sentido e (b) com que velocidade escalar o balão se move? (c) Se o homem pára de subir, qual é a velocidade escalar do balão?


FIG. 9-83 Problema 120.

121 A partícula 1, com uma massa de 200 g e uma velocidade de 3,00 m/s, sofre uma colisão unidimensional com uma partícula 2, com uma massa de 400 g, inicialmente em repouso. Qual é o módulo do impulso sobre a partícula 1 se a colisão é (a) elástica e (b) perfeitamente inelástica?

122 Durante uma missão lunar é necessário aumentar a velocidade de uma espaçonave em 2,2 m/s quando ela está se movendo a 400 m/s em relação à Lua. A velocidade dos produtos de exaustão do motor do foguete é de 1000 m/s em relação à espaçonave. Que fração da massa inicial da espaçonave deve ser queimada e ejetada para obter o aumento de velocidade desejado?

123 Na Fig. 9-84 uma caixa de sapatos de corrida de 3,2 kg desliza sobre uma mesa horizontal sem atrito e colide com uma caixa de sapatilhas de balé de 2,0 kg inicialmente em repouso na extremidade da mesa, a uma altura h = 0,40 m do chão. A velocidade da caixa de 3,2 kg é 3,0 m/s imediatamente antes da colisão. Se as caixas grudam uma na outra por estarem fechadas com fita adesiva, qual é a energia cinética do conjunto imediatamente antes de atingir o chão?

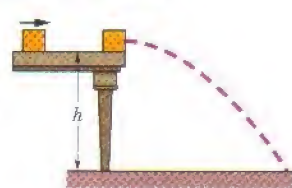


FIG. 9-84 Problema 123.

124 No arranjo das duas esferas do Exemplo 9-11, suponha que a esfera 1 tem uma massa de 50 g e uma altura inicial $h_1 = 9{,}0$ cm e que a esfera 2 tem uma massa de 85 g. Depois que a esfera 1 é liberada e colide elasticamente com a esfera 2, que altura é alcançada (a) pela esfera 1 e (b) pela esfera 2? Após a colisão (elástica) seguinte, que altura é alcançada (c) pela esfera 1 e (d) pela esfera 2? (*Sugestão:* Não use valores arredondados.)

125 Um bloco de 3000 kg cai verticalmente uma distância de 6,0 m e colide com uma estaca de 500 kg, enterrando-a 3,0 cm no solo. Supondo que a colisão bloco-estaca é perfeitamente inelástica, determine o módulo da força média que o solo exerce sobre a estaca durante a descida de 3,0 cm.

126 Na Fig. 9-65 o bloco 1 (com uma massa de 6,00 kg) está se movendo para a direita a 8,0 m/s e o bloco 2 (com uma massa de 4,0 kg) está se movendo para a direita a 2,0 m/s. A superfície não tem atrito e uma mola com uma constante elástica de 8000 N/m está presa ao bloco 2. Em um certo instante o bloco 1 alcança o bloco 2 e começa a comprimir a mola. No momento em que o bloco 1 está se movendo para a direita a 6,4 m/s, quais são (a) a velocidade do bloco 2 e (b) a energia potencial elástica da mola?

127 Um elétron (massa $m_1 = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg) e um próton (massa $m_2 = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg) se atraem eletricamente. Suponha que um elétron e um próton são liberados a partir do repouso a uma distância $d = 3{,}0 \times 10^{-6}$ m um do outro. Quando a distância entre eles diminui para $1{,}0 \times 10^{-6}$ m, qual é a razão entre (a) o módulo do momento linear do elétron e o módulo do momento linear do próton, (b) o módulo da velocidade do elétron e o módulo da velocidade do próton e (c) a energia cinética do elétron e a energia cinética do próton? (d) Quando a distância continua a diminuir, as respostas de (a) a (c) aumentam, diminuem ou continuam as mesmas?

128 Um vagão de trem pesando 280 kN e viajando a 1,52 m/s alcança outro pesando 210 kN e viajando a 0,914 m/s no mesmo sentido. Se os vagões permanecem juntos após a colisão, determine (a) a velocidade dos vagões após a colisão e (b) a perda de energia cinética durante a colisão. Se, em vez disso, o que é pouco provável, a colisão for elástica, determine a velocidade final (c) do vagão mais leve e (d) do vagão mais pesado.

129 Um objeto de 3,0 kg movendo-se a 8,0 m/s no sentido positivo de um eixo x sofre uma colisão elástica unidimensional com um objeto de massa M inicialmente em repouso. Após a colisão o objeto de massa M tem uma velocidade de 6,0 m/s no sentido positivo do eixo. Qual é a massa M?

130 Duas partículas P e Q são liberadas a partir do repouso a 1,0 m de distância uma da outra. A partícula P tem uma massa de

0,10 kg e a partícula Q tem uma massa de 0,30 kg. P e Q se atraem com uma força constante de $1{,}0 \times 10^{-2}$ N. Nenhuma força externa age sobre o sistema. (a) Qual é a velocidade do centro de massa de P e Q quando a distância entre as partículas é de 0,50 m? (b) A que distância da posição inicial de P as partículas colidem?

131 Na Fig. 9-85 o bloco 1, de massa m_1 = 6,6 kg, está em repouso sobre uma mesa sem atrito que está encostada em uma parede. O bloco 2, de massa m_2, está posicionado entre o bloco 1 e a parede e desliza para a esquerda em direção ao bloco 1 com velocidade constante v_{2i}. Determine o valor de m_2 para o qual os dois blocos se movem com a mesma velocidade após o bloco 2 colidir uma vez com o bloco 1 e uma vez com a parede. Suponha que as colisões são elásticas (a colisão com a parede não muda a velocidade escalar do bloco 2).

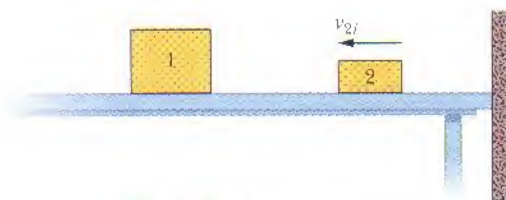


FIG. 9-85 Problema 131.

132 Um foguete de massa M se move ao longo de um eixo x com uma velocidade constante v_i = 40 m/s. Uma pequena explosão separa o foguete em uma seção traseira (de massa m_1) e uma seção dianteira; as duas seções se movem ao longo do eixo x. A velocidade relativa entre as seções é de 20 m/s. Determine (a) o menor valor possível da velocidade final v_f da seção dianteira e (b) para que valor-limite de m_1 ela acontece. Determine (c) o maior valor possível de v_f e (d) para que valor-limite de m_1 ele acontece.

133 Um pacote de 2,65 kg, inicialmente em repouso, explode em três partes que deslizam em um piso sem atrito. O pacote estava inicialmente na origem de um sistema de coordenadas. A parte 1 tem massa m_1 = 0,500 kg e velocidade $(10{,}0\hat{\mathrm{i}} + 12{,}0\hat{\mathrm{j}})$ m/s. A parte 2 tem massa m_2 = 0,750 kg, uma velocidade escalar de 14,0 m/s e sua trajetória faz um ângulo de 110° (no sentido anti-horário em relação ao semi-eixo x positivo). (a) Qual é a velocidade escalar da parte 3? (b) Em que direção ela se move?

134 A partícula 1, com uma massa de 3,00 kg e uma velocidade de $(5{,}0 \text{ m/s})\hat{\mathrm{i}}$, sofre uma colisão elástica unidimensional com uma partícula 2 de massa 2,0 kg e velocidade $(-6{,}0 \text{ m/s})\hat{\mathrm{i}}$. Após a colisão, qual é a velocidade (a) da partícula 1 e (b) da partícula 2?

135 Em um certo instante quatro partículas têm as coordenadas xy e velocidades mostradas na tabela a seguir. Nesse instante, quais são as coordenadas (a) x e (b) y do centro de massa das quatro partículas e (c) qual é a velocidade do centro de massa?

Partícula	Massa (kg)	Posição (m)	Velocidade (m/s)
1	2,0	0, 3,0	$-9{,}0\hat{\mathrm{j}}$
2	4,0	3,0, 0	$6{,}0\hat{\mathrm{i}}$
3	3,0	0, −2,0	$6{,}0\hat{\mathrm{j}}$
4	12	−1,0, 0	$-2{,}0\hat{\mathrm{i}}$

136 A Fig. 9-86 mostra dois trenós de 22,7 kg cada um, separados por uma curta distância, um atrás do outro. Um gato de 3,63 kg, inicialmente sobre um dos trenós, salta para o outro e imediatamente pula de volta para o primeiro. Os dois saltos são realizados com uma velocidade de 3,05 m/s em relação ao gelo. Determine a velocidade escalar, após os saltos, (a) do primeiro trenó e (b) do segundo trenó.



FIG. 9-86 Problema 136.

Rotação 10



David Wrobel/Visuals Unlimited

O camarão-de-estalo atordoa a presa (pequenos crustáceos) fechando uma garra desproporcionalmente grande para o seu tamanho, mas não chega a tocar a presa. Na verdade, a presa é atingida por uma forte onda sonora produzida pela parte móvel da garra ao se aproximar da parte fixa. Esse som (um estalo parecido com o de um milho de pipoca estourando) é tão alto que pode ser ouvido pelos mergulhadores e, no caso de muitos camarões, pode ser suficiente para impedir que um submarino seja detectado pelo sonar. A onda sonora também pode produzir clarões luminosos, um fenômeno conhecido como sonoluminescência. Alguns cientistas apelidaram a luz produzida por camarões de camaroluminescência.

Como o pequeno camarão-de-estalo produz com a garra um som tão forte que atordoa a presa?

A resposta está neste capítulo.



(a)



(b)

FIG. 10-1 A patinadora Sasha Cohen em movimento (*a*) de translação pura em uma direção fixa e (*b*) de rotação pura em torno de um eixo vertical. *(a: Mike Segar/Reuters/Landov LLC; b: Elsa/Getty Images, Inc.)*

10-1 O QUE É FÍSICA?

Como vimos em capítulos anteriores, um dos objetivos principais da física é estudar os movimentos. Até agora, porém, examinamos apenas os movimentos de **translação**, em que um objeto se move ao longo de uma linha reta ou curva, como na Fig. 10-1*a*. Vamos agora considerar os movimentos de **rotação**, em que um objeto gira em torno de um eixo, como na Fig. 10-1*b*.

Vemos rotações em quase todas as máquinas, usamos rotações toda vez que abrimos uma tampa de rosca e pagamos para experimentá-la quando vamos a um parque de diversões. A rotação é o segredo de muitas atividades divertidas, como acertar uma longa tacada no golfe (a bola precisa estar girando para se manter no ar durante mais tempo) ou arremessar uma bola de beisebol com efeito lateral (a bola precisa girar para que o ar a empurre para a esquerda ou para a direita). A rotação também é importante em questões mais sérias, como a fadiga das peças metálicas em aviões antigos.

Começamos nossa discussão da rotação definindo as variáveis do movimento, como o fizemos para a translação no Capítulo 2.

10-2 | As Variáveis da Rotação

Vamos examinar a rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo. Um **corpo rígido** é um corpo que pode girar com todas as partes ligadas rigidamente e sem mudar de forma. Um **eixo fixo** significa um eixo que não muda de posição. Assim, não examinaremos um objeto como o Sol, pois as partes do Sol (uma bola de gás) não estão ligadas rigidamente. Também não examinaremos um objeto como uma bola de boliche rolando em uma pista, já que a bola gira em torno de um eixo que muda constantemente de posição (o movimento da bola é uma mistura de rotação e translação).

A Fig. 10-2 mostra um corpo rígido de forma arbitrária girando em torno de um eixo fixo, chamado **eixo de rotação**. Em uma rotação pura (*movimento angular*), todos os pontos do corpo se movem ao longo de circunferências cujo centro está sobre o eixo de rotação, e todos os pontos descrevem um mesmo ângulo em um mesmo intervalo de tempo. Na translação pura (*movimento linear*), todos os pontos se movem ao longo de linhas retas, e todos os pontos sofrem o mesmo *deslocamento linear* em um mesmo intervalo de tempo.

Vamos discutir agora (um de cada vez) os equivalentes angulares das grandezas lineares posição, deslocamento, velocidade e aceleração.

Posição Angular

A Fig. 10-2 mostra uma *reta de referência*, fixa ao corpo, perpendicular ao eixo de rotação e girando com o corpo. A **posição angular** dessa reta é o ângulo que a reta faz com uma reta fixa, que tomamos como sendo a **posição angular zero**. Na Fig. 10-3 a posição angular θ é medida em relação ao semi-eixo x positivo. De acordo com a geometria, θ é dado por

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{(ângulo em radianos).} \qquad (10\text{-}1)$$

onde s é o comprimento de um arco de circunferência que vai do eixo x (a posição angular zero) até a reta de referência e r é o raio da circunferência.

Um ângulo definido dessa forma é medido em **radianos** (rad) e não em revoluções (rev) ou em graus. Como é a razão entre dois comprimentos, o radiano é um número puro e, portanto, não tem dimensão. Como o comprimento de uma circunferência de raio r é $2\pi r$, uma circunferência completa equivale a 2π radianos:

$$1 \text{ rev} = 360° = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}, \tag{10-2}$$

e portanto

$$1 \text{ rad} = 57{,}3° = 0{,}159 \text{ rev}. \tag{10-3}$$

Nós *não* reajustamos θ para zero a cada volta completa da reta de referência. Se a reta de referência completa duas revoluções a partir da posição angular zero, então a posição angular da reta é $\theta = 4\pi$ rad.

No caso de uma translação pura de uma partícula ao longo de um eixo x podemos conhecer tudo sobre o movimento da partícula se conhecermos $x(t)$, a posição da partícula em função do tempo. Analogamente, no caso da rotação pura de um corpo rígido podemos conhecer tudo a respeito do movimento da partícula se conhecermos $\theta(t)$, a posição angular da reta de referência do corpo em função do tempo.

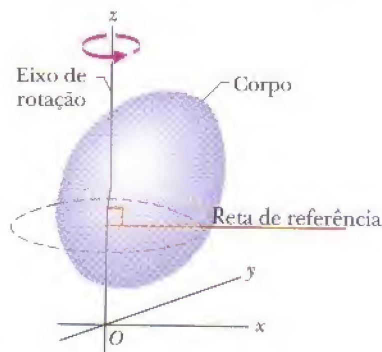


FIG. 10-2 Um corpo rígido de forma arbitrária em rotação pura em torno do eixo z de um sistema de coordenadas. A posição da *reta de referência* em relação ao corpo rígido é arbitrária, mas ela é perpendicular ao eixo de rotação e mantém sua posição em relação ao corpo, girando com ele.

Deslocamento Angular

Se o corpo da Fig. 10-3 gira em torno do eixo de rotação como na Fig. 10-4, com a posição angular da reta de referência variando de θ_1 para θ_2, o corpo sofre um **deslocamento angular** $\Delta\theta$ dado por

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \tag{10-4}$$

Esta definição do deslocamento angular vale não só para o corpo rígido como um todo, mas também para *todas as partículas do corpo.*

Se um corpo está em movimento de translação ao longo de um eixo x, o deslocamento Δx pode ser positivo ou negativo, dependendo de o movimento ocorrer no sentido positivo ou negativo do eixo. Da mesma forma, o deslocamento angular $\Delta\theta$ de um corpo em rotação pode ser positivo ou negativo, de acordo com a seguinte regra:

Um deslocamento angular no sentido anti-horário é positivo e um deslocamento angular no sentido horário é negativo.

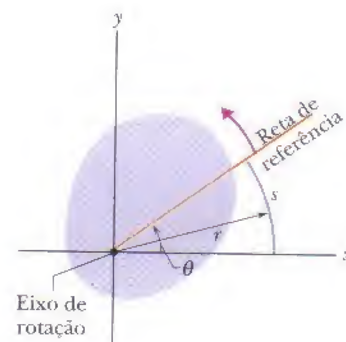


FIG. 10-3 Seção transversal do corpo rígido em rotação da Fig. 10-2, visto de cima. O plano da seção transversal é perpendicular ao eixo de rotação, que agora está perpendicular ao plano do papel, saindo do papel. Nesta posição do corpo, a reta de referência faz um ângulo θ com o eixo x.

A frase "*relógios são negativos*" pode ajudá-lo a memorizar esta regra (eles certamente são negativos quando tocam de manhã cedo).

TESTE 1 Um disco pode girar em torno de um eixo central como se fosse um carrossel. Quais dos seguintes pares de valores para as posições inicial e final, respectivamente, correspondem a um deslocamento angular negativo: (a) −3 rad, +5 rad, (b) −3 rad, −7 rad, (c) 7 rad, −3 rad?

Velocidade Angular

Suponha que um corpo em rotação está em uma posição angular θ_1 no instante t_1 e na posição angular θ_2 no instante t_2, como na Fig. 10-4. Definimos a **velocidade angular média** do corpo no intervalo de tempo Δt de t_1 a t_2 como

$$\omega_{\text{méd}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \tag{10-5}$$

onde $\Delta\theta$ é o deslocamento angular que acontece durante o intervalo de tempo Δt (ω é a letra grega ômega minúsculo).

A **velocidade angular (instantânea)** ω, na qual estaremos mais interessados, é o limite da razão da Eq. 10-5 quando Δt tende a zero:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \tag{10-6}$$

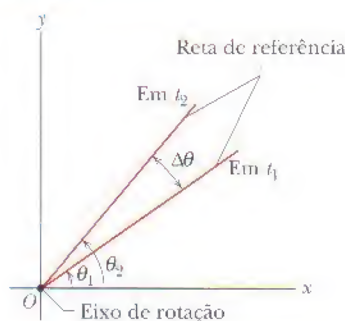


FIG. 10-4 *A reta de referência do* corpo rígido das Figs. 10-2 e 10-3 está na posição angular θ_1 no instante t_1 e na posição angular θ_2 no instante t_2. A grandeza $\Delta\theta\ (= \theta_2 - \theta_1)$ é o deslocamento angular que ocorre no intervalo $\Delta t\ (= t_2 - t_1)$. O corpo propriamente dito não aparece na figura.

Se conhecemos $\theta(t)$, podemos calcular a velocidade angular ω por derivação.

As Eqs. 10-5 e 10-6 valem não só para o corpo rígido como um todo, mas também para *todas as suas partículas*, uma vez que as distâncias relativas são mantidas fixas. As unidades de velocidade angular mais usadas são o radiano por segundo (rad/s) e a revolução por segundo (rev/s). Outra medida de velocidade angular foi usada durante muitos anos pela indústria fonográfica: a música era reproduzida em discos de vinil que giravam a "33 1/3 rpm" ou "45 rpm", o que significava 33 1/3 rev/min ou 45 rev/min.

Se uma partícula se move em translação ao longo de um eixo x, sua velocidade linear v pode ser positiva ou negativa, dependendo de a partícula estar se deslocando no sentido positivo ou negativo do eixo. Analogamente, a velocidade angular ω de um corpo rígido em rotação pode ser positiva ou negativa, dependendo de o corpo estar girando no sentido anti-horário (positivo) ou horário (negativo). ("Relógios são negativos" também funciona aqui.) O módulo da velocidade angular é chamado de **velocidade angular escalar**, e também é representado por ω.

Aceleração Angular

Se a velocidade angular de um corpo em rotação não é constante, o corpo possui uma aceleração angular. Sejam ω_2 e ω_1 as velocidades angulares nos instantes t_2 e t_1, respectivamente. A **aceleração angular média** do corpo em rotação no intervalo de t_1 até t_2 é definida através da equação

$$\alpha_{\text{méd}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \qquad (10\text{-}7)$$

onde $\Delta\omega$ é a variação da velocidade angular no intervalo Δt. A **aceleração angular (instantânea)** α, na qual estaremos mais interessados, é o limite dessa grandeza quando Δt tende a zero:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (10\text{-}8)$$

As Eqs. 10-7 e 10-8 também são válidas para *todas as partículas do corpo*. As unidades de aceleração mais usadas são o radiano por segundo ao quadrado (rad/s^2) e a revolução por segundo ao quadrado (rev/s^2).

Exemplo 10-1 Aumente sua capacidade

O disco da Fig. 10-5*a* está girando em torno do seu eixo central como um carrossel. A posição angular $\theta(t)$ de uma reta de referência do disco é dada por

$$\theta = -1{,}00 - 0{,}600t + 0{,}250t^2, \qquad (10\text{-}9)$$

com t em segundos, θ em radianos e a posição angular zero indicada na figura.

(a) Plote a posição angular do disco em função do tempo, de $t = -3{,}0$ s a $t = 5{,}4$ s. Desenhe o disco e sua reta de referência em $t = -2{,}0$ s, 0 s, 4,0 s e os instantes em que o gráfico cruza o eixo t.

IDÉIA-CHAVE A posição angular do disco é a posição angular $\theta(t)$ da reta de referência, que é dada pela Eq. 10-9 como uma função do tempo t. Assim, devemos plotar a Eq. 10-9; o resultado aparece na Fig. 10-5*b*.

Cálculos: Para desenhar o disco e sua reta de referência em um certo instante precisamos determinar o valor de θ nesse instante. Para isso substituímos t por seu valor na Eq. 10-9. Para $t = -2{,}0$ s, obtemos

$$\theta = -1{,}00 - (0{,}600)(-2{,}0) + (0{,}250)(-2{,}0)^2$$

$$= 1{,}2 \text{ rad} = 1{,}2 \text{ rad}\,\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = 69°.$$

Isso significa que em $t = -2{,}0$ s a reta de referência está deslocada de 1,2 rad = 69° no sentido anti-horário (porque θ é positivo) em relação à posição zero. O desenho 1 da Fig. 10-5*b* mostra essa posição da reta de referência.

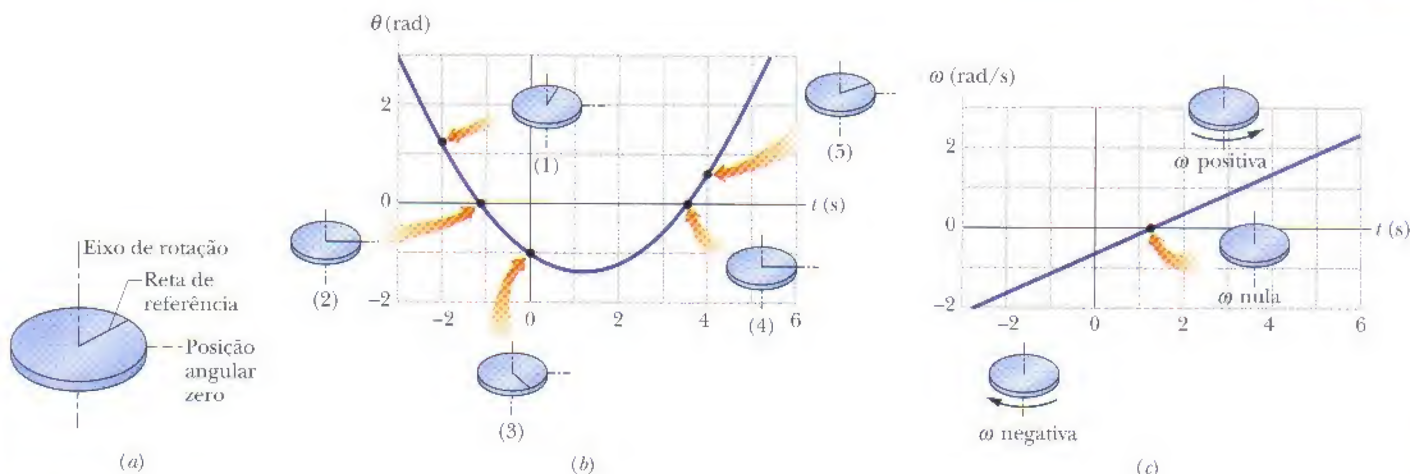


FIG. 10-5 (*a*) Um disco em rotação. (*b*) Gráfico da posição angular do disco em função do tempo, $\theta(t)$. Cinco desenhos indicam a posição angular da reta de referência do disco para cinco pontos da curva. (*c*) Gráfico da velocidade angular em função do tempo, $\omega(t)$. Valores positivos de ω correspondem a rotações no sentido anti-horário; valores negativos, a rotações no sentido horário.

Da mesma forma, para $t = 0$ encontramos $\theta = -1{,}00$ rad $= -57°$, o que significa que a reta de referência está deslocada de 1,0 rad = 57° no sentido horário em relação à posição angular zero, como mostra o desenho 3. Para $t = 4{,}0$ s encontramos $\theta = 0{,}60$ rad $= 34°$ (desenho 5). Fazer desenhos para os instantes em que a curva cruza o eixo t é fácil, pois nesse caso $\theta = 0$ e a reta de referência está momentaneamente alinhada com a posição angular zero (desenhos 2 e 4).

(b) Em que instante $t_{\text{mín}}$ o ângulo $\theta(t)$ passa pelo valor mínimo mostrado na Fig. 10-5*b*? Qual é esse valor mínimo?

IDÉIA-CHAVE Para determinar o valor extremo (o mínimo, em nosso caso) de uma função, calculamos a derivada primeira da função e igualamos o resultado a zero.

Cálculos: A derivada primeira de $\theta(t)$ é

$$\frac{d\theta}{dt} = -0{,}600 + 0{,}500t. \qquad (10\text{-}10)$$

Igualando esse resultado a zero e explicitando t, determinamos o instante em que $\theta(t)$ é mínimo:

$$t_{\text{mín}} = 1{,}20 \text{ s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Para obter o valor mínimo de θ, substituímos $t_{\text{mín}}$ na Eq. 10-9, o que nos dá

$$\theta = -1{,}36 \text{ rad} \approx -77{,}9°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este *mínimo* de $\theta(t)$ (o ponto mais baixo da curva da Fig. 10-5*b*) corresponde à *máxima rotação no sentido horário* do disco a partir da posição angular zero, uma rotação um pouco maior que a representada no desenho 3.

(c) Plote a velocidade angular ω do disco em função do tempo de $t = -3{,}0$ s a $t = 6{,}0$ s. Desenhe o disco e indique o sentido de rotação e o sinal de ω em $t = -2{,}0$ s, 4,0 s e $t_{\text{mín}}$.

IDÉIA-CHAVE De acordo com a Eq. 10-6, a velocidade angular ω é igual a $d\theta/dt$, dada pela Eq. 10-10. Temos, portanto,

$$\omega = -0{,}600 + 0{,}500t. \qquad (10\text{-}11)$$

O gráfico da função $\omega(t)$ aparece na Fig. 10-5*c*.

Cálculos: Para desenhar o disco em $t = -2{,}0$ s substituímos este valor de t na Eq. 10-11, obtendo

$$\omega = -1{,}6 \text{ rad/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

O sinal negativo mostra que em $t = -2{,}0$ s o disco está girando no sentido horário (desenho mais baixo da Fig. 10-5*c*).

Fazendo $t = 4{,}0$ s na Eq. 10-11, obtemos

$$\omega = 1{,}4 \text{ rad/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

O sinal positivo implícito mostra que em $t = 4{,}0$ s o disco está girando no sentido anti-horário (desenho mais alto da Fig. 10-5*c*).

Já sabemos que $d\theta/dt = 0$ para $t = t_{\text{mín}}$. Isso significa que neste ponto $\omega = 0$, ou seja, o disco pára momentaneamente quando a reta de referência atinge o valor mínimo de θ na Fig. 10-5*b*, como sugere o desenho central na Fig. 10-5*c*.

(d) Use os resultados anteriores para descrever o movimento do disco de $t = -3{,}0$ s a $t = 6{,}0$ s.

Descrição: Quando observamos o disco pela primeira vez, em $t = -3{,}0$ s, ele tem uma posição angular positiva e está girando no sentido horário, mas com velocidade cada vez menor. O disco pára momentaneamente na posição angular $\theta = -1{,}36$ rad e depois começa a girar no sentido anti-horário, com a posição angular mais tarde se tornando novamente positiva.

Exemplo 10-2

Um pião gira com aceleração angular

$$\alpha = 5t^3 - 4t,$$

onde t está em segundos e α em radianos por segundo ao quadrado. Em $t = 0$ a velocidade angular do pião é 5 rad/s e uma reta de referência traçada no pião está na posição angular $\theta = 2$ rad.

(a) Obtenha uma expressão para a velocidade angular do pião, $\omega(t)$.

IDÉIA-CHAVE Por definição, $\alpha(t)$ é a derivada de $\omega(t)$ em relação ao tempo. Assim, podemos obter $\omega(t)$ integrando $\alpha(t)$ em relação ao tempo.

Cálculos: De acordo com a Eq. 10-8,

$$d\omega = \alpha\, dt,$$

e portanto $$\int d\omega = \int \alpha\, dt.$$

Assim, temos:

$$\omega = \int (5t^3 - 4t)\, dt = \tfrac{5}{4}t^4 - \tfrac{4}{2}t^2 + C.$$

Para calcular o valor da constante de integração C observamos que $\omega = 5$ rad/s em $t = 0$. Substituindo esses valores na expressão de ω, obtemos:

$$5 \text{ rad/s} = 0 - 0 + C,$$

E, portanto, $C = 5$ rad/s. Nesse caso,

$$\omega = \tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Obtenha uma expressão para a posição angular do pião, $\theta(t)$.

IDÉIA-CHAVE Por definição, $\omega(t)$ é a derivada de $\theta(t)$ em relação ao tempo. Assim, podemos obter $\theta(t)$ integrando $\omega(t)$ em relação ao tempo.

Cálculos: Como, de acordo com a Eq. 10-6,

$$d\theta = \omega\, dt,$$

podemos escrever

$$\theta = \int \omega\, dt = \int (\tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5)\, dt$$

$$= \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + C'$$

$$= \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + 2, \qquad \text{(Resposta)}$$

onde C' foi calculado para que $\theta = 2$ rad em $t = 0$.

10-3 | As Grandezas Angulares São Vetores?

Posição, velocidade e aceleração de uma partícula são normalmente expressas através de vetores. Quando uma partícula se move em linha reta, porém, não é necessário usar a notação vetorial. Nessas condições a partícula pode se mover apenas em dois sentidos, que podemos indicar usando os sinais positivo e negativo.

Da mesma forma, um corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo só pode girar nos sentidos horário e anti-horário, e podemos indicar esses sentidos usando os sinais positivo e negativo. A questão que se levanta é a seguinte: "No caso mais geral, podemos expressar o deslocamento, a velocidade e a aceleração angular de um corpo rígido em rotação através de vetores?" A resposta é um "sim" cauteloso (veja a ressalva a seguir, em relação aos deslocamentos angulares).

Considere a velocidade angular. A Fig. 10-6*a* mostra um disco de vinil girando em um toca-discos. O disco tem uma velocidade angular escalar constante ω (= 33 1/3 rev/

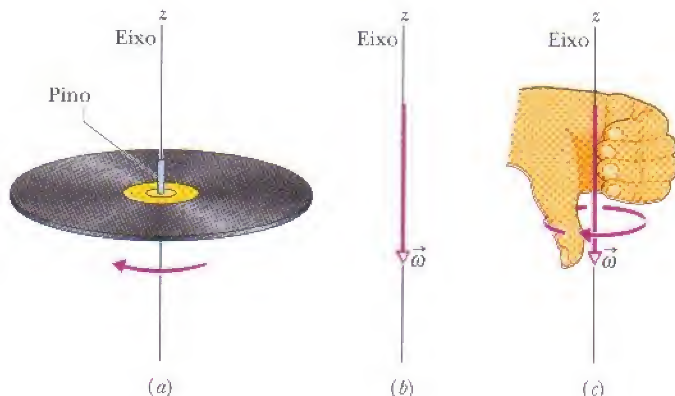


FIG. 10-6 (*a*) Um disco em rotação em torno de um eixo vertical que passa pelo centro do disco. (*b*) A velocidade angular do disco pode ser representada pelo vetor $\vec{\omega}$ que coincide com o eixo de rotação e aponta para baixo, como mostra a figura. (*c*) Estabelecemos o sentido do vetor velocidade angular como sendo para baixo pela regra da mão direita. Quando os dedos da mão direita envolvem e apontam no sentido do movimento, o polegar estendido mostra o sentido de $\vec{\omega}$.

min) no sentido horário. Podemos representar a velocidade angular do disco como um vetor $\vec{\omega}$ apontando ao longo do eixo de rotação, como na Fig. 10-6*b*. A regra é a seguinte: escolhemos o comprimento do vetor de acordo com uma escala conveniente, como, por exemplo, 1 cm para cada 10 rev/min. Em seguida, determinamos o sentido do vetor $\vec{\omega}$ usando a **regra da mão direita**, como mostra a Fig. 10-6*c*. Envolva o disco com a mão direita, com os dedos apontando *no sentido de rotação*; o polegar estendido mostra o sentido do vetor velocidade angular. Se o disco estivesse girando no sentido oposto, a regra da mão direita indicaria o sentido oposto para o vetor velocidade angular.

A representação de grandezas angulares por vetores não é tão fácil de compreender como a representação de grandezas lineares. Instintivamente, esperamos que algo se mova *na direção* do vetor. Não é o que acontece. Em vez disso, temos algo (o corpo rígido) que gira *em torno* da direção do vetor. No mundo das rotações puras, um vetor define um eixo de rotação, não uma direção de movimento. Entretanto, o vetor define também o movimento. Além disso, obedece a todas as regras de manipulação de vetores que foram discutidas no Capítulo 3. A aceleração angular $\vec{\alpha}$ é outro vetor que obedece às mesmas regras.

Neste capítulo consideramos apenas rotações em torno de um eixo fixo. Nesse caso, não precisamos trabalhar com vetores; podemos representar a velocidade angular através de um escalar ω, a aceleração angular através de um escalar α e usar o sinal positivo para indicar o sentido anti-horário e o sinal negativo para indicar o sentido horário.

Vamos agora à ressalva: Os *deslocamentos* angulares (a menos que sejam muito pequenos) *não podem* ser tratados como vetores. Por que não? Podemos certamente atribuir a eles um módulo e uma orientação, como fizemos para a velocidade angular na Fig. 10-6. Entretanto, para ser representada como um vetor uma grandeza também *precisa* obedecer às regras da soma vetorial, uma das quais diz que quando somamos dois vetores a ordem na qual os vetores são somados é irrelevante. O deslocamento angular não passa neste teste.

A Fig. 10-7 mostra um exemplo. Um livro inicialmente na horizontal sofre duas rotações de 90°, primeiro na ordem da Fig. 10-7*a* e depois na ordem da Fig. 10-7*b*. Embora os dois deslocamentos angulares sejam iguais nos dois casos, a ordem é diferente e o livro termina com orientações diferentes. Eis outro exemplo: deixe o braço direito pender ao longo do corpo, com a palma da mão voltada para dentro. Sem girar o pulso, (1) levante o braço para a frente até que fique na horizontal, (2) mova o braço horizontalmente até que aponte para a direita e (3) deixe-o pender ao longo do corpo. A palma da mão ficará voltada para a frente. Se você repetir a manobra, mas inverter a ordem dos movimentos, qual será a orientação final da palma da mão? Esses exemplos mostram que a soma de dois deslocamentos angulares depende da ordem desses deslocamentos e, portanto, eles não podem ser vetores.

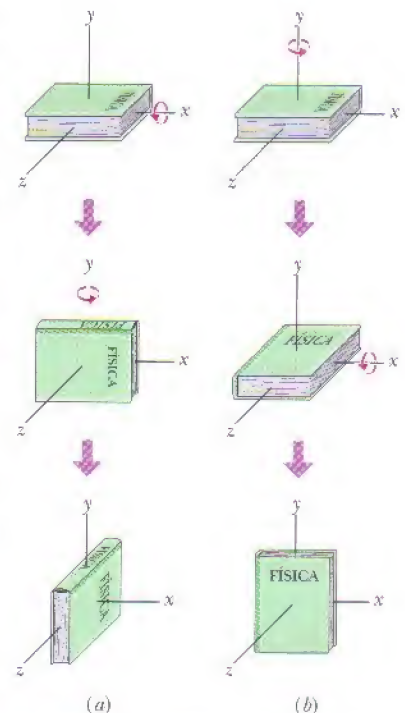


FIG. 10-7 (*a*) A partir da posição inicial, no alto, o livro sofre duas rotações sucessivas de 90°, primeiro em torno do eixo *x* (horizontal) e depois em torno do eixo *y* (vertical). (*b*) O livro sofre as mesmas rotações, mas na ordem inversa.

10-4 | Rotação com Aceleração Angular Constante

Nas translações puras, os movimentos com *aceleração linear constante* (como, por exemplo, o movimento de um corpo em queda livre) constituem um caso especial importante. Na Tabela 2-1 apresentamos uma série de equações que são válidas apenas para esse tipo de movimento.

Nas rotações puras, o caso da *aceleração angular constante* também é importante, e pode ser descrito usando um conjunto análogo de equações. Não vamos demonstrá-las, mas nos limitaremos a escrevê-las a partir das equações lineares correspondentes, substituindo as grandezas lineares pelas grandezas angulares equivalentes. O resultado aparece na Tabela 10-1, que mostra os dois conjuntos de equações (Eqs. 2-11 e 2-15 a 2-18; 10-12 a 10-16).

Como vimos, as Eqs. 2-11 e 2-15 são as equações básicas para o caso da aceleração linear constante; as outras equações da lista "Translações" podem ser deduzidas a partir delas. Da mesma forma, as Eqs. 10-12 e 10-13 são as equações básicas para o caso da aceleração angular constante, e as outras equações da lista "Rotações" podem ser deduzidas a partir delas. Para resolver um problema simples envolvendo aceleração

TABELA 10-1

Equações de Movimento para Aceleração Linear Constante e Aceleração Angular Constante

Número da Equação	Equação Linear	Variável Ausente		Equação Angular	Número da Equação
(2-11)	$v = v_0 + at$	$x - x_0$	$\theta - \theta_0$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	(10-12)
(2-15)	$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v	ω	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(10-13)
(2-16)	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t	t	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$	(10-14)
(2-17)	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a	α	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$	(10-15)
(2-18)	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0	ω_0	$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$	(10-16)

angular constante, normalmente é possível usar uma das equações da lista "Rotações". Escolha uma equação para a qual a única incógnita seja a variável pedida no problema. Um plano melhor é lembrar-se apenas das Eqs. 10-12 e 10-13 e resolvê-las como um sistema de equações sempre que necessário. Este método é ilustrado no Exemplo 10-4.



TESTE 2 Em quatro situações um corpo em rotação tem sua posição angular $\theta(t)$ dada por (a) $\theta = 3t - 4$, (b) $\theta = -5t^3 + 4t^2 + 6$, (c) $\theta = 2/t^2 - 4/t$ e (d) $\theta = 5t^2 - 3$. A quais dessas situações as equações angulares da Tabela 10-1 se aplicam?

Exemplo 10-3

Uma pedra de amolar (Fig. 10-8) gira com aceleração angular constante $\alpha = 0{,}35$ rad/s^2. No instante $t = 0$ ela tem uma velocidade angular $\omega_0 = -4{,}6$ rad/s e uma reta de referência traçada na roda está na horizontal, na posição angular $\theta_0 = 0$.

(a) Em que instante após $t = 0$ a reta de referência está na posição angular $\theta = 5{,}0$ rev?

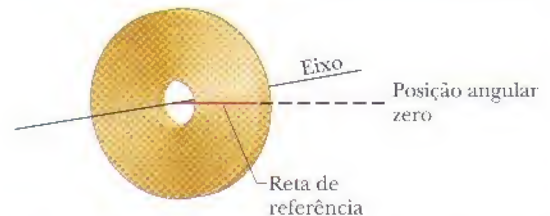


FIG. 10-8 Uma pedra de amolar. Em $t = 0$ a reta de referência (que imaginamos marcada na pedra) está na horizontal.

IDÉIA-CHAVE Como a aceleração angular é constante, podemos usar as equações para rotações da Tabela 10-1. Escolhemos a Eq. 10-13,

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2,$$

porque a única variável desconhecida é o tempo t.

Cálculos: Substituindo valores conhecidos e fazendo $\theta_0 = 0$ e $\theta = 5{,}0$ rev $= 10\pi$ rad, obtemos

$$10\pi \text{ rad} = (-4{,}6 \text{ rad/s})t + \tfrac{1}{2}(0{,}35 \text{ rad/s}^2)t^2.$$

(Convertemos 5,0 rev para 10π para manter a coerência entre as unidades). Resolvendo esta equação do segundo grau em t, obtemos

$$t = 32 \text{ s.} \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Descreva a rotação da pedra de amolar entre $t = 0$ e $t = 32$ s.

Descrição: A pedra está inicialmente girando no sentido negativo (sentido dos ponteiros do relógio) com velocidade angular $\omega_0 = -4{,}6$ rad, mas a aceleração angular α é positiva (no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio). Esta oposição inicial entre os sinais da velocidade angular inicial e da aceleração angular significa que a roda gira cada vez mais devagar no sentido negativo, pára momentaneamente e, em seguida, passa a girar no sentido positivo. Depois que a reta de referência passa de volta pela posição inicial $\theta = 0$, a pedra de amolar dá mais 5 voltas completas até o instante $t = 32$ s.

(c) Em que instante t a pedra de amolar pára momentaneamente?

Cálculo: Vamos consultar de novo a tabela de equações para aceleração angular constante. Mais uma vez, precisamos de uma equação que contenha apenas a incógnita t. Agora, porém, a equação deve contar também a variável ω, para que possamos igualá-la a 0 e calcular o valor correspondente de t. Assim, escolhemos a Eq. 10-12, que nos dá

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - (-4{,}6 \text{ rad/s})}{0{,}35 \text{ rad/s}^2} = 13 \text{ s.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Exemplo 10-4

Você está operando um Rotor (o brinquedo de um parque de diversões com um cilindro giratório que foi discutido no Exemplo 6-8), percebe que um ocupante está ficando tonto e reduz a velocidade angular do cilindro de 3,40 rad/s para 2,00 rad/s em 20,0 rev, com aceleração angular constante.

(a) Qual é a aceleração angular constante durante essa redução da velocidade angular?

IDÉIA-CHAVE Como a aceleração angular do cilindro é constante, podemos relacioná-la à velocidade angular e ao deslocamento angular através das equações básicas da aceleração angular constante (Eqs. 10-12 e 10-13).

Cálculos: A velocidade angular inicial é ω_0 = 3,40 rad/s, o deslocamento angular é $\theta - \theta_0$ = 20,0 rev e a velocidade angular no final do deslocamento é ω = 2,00 rad/s. Entretanto, não conhecemos a aceleração angular α e o tempo t, que aparecem nas duas equações básicas.

Para eliminar a variável t, usamos a Eq. 10-12 para escrever

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha},$$

que substituímos na Eq. 10-13 para escrever

$$\theta - \theta_0 = \omega_0\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right) + \tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2.$$

Explicitando α, substituindo os valores conhecidos e convertendo 20 rev para 125,7 rad, obtemos

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2(\theta - \theta_0)} = \frac{(2{,}00\ \text{rad/s})^2 - (3{,}40\ \text{rad/s})^2}{2(125{,}7\ \text{rad})}$$

$$= -0{,}0301\ \text{rad/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Em quanto tempo ocorre a redução de velocidade?

Cálculo: Agora que conhecemos α, podemos usar a Eq. 10-12 para obter t:

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{2{,}00\ \text{rad/s} - 3{,}40\ \text{rad/s}}{-0{,}0301\ \text{rad/s}^2}$$

$$= 46{,}5\ \text{s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

10-5 | Relacionando as Variáveis Lineares e Angulares

Na Seção 4-7 discutimos o movimento circular uniforme, no qual uma partícula se move com velocidade linear escalar v constante ao longo de uma circunferência. Quando um corpo rígido, como um carrossel, gira em torno de um eixo, cada partícula descreve uma circunferência em torno do eixo. Como o corpo é rígido, todas as partículas completam uma revolução no mesmo intervalo de tempo, ou seja, todas têm a mesma velocidade angular ω.

Por outro lado, quanto mais afastada do eixo está a partícula maior é a circunferência que ela percorre e, portanto, maior é sua velocidade linear escalar v. Você pode perceber isso em um carrossel. Você gira com a mesma velocidade angular ω independentemente da distância a que se encontra do centro, mas sua velocidade linear escalar v aumenta nitidamente quando você se afasta do cento do carrossel.

Freqüentemente precisamos relacionar as variáveis lineares s, v e a de um ponto particular de um corpo em rotação às variáveis angulares θ, ω e α do corpo. Os dois conjuntos de variáveis estão relacionados através de r, a *distância perpendicular* do ponto ao eixo de rotação. Essa distância perpendicular é a distância entre o ponto e o eixo de rotação, medida sobre uma perpendicular ao eixo. É também o raio r da circunferência descrita pelo ponto em torno do eixo de rotação.

A Posição

Se uma reta de referência em um corpo rígido gira de um ângulo θ, um ponto no interior do corpo, a uma distância r do eixo de rotação, descreve um arco de circunferência de comprimento s, onde s é dado pela Eq. 10-1:

$$s = \theta r \qquad \text{(ângulo em radianos).} \qquad (10\text{-}17)$$

Esta é a primeira de nossas relações entre grandezas lineares e angulares. *Atenção:* O ângulo θ deve ser medido em radianos, já que a Eq. 10-17 é usada justamente para definir o ângulo em radianos.

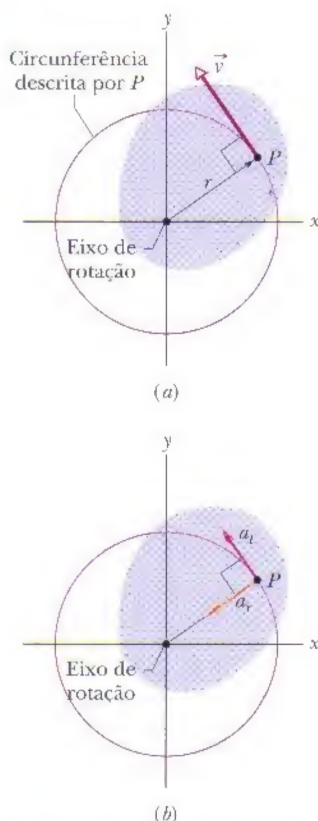


FIG. 10-9 Seção transversal do corpo rígido em rotação da Fig. 10-2, visto de cima. Cada ponto do corpo (como P) descreve em uma circunferência em torno do eixo de rotação. (a) A velocidade linear $\vec{v}$ de cada ponto é tangente à circunferência na qual o ponto se move. (b) A aceleração linear $\vec{a}$ do ponto possui (em geral) duas componentes: a aceleração tangencial a_t e a aceleração radial a_r.

A Velocidade

Derivando a Eq. 10-17 em relação ao tempo, com r constante, temos:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r.$$

Acontece que ds/dt é a velocidade linear escalar (o módulo da velocidade linear) do ponto considerado, e $d\theta/dt$ é a velocidade angular ω do corpo em rotação. Assim,

$$v = \omega r \qquad \text{(ângulo em radianos).} \qquad (10\text{-}18)$$

Atenção: A velocidade angular ω deve ser expressa em radianos por unidade de tempo.

De acordo com a Eq. 10-18, como todos os pontos do corpo rígido têm a mesma velocidade angular ω, os pontos com valores maiores de r (ou seja, mais distantes do eixo de rotação) têm uma velocidade linear escalar v maior. A Fig. 10-9a serve para nos lembrar que a velocidade linear é sempre tangente à trajetória circular do ponto considerado.

Se a velocidade angular ω do corpo rígido é constante, a Eq. 10-18 nos diz que a velocidade linear v de qualquer ponto do corpo também é constante. Assim, todos os pontos do corpo estão em movimento circular uniforme. O período de revolução T do movimento de cada ponto e do corpo rígido como um todo é dado pela Eq. 4-35:

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \qquad (10\text{-}19)$$

Esta equação nos diz que o tempo de uma revolução é igual à distância $2\pi r$ percorrida em uma revolução dividida pela velocidade escalar com a qual a distância é percorrida. Usando a Eq. 10-18 para v e cancelando r, obtemos também a relação

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(ângulo em radianos).} \qquad (10\text{-}20)$$

Esta equação equivalente nos diz que o tempo de uma revolução é igual ao ângulo 2π rad percorrido em uma revolução dividido pela velocidade angular escalar com a qual o ângulo é percorrido.

A Aceleração

Derivando a Eq. 10-18 em relação ao tempo, novamente com r constante, temos:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r. \qquad (10\text{-}21)$$

Neste ponto, esbarramos em uma complicação. Na Eq. 10-21 dv/dt representa apenas a parte da aceleração linear responsável por variações do *módulo* v da velocidade linear $\vec{v}$. Assim como $\vec{v}$, esta parte da aceleração linear é tangente à trajetória do ponto considerado. Ela é chamada de *componente tangencial* a_t da aceleração linear do ponto e é dada por

$$a_t = \alpha r \qquad \text{(ângulo em radianos),} \qquad (10\text{-}22)$$

onde $\alpha = d\omega/dt$. *Atenção:* A aceleração angular α da Eq. 10-22 deve ser expressa em radianos por unidade de tempo ao quadrado.

Além disso, de acordo com a Eq. 4-34, uma partícula (ou ponto) que se move em uma trajetória circular tem uma *componente radial* da aceleração linear, $a_r = v^2/r$ (dirigida radialmente para dentro), que é responsável por variações da *direção* da velocidade linear $\vec{v}$. Substituindo o valor de v dado pela Eq. 10-18, podemos escrever esta componente como

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad \text{(ângulo em radianos).} \qquad (10\text{-}23)$$

Assim, como mostra a Fig. 10-9*b*, a aceleração linear de um ponto em um corpo rígido em rotação possui, em geral, duas componentes. A componente radial para dentro a_r (dada pela Eq. 10-23) está presente sempre que a velocidade angular do corpo é diferente de zero. A componente tangencial a_t (dada pela Eq. 10-22) está presente sempre que a aceleração angular é diferente de zero.

TESTE 3 Uma barata está na borda de um carrossel em movimento. Se a velocidade angular desse sistema (*carrossel + barata*) é constante, a barata possui (a) aceleração radial e (b) aceleração tangencial? Se ω está diminuindo, a barata possui (c) aceleração radial e (d) aceleração tangencial?

Exemplo 10-5

Apesar do extremo cuidado que os engenheiros tomam ao projetar uma montanha-russa, uns poucos infelizes entre os milhões de pessoas que todo ano andam de montanha-russa são acometidos de um mal conhecido como *dor de cabeça de montanha-russa*. Entre os sintomas, que podem levar vários dias para aparecer, estão vertigens e dores de cabeça, ambas suficientemente severas para exigir tratamento médico.

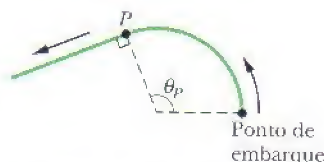


FIG. 10-10 Vista superior de um trecho horizontal da pista de uma montanha-russa. A pista começa como um arco de circunferência no ponto de embarque e depois, no ponto P, continua ao longo de uma tangente ao arco.

Vamos investigar a causa provável projetando uma *montanha-russa de indução* (que pode ser acelerada por forças magnéticas mesmo em um trilho horizontal). Para provocar uma emoção inicial, queremos que cada passageiro deixe o ponto de embarque com uma aceleração g ao longo da pista horizontal. Para aumentar a emoção, queremos também que a primeira parte dos trilhos forme um arco de circunferência (Fig. 10-10), de modo que o passageiro também experimente uma aceleração centrípeta. Quando o passageiro acelera ao longo do arco, o módulo dessa aceleração centrípeta aumenta de forma assustadora. Quando o módulo a da aceleração resultante atinge $4g$ em algum ponto P de ângulo θ_P ao longo do arco, queremos que o passageiro se mova, em uma linha reta, ao longo de uma tangente ao arco.

(a) Que ângulo θ_P o arco deve subtender para que a seja $4g$ no ponto P?

IDÉIAS-CHAVE (1) Em qualquer instante a aceleração resultante $\vec{a}$ do passageiro é a soma vetorial da aceleração tangencial $\vec{a}_t$ ao longo dos trilhos com a aceleração radial $\vec{a}_r$ na direção do centro de curvatura (como na Fig. 10-9*b*). (2) O valor de a_r em qualquer instante depende da velocidade angular instantânea ω, de acordo com a Eq. 10-23 ($a_r = \omega^2 r$, onde r é o raio do arco de circunferência). (3) A aceleração angular α ao longo do arco está relacionada à aceleração tangencial a_t ao longo dos trilhos através da Eq. 10-22 ($a_t = \alpha r$). (4) Como a_t e r são constantes, α também é constante e, portanto, podemos usar as equações para aceleração constante.

Cálculos: Como estamos tentando determinar um valor da posição angular θ, vamos escolher, entre as equações para aceleração constante, a Eq. 10-14:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0). \qquad (10\text{-}24)$$

Para obter a aceleração angular α, usamos a Eq. 10-22:

$$\alpha = \frac{a_t}{r}. \qquad (10\text{-}25)$$

Fazendo $\omega_0 = 0$ e $\theta_0 = 0$, obtemos:

$$\omega^2 = \frac{2a_t\theta}{r}. \qquad (10\text{-}26)$$

Substituindo este resultado na equação

$$a_r = \omega^2 r \qquad (10\text{-}27)$$

obtemos uma relação entre a aceleração radial, a aceleração tangencial e a posição angular θ:

$$a_r = 2a_t\theta. \qquad (10\text{-}28)$$

Como $\vec{a}_t$ e $\vec{a}_r$ são vetores perpendiculares, o módulo da soma dos dois vetores é dado por

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}. \qquad (10\text{-}29)$$

Substituindo a_r por seu valor, dado pela Eq. 10-28, e explicitando θ, temos:

$$\theta = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{a_t^2} - 1}. \qquad (10\text{-}30)$$

Quando a atinge o valor desejado, $4g$, o ângulo θ é o ângulo θ_P cujo valor queremos calcular. Fazendo $a = 4g$, $\theta = \theta_P$ e $a_t = g$ na Eq. 10-30, obtemos

$$\theta_P = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(4g)^2}{g^2} - 1} = 1{,}94 \text{ rad} = 111°. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é o módulo a da aceleração experimentada pelo passageiro no ponto P e depois de passar pelo ponto P?

Raciocínio: No ponto P, a tem o valor planejado de $4g$. Depois de passar por P, o passageiro se move em linha reta e a aceleração centrípeta deixa de existir. Assim, o passageiro tem apenas a aceleração de módulo g ao longo dos trilhos e, portanto,

$$a = 4g \text{ em } P \text{ e } a = g \text{ depois de } P. \quad \text{(Resposta)}$$

A dor de cabeça de montanha-russa acontece quando a cabeça de um passageiro sofre uma mudança brusca de aceleração, com altos valores de aceleração antes ou depois da mudança. A razão é que a mudança pode fazer com que o cérebro se mova em relação ao crânio, rompendo os vasos que ligam o crânio ao cérebro. O aumento gradual da aceleração de g para $4g$ entre o ponto inicial e o ponto P pode afetar alguns passageiros, mas é mais provável que a variação abrupta da aceleração de $4g$ para g quando o passageiro passa pelo ponto P provoque uma dor de cabeça de montanha-russa.

TÁTICA PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 1: *Unidades de Variáveis Angulares* A partir da Eq. 10-1 ($\theta = s/r$), passamos a adotar o radiano como unidade de ângulo nas variáveis angulares sempre que usamos equações que contêm variáveis angulares e lineares. Assim, expressamos deslocamentos angulares em radianos, velocidades angulares em rad/s e rad/min e acelerações angulares em rad/s^2 e rad/min^2. Este fato foi comentado nas Eqs. 10-17, 10-18, 10-20, 10-22 e 10-23. As únicas exceções a essa regra são equações que envolvem *apenas* variáveis angulares, como as que aparecem na Tabela 10-1. Nesse caso, temos liberdade para usar a unidade que desejarmos para as variáveis angulares, ou seja, podemos usar radianos, graus ou revoluções, desde que de forma coerente.

Nas equações em que os ângulos são expressos em radianos não é obrigatório escrever a unidade "radiano" (rad) junto com as outras unidades; assim, por exemplo, podemos dizer que uma velocidade angular é de 35 rad/s ou, simplesmente, 35 s^{-1}.

10-6 | Energia Cinética de Rotação

Quando está girando, o disco de uma serra elétrica certamente possui uma energia cinética associada à rotação. Como expressar essa energia? Não podemos aplicar a fórmula convencional $K = \frac{1}{2}mv^2$ ao disco como um todo, pois isso nos daria apenas a energia cinética do centro de massa do disco, que é zero.

Em vez disso, vamos tratar o disco (e qualquer outro corpo rígido em rotação) como um conjunto de partículas com diferentes velocidades e somar as energias cinéticas dessas partículas para obter a energia cinética do corpo como um todo. Segundo esse raciocínio, a energia cinética de um corpo em rotação é dada por

$$K = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + \tfrac{1}{2}m_3v_3^2 + \cdots$$
$$= \sum \tfrac{1}{2}m_iv_i^2, \quad (10\text{-}31)$$

onde m_i é a massa da partícula de ordem i e v_i é a velocidade da partícula. A soma se estende a todas as partículas do corpo.

O problema da Eq. 10-31 é que v_i não é igual para todas as partículas. Resolvemos esse problema substituindo v pelo seu valor, dado pela Eq. 10-8 ($v = \omega r$):

$$K = \sum \tfrac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum m_ir_i^2\right)\omega^2, \quad (10\text{-}32)$$

onde ω é igual para todas as partículas.

A grandeza entre parênteses no lado direito da Eq. 10-32 depende da forma como a massa do corpo está distribuída em relação ao eixo de rotação. Chamamos essa quantidade de **momento de inércia** do corpo em relação ao eixo de rotação. O momento de inércia, representado pela letra I, depende do corpo e do eixo em torno do qual está sendo executada a rotação. (O valor de I tem significado apenas quando se sabe em relação a que eixo o valor foi medido.)

Podemos agora escrever

$$I = \sum m_ir_i^2 \quad \text{(momento de inércia)} \quad (10\text{-}33)$$

e substituir na Eq. 10-32, obtendo

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{(ângulo em radianos)} \quad (10\text{-}34)$$

como a expressão que procuramos. Como usamos a relação $v = \omega r$ na dedução da Eq. 10-34, ω deve estar expressa em radianos por unidade de tempo. A unidade de I no SI é o quilograma-metro quadrado ($kg \cdot m^2$).

A Eq. 10-34, que fornece a energia cinética de um corpo rígido em rotação pura, é a equivalente angular da expressão $K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$, usada para calcular a energia cinética de um corpo rígido em translação pura. As duas expressões envolvem um fator de $\frac{1}{2}$. Enquanto a massa M aparece em uma das equações, I (que envolve tanto a massa quanto sua distribuição) aparece na outra. Finalmente, cada equação contém como um fator o quadrado de uma velocidade, de translação ou de rotação, conforme o caso. As energias cinéticas de translação e de rotação não são tipos diferentes de energia. Ambas são energias cinéticas, expressas na forma apropriada ao movimento em questão.

Observamos anteriormente que o momento de inércia de um corpo em rotação envolve não apenas sua massa, mas também a forma como esta massa está distribuída. Aqui está um exemplo que você pode literalmente sentir. Faça girar uma barra comprida e relativamente pesada (uma barra de ferro, por exemplo) primeiro em torno do eixo central (longitudinal) (Fig. 10-11*a*) e depois em torno de um eixo perpendicular à barra, passando pelo centro (Fig. 10-11*b*). As duas rotações envolvem a mesma massa, mas é muito mais fácil executar a primeira rotação que a segunda. A razão é que as partículas que formam a barra estão muito mais próximas do eixo na primeira rotação. Em conseqüência, o momento de inércia da barra é muito menor na situação da Fig. 10-11*a* que na da Fig. 10-11*b*. Quanto menor o momento de inércia, mais fácil é executar uma rotação.

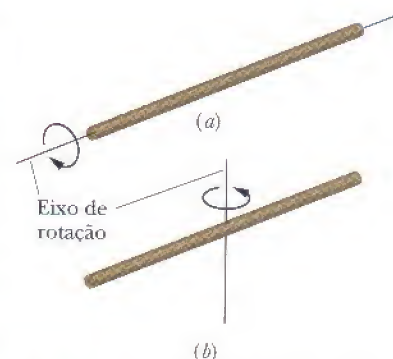
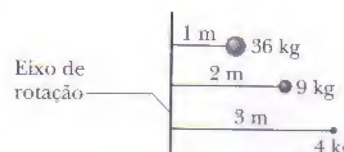


FIG. 10-11 É mais fácil fazer girar uma barra comprida em torno (*a*) do eixo central (longitudinal) do que (*b*) de um eixo passando pelo centro e perpendicular à maior dimensão da barra. A razão para essa diferença é que a distribuição de massa está mais próxima do eixo de rotação em (*a*) do que em (*b*).

TESTE 4 A figura mostra três pequenas esferas que giram em torno de um eixo vertical. A distância perpendicular entre o eixo e o centro de cada esfera é dada. Ordene as três esferas de acordo com seus momentos de inércia em torno do eixo, em ordem decrescente.



10-7 | Cálculo do Momento de Inércia

Se um corpo rígido contém um número pequeno de partículas, podemos calcular o momento de inércia em torno de um eixo de rotação usando a Eq. 10-33 ($I = \sum m_i r_i^2$), ou seja, podemos calcular o produto mr^2 para cada partícula e somar os produtos. (Lembre-se de que r é a distância perpendicular de uma partícula ao eixo de rotação.)

Se um corpo rígido contém um número muito grande de partículas (se é *contínuo*, como um disco de plástico), usar a Eq. 10-33 seria impraticável. Em vez disso, substituímos o somatório da Eq. 10-33 por uma integral e definimos o momento de inércia do corpo como

$$I = \int r^2\, dm \qquad \text{(momento de inércia, corpo contínuo).} \qquad (10\text{-}35)$$

A Tabela 10-2 mostra os resultados dessa integração para nove formas geométricas comuns e para os eixos de rotação indicados.

Teorema dos Eixos Paralelos

Suponha que estamos interessados em determinar o momento de inércia I de um corpo de massa M em relação a um eixo dado. Em princípio, podemos sempre calcular o valor de I usando a integral da Eq. 10-35. Contudo, o problema fica mais fácil se conhecemos o momento de inércia I_{CM} do corpo em relação a um eixo *paralelo* ao eixo desejado, passando pelo centro de massa. Seja h a distância perpendicular entre o eixo dado e o eixo que passa pelo centro de massa (lembre-se de que esses dois eixos devem ser paralelos). Nesse caso, o momento de inércia I em relação ao eixo dado é

TABELA 10-2

Alguns Momentos de Inércia

(a) Anel fino em torno de um eixo central. Eixo, R. $I = MR^2$	(b) Cilindro oco (ou anel grosso) em torno de um eixo central. Eixo, R_1, R_2. $I = \frac{1}{2}M(R_1{}^2 + R_2{}^2)$	(c) Cilindro (ou disco) maciço em torno do eixo central. Eixo, R, L. $I = \frac{1}{2}MR^2$
(d) Cilindro (ou disco) maciço em torno de um diâmetro central. Eixo, R, L. $I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$	(e) Barra fina em torno de um eixo central perpendicular à maior dimensão. Eixo, L. $I = \frac{1}{12}ML^2$	(f) Esfera maciça em torno de um diâmetro. Eixo, $2R$. $I = \frac{2}{5}MR^2$
(g) Casca esférica fina em torno de um diâmetro. Eixo, $2R$. $I = \frac{2}{3}MR^2$	(h) Anel fino em torno de um diâmetro. Eixo, R. $I = \frac{1}{2}MR^2$	(i) Placa fina em torno de um eixo perpendicular passando pelo centro. Eixo, a, b. $I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$

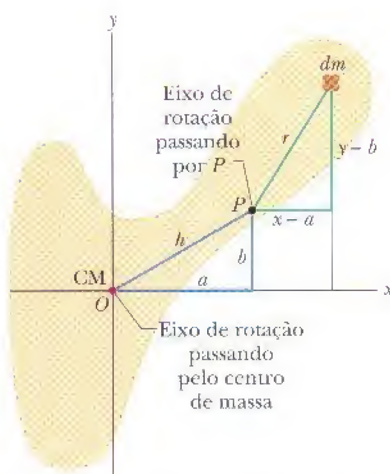


FIG. 10-12 Seção transversal de um corpo rígido, com o centro de massa em O. O teorema dos eixos paralelos (Eq. 10-36) relaciona o momento de inércia do corpo em relação a um eixo passando por O ao momento de inércia em relação a um eixo paralelo ao primeiro passando por um ponto P situado a uma distância h do centro de massa. Os dois eixos são perpendiculares ao plano da figura.

$$I = I_{CM} + Mh^2 \qquad \text{(teorema dos eixos paralelos).} \qquad (10\text{-}36)$$

Esta equação é conhecida como **teorema dos eixos paralelos**. Este teorema será demonstrado a seguir e aplicado no Teste 5 e no Exemplo 10-6.

Demonstração do Teorema dos Eixos Paralelos

Seja O o centro de massa de um corpo de forma arbitrária cuja seção reta aparece na Fig. 10-12. Posicione a origem de um sistema de coordenadas em O. Considere um eixo passando por O e perpendicular ao plano do papel e outro eixo passando pelo ponto P e paralelo ao primeiro eixo. Suponha que as coordenadas x e y do ponto P sejam a e b, respectivamente.

Seja dm um elemento de massa de coordenadas genéricas x e y. De acordo com a Eq. 10-35, o momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa por P é dado por

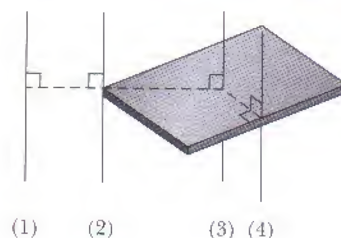
$$I = \int r^2\, dm = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2]\, dm,$$

que pode ser escrita na forma

$$I = \int (x^2 + y^2)\, dm - 2a\int x\, dm - 2b\int y\, dm + \int (a^2 + b^2)\, dm. \qquad (10\text{-}37)$$

De acordo com a definição de centro de massa (Eq. 9-9), as duas integrais do meio da Eq. (10-37) são as coordenadas do centro de massa (multiplicadas por constantes) e, portanto, devem ser nulas. Como $x^2 + y^2 = R^2$, onde R é a distância de O a dm, a primeira integral é simplesmente I_{CM}, o momento de inércia do corpo em relação a um eixo passando pelo centro de massa. Observando a Fig. 10-12, vemos que o úl-

timo termo da Eq. 10-37 é Mh^2, onde M é a massa total do corpo. Assim, a Eq. 10-37 se reduz à Eq. 10-36, que é a relação que queríamos demonstrar.



TESTE 5 A figura mostra um livro e quatro eixos de rotação, todos perpendiculares à capa do livro. Ordene os eixos de acordo com o momento de inércia do objeto em relação ao eixo, em ordem decrescente.

Exemplo 10-6

A Fig. 10-13*a* mostra um corpo rígido composto por duas partículas de massa m ligadas por uma barra de comprimento L e massa desprezível.

(a) Qual é o momento de inércia I_{CM} em relação a um eixo passando pelo centro de massa e perpendicular à barra, como mostra a figura?

IDÉIA-CHAVE Como temos apenas duas partículas com massa, podemos calcular o momento de inércia I_{CM} do corpo usando a Eq. 10-33.

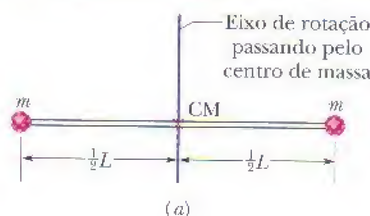
Cálculos: Para as duas partículas, ambas a uma distância perpendicular $L/2$ do eixo de rotação, temos:

$$I = \sum m_i r_i^2 = (m)(\tfrac{1}{2}L)^2 + (m)(\tfrac{1}{2}L)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}mL^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é o momento de inércia I do corpo em relação a um eixo passando pela extremidade esquerda da barra e paralelo ao primeiro eixo (Fig. 10-13*b*)?

IDÉIAS-CHAVE Esta situação é tão simples que podemos determinar I usando duas técnicas. A primeira é semelhante à que foi usada no item (a). A outra, mais geral, consiste em aplicar o teorema dos eixos paralelos.

Primeira técnica: Calculamos I como no item (a), exceto pelo fato de que agora a distância perpendicular r_i é zero



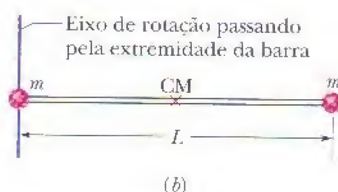


FIG. 10-13 Um corpo rígido composto por duas partículas de massa m unidas por uma barra de massa desprezível.

para a partícula da esquerda e L para a partícula da direita. De acordo com a Eq. 10-33,

$$I = m(0)^2 + mL^2 = mL^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Segunda técnica: Como já conhecemos I_{CM}, o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa, e como o eixo especificado é paralelo a esse "eixo CM", podemos usar o teorema dos eixos paralelos (Eq. 10-36). Temos:

$$I = I_{CM} + Mh^2 = \tfrac{1}{2}L^2 + (2m)(\tfrac{1}{2}L)^2$$
$$= mL^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Exemplo 10-7

A Fig. 10-14 mostra uma barra fina, uniforme, de massa M e comprimento L, sobre um eixo x cuja origem está no centro da barra.

(a) Qual é o momento de inércia da barra em relação a um eixo perpendicular à barra passando pelo seu centro?

IDÉIAS-CHAVE (a) Como a barra é uniforme, seu centro de massa está no centro geométrico. Assim, o momento de inércia pedido é I_{CM}. (2) Como a barra é um objeto contínuo, devemos usar a integral da Eq. 10-35,

$$I = \int r^2\, dm, \qquad (10\text{-}38)$$

para determinar o momento de inércia.

Cálculos: Como queremos integrar em relação à coordenada x e não em relação à massa m, como na integral da Eq. 10-38, devemos relacionar a massa dm de um elemento da barra a um elemento de distância dx ao longo da barra. (Um desses elementos é mostrado na Fig. 10-14.) Como a barra é uniforme, a razão entre massa e comprimento é a mesma para todos os elementos e para a barra como um todo, de modo que podemos escrever



FIG. 10-14 Uma barra uniforme de comprimento L e massa M. Um elemento de massa dm e comprimento dx está representado na figura.

$$\frac{\text{elemento de massa } dm}{\text{elemento de distância } dx} = \frac{\text{massa da barra } M}{\text{comprimento da barra } L}$$

ou
$$dm = \frac{M}{L}dx.$$

Podemos agora substituir dm por este valor e r por x na Eq. 10-38. Em seguida, integramos de uma extremidade a outra da barra (de $x = -L/2$ a $x = L/2$) para levar em conta todos os elementos. Temos:

$$I = \int_{x=-L/2}^{x=+L/2} x^2 \left(\frac{M}{L}\right) dx$$
$$= \frac{M}{3L}\left[x^3\right]_{-L/2}^{+L/2} = \frac{M}{3L}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right]$$
$$= \tfrac{1}{12}ML^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este resultado está de acordo com o que aparece na Tabela 10-2*e*.

(b) Qual é o momento de inércia I da barra em relação a um novo eixo perpendicular à barra passando pela extremidade esquerda?

IDÉIAS-CHAVE Poderíamos calcular I mudando a origem do eixo x para a extremidade esquerda da barra e integrando de $x = 0$ a $x = L$. Entretanto, vamos usar uma técnica mais geral (e mais simples), que envolve o uso do teorema dos eixos paralelos (Eq. 10-36).

Cálculos: Se colocamos o eixo na extremidade esquerda da barra, mantendo-o paralelo ao eixo que passa pelo centro de massa, podemos usar o teorema dos eixos paralelos (Eq. 10-36). De acordo com o item (a), $I_{CM} = ML^2/12$. Como mostra a Fig. 10-14, a distância perpendicular h entre o novo eixo de rotação e o centro de massa é L/2. Substituindo esses valores na Eq. 10-36, temos:

$$I = I_{CM} + Mh^2 = \tfrac{1}{12}ML^2 + (M)(\tfrac{1}{2}L)^2$$
$$= \tfrac{1}{3}ML^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Na verdade, o mesmo resultado é obtido para qualquer eixo perpendicular à barra passando pela extremidade esquerda ou direita, seja ou não paralelo ao eixo da Fig. 10-14.

Exemplo 10-8

Grandes peças de máquinas que serão submetidas a rotações prolongadas em alta velocidade costumam ser testadas em um *sistema de ensaio de rotação*. Nesse sistema, a peça é posta para girar rapidamente no interior de uma montagem cilíndrica de tijolos de chumbo com um revestimento de contenção, tudo isso dentro de uma câmara de aço fechada por uma tampa lacrada. Se a rotação faz a peça se estilhaçar, os tijolos de chumbo, sendo macios, capturam os fragmentos para serem posteriormente analisados.

Em 1985, a empresa Test Devices, Inc. (www.testdevices.com) estava testando um rotor de aço maciço, em forma de disco, com uma massa $M = 272$ kg e um raio $R = 38{,}0$ cm. Quando a peça atingiu uma velocidade angular ω de 14 000 rev/min, os engenheiros que realizavam o ensaio ouviram um ruído seco na câmara, que ficava um andar abaixo e a uma sala de distância. Na investigação, descobriram que tijolos de chumbo haviam sido lançados no corredor que levava à sala de testes, uma das portas da sala havia sido arremessada no estacionamento do lado de fora do prédio, um tijolo de chumbo havia atravessado a parede e invadido a cozinha de um vizinho, as vigas estruturais do edifício do teste tinham sido danificadas, o chão de concreto abaixo da câmara de ensaios havia afundado cerca de 0,5 cm e a tampa de 900 kg tinha sido lançada para cima, atravessara o teto e caíra de volta, destruindo o equipamento de ensaio. Os fragmentos da explosão só não penetraram na sala dos engenheiros por pura sorte.



FIG. 10-15 Parte da destruição causada pela explosão de um disco de aço em alta rotação. *(Cortesia de Test Devices, Inc)*

Qual foi a energia liberada na explosão do rotor?

IDÉIA-CHAVE A energia liberada foi igual à energia cinética de rotação K do rotor no momento em que a velocidade angular era de 14 000 rev/min.

Cálculos: Podemos calcular K usando a Eq. 10-34 ($K = \frac{1}{2}I\omega^2$), mas, para isso, precisamos conhecer o momento de inércia I. Como o rotor era um disco que girava como um carrossel, I é dado pela expressão apropriada da Tabela 10-2c ($I = \frac{1}{2}MR^2$). Assim, temos:

$$I = \tfrac{1}{2}MR^2 = \tfrac{1}{2}(272\text{ kg})(0{,}38\text{ m})^2 = 19{,}64\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

A velocidade angular do rotor era

$$\omega = (14\,000\text{ rev/min})(2\pi\text{ rad/rev})\left(\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}\right) = 1{,}466\times10^3\text{ rad/s}.$$

Podemos usar a Eq. 10-34 para escrever

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(19{,}64\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(1{,}466\times10^3\text{ rad/s})^2 = 2{,}1\times10^7\text{ J}. \quad \text{(Resposta)}$$

Os engenheiros realmente tiveram muita sorte.

10-8 | Torque

Uma maçaneta fica o mais longe possível do eixo das dobradiças por uma boa razão. Para abrir uma porta pesada você certamente deve aplicar uma força; apenas isso, contudo, não é suficiente. O lugar onde você aplica a força e a direção em que você empurra a porta também são parâmetros importantes. Se você aplica a força mais perto do eixo das dobradiças que a maçaneta, ou com um ângulo diferente de 90° em relação ao plano da porta, precisa usar uma força maior para abrir a porta do que se aplicar a força à maçaneta, perpendicularmente ao plano da porta.

A Fig. 10-16*a* mostra uma seção reta de um corpo que está livre para girar em torno de um eixo passando por O e perpendicular à seção reta. Uma força $\vec{F}$ é aplicada no ponto P, cuja posição em relação a O é definida por um vetor posição $\vec{r}$. O ângulo entre os vetores $\vec{F}$ e $\vec{r}$ é ϕ. (Para simplificar, consideramos apenas forças que não têm componentes paralelas ao eixo de rotação; assim, $\vec{F}$ está no plano do papel.)

Para determinar o modo como $\vec{F}$ provoca uma rotação do corpo em torno do eixo de rotação, podemos separar a força em duas componentes (Fig. 10-16*b*). Uma dessas componentes, a *componente radial* F_r, tem a direção de $\vec{r}$. Esta componente não provoca rotações, já que age ao longo de uma reta que passa por O. (Se você puxar uma porta paralelamente ao plano da porta, a porta não vai girar.) A outra componente de $\vec{F}$, a *componente tangencial* F_t, é perpendicular a $\vec{r}$ e tem módulo $F_t = F\,\text{sen}\,\phi$. Esta componente *provoca* rotações. (Se você puxar uma porta perpendicularmente ao plano da porta, a porta vai girar.)

A capacidade de $\vec{F}$ de fazer o corpo girar depende não só do módulo da componente tangencial F_t, mas também da distância entre o ponto de aplicação de $\vec{F}$ e o ponto O. Para levar em conta esses dois fatores definimos uma grandeza chamada de **torque** (τ) como o produto dos dois fatores:

$$\tau = (r)(F\,\text{sen}\,\phi). \tag{10-39}$$

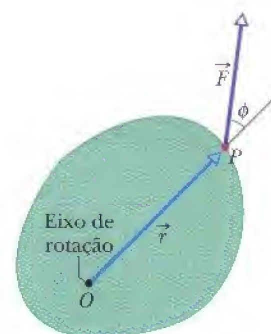
Duas formas equivalentes de calcular o torque são

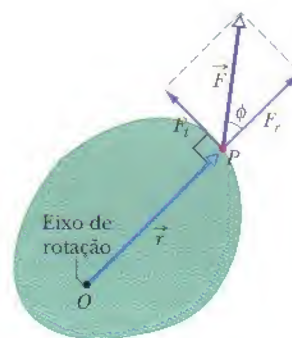
$$\tau = (r)(F\,\text{sen}\,\phi) = rF_t \tag{10-40}$$

e

$$\tau = (F\,\text{sen}\,\phi)(F) = r_\perp F, \tag{10-41}$$

onde $r_\perp$ é a distância perpendicular entre o eixo de rotação que passa por O e uma reta que coincide com a direção do vetor $\vec{F}$ (Fig. 10-16*c*). Esta reta é chamada de **linha de ação** de $\vec{F}$, e $r_\perp$ é o **braço de alavanca** de $\vec{F}$. A Fig. 10-16*b* mostra que podemos descrever r, o módulo de $\vec{r}$, como sendo o braço de alavanca de F_t, a componente tangencial de $\vec{F}$.





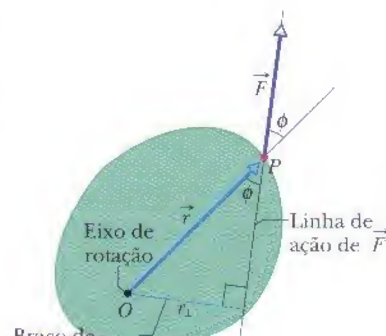


FIG. 10-16 (*a*) Uma força $\vec{F}$ age sobre um ponto P de um corpo rígido que está livre para girar em torno de um eixo que passa por O; o eixo é perpendicular ao plano da seção reta mostrada na figura. (*b*) O torque produzido por esta força é $(r)(F\,\text{sen}\,\phi)$. Também podemos escrevê-lo como rF_t, onde F_t é a componente tangencial de $\vec{F}$. (*c*) O torque também pode ser escrito como $r_\perp F$, onde $r_\perp$ é o braço de alavanca de $\vec{F}$.

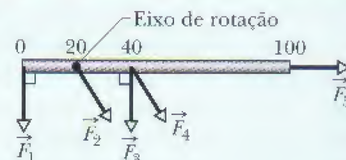
O torque, cujo nome vem de uma palavra em latim que significa "torcer", pode ser descrito coloquialmente como a ação de girar ou torcer de uma força $\vec{F}$. Quando aplicamos uma força a um objeto com uma chave de fenda ou uma chave de grifa com o objetivo de fazer o objeto girar, estamos aplicando um torque. A unidade de torque do SI é o newton-metro (N · m). *Atenção:* No SI o trabalho também tem dimensões de newton-metro. Torque e trabalho, contudo, são grandezas muito diferentes, que não devem ser confundidas. O trabalho é normalmente expresso em joules (1 J = 1 N · m), mas isso nunca acontece com o torque.

No próximo capítulo discutiremos o torque em geral como sendo uma grandeza vetorial. No momento, porém, como vamos considerar apenas rotações em torno de um único eixo, não precisamos usar a notação vetorial. Em vez disso, atribuímos ao torque um valor positivo ou negativo, dependendo do sentido da rotação que ele imprimiria a um corpo a partir do repouso. Se o corpo gira no sentido anti-horário, o torque é positivo. Se o torque faria o objeto girar no sentido horário, ele é negativo. (A frase "relógios são negativos" da Seção 10-2 ainda continua válida.)

Os torques obedecem ao princípio de superposição que discutimos no Capítulo 5 para forças: quando vários torques atuam sobre um corpo, o **torque total** (ou **torque resultante**) é a soma dos torques individuais. O símbolo de torque resultante é τ_{res}.



TESTE 6 A figura mostra uma vista superior de um bastão de uma régua de um metro que pode girar em torno de um eixo que passa na posição 20 (20 cm). As cinco forças aplicadas à régua são horizontais e têm o mesmo módulo. Ordene as forças de acordo com o módulo do torque que produzem, do maior para o menor.



10-9 | A Segunda Lei de Newton para Rotações

Um torque pode fazer um corpo rígido girar, como acontece, por exemplo, quando abrimos ou fechamos uma porta. No momento estamos interessados em relacionar o torque resultante τ_{res} aplicado a um corpo rígido à aceleração angular α produzida pelo torque. Fazemos isso por analogia com a segunda lei de Newton ($F_{res} = ma$) para a aceleração a de um corpo de massa m produzida por uma força resultante F_{res} ao longo de um eixo. Substituímos F_{res} por τ_{res}, m por I e a por α, o que nos dá

$$\tau_{res} = I\alpha \quad \text{(segunda lei de Newton para rotações).} \tag{10-42}$$

Demonstração da Equação 10-42

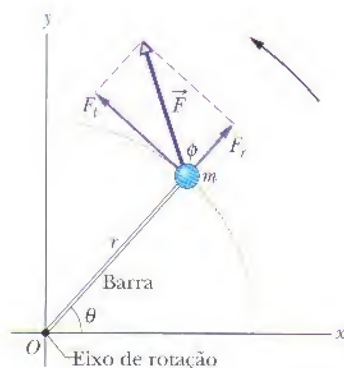


FIG. 10-17 Um corpo rígido simples, livre para girar em torno de um eixo que passa por O, é formado por uma partícula de massa m presa na extremidade de uma barra de comprimento r e massa desprezível. A aplicação de uma força $\vec{F}$ faz o corpo girar.

Vamos demonstrar a Eq. 10-42 considerando a situação simples da Fig. 10-17, na qual o corpo rígido é constituído por uma partícula de massa m na extremidade de uma barra de massa desprezível de comprimento r. A barra pode se mover apenas girando em torno de um eixo, perpendicular ao plano do papel, que passa pela outra extremidade da barra. Assim, a partícula pode se mover apenas em uma trajetória circular com o centro no eixo de rotação.

Uma força $\vec{F}$ age sobre a partícula. Como, porém, a partícula só pode se mover ao longo de uma trajetória circular, apenas a componente tangencial F_t da força (a componente que é tangente à trajetória circular) pode acelerar a partícula ao longo da trajetória. Podemos relacionar F_t à aceleração tangencial a_t da partícula ao longo da trajetória através da segunda lei de Newton, escrevendo

$$F_t = ma_t.$$

De acordo com a Eq. 10-40, o torque que age sobre a partícula é dado por

$$\tau = F_t r = ma_t r.$$

De acordo com a Eq. 10-22 ($a_t = \alpha r$), temos:

$$\tau = m(\alpha r)r = (mr^2)\alpha. \qquad (10\text{-}43)$$

A grandeza entre parênteses do lado direito é o momento de inércia da partícula em torno do eixo de rotação (veja a Eq. 10-33). Assim, a Eq. 10-43 se reduz a

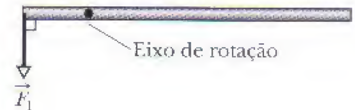
$$\tau = I\alpha \quad \text{(ângulo em radianos).} \qquad (10\text{-}44)$$

Na situação em que várias forças agem sobre a partícula, podemos generalizar a Eq. 10-44 escrevendo

$$\tau_{res} = I\alpha \quad \text{(ângulo em radianos),} \qquad (10\text{-}45)$$

que é a equação que queríamos provar. Podemos estender essa equação a qualquer corpo rígido girando em torno de um eixo fixo, uma vez que o corpo pode sempre ser considerado como um conjunto de partículas.

TESTE 7 A figura mostra uma vista superior de uma régua de um metro que pode girar em torno do ponto indicado, que está à esquerda do ponto médio da régua. Duas forças horizontais, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, são aplicadas à régua. Apenas $\vec{F}_1$ é mostrada na figura. A força $\vec{F}_2$ é perpendicular à régua e é aplicada à extremidade direita. Para que a régua não se mova, (a) qual deve ser o sentido de $\vec{F}_2$, e (b) F_2 deve ser maior, menor ou igual a F_1?



Exemplo 10-9 Aumente sua capacidade

A Fig. 10-18*a* mostra um disco uniforme, de massa $M = 2{,}5$ kg e raio $R = 20$ cm, montado em um eixo horizontal fixo. Um bloco de massa $m = 1{,}2$ kg está pendurado por uma corda de massa desprezível que está enrolada na borda do disco. Determine a aceleração do bloco em queda, a aceleração angular do disco e a tensão na corda. A corda não escorrega e não existe atrito no eixo.

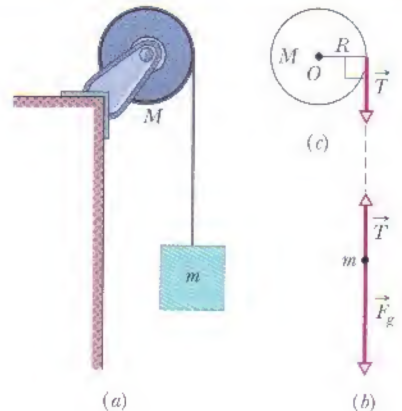


FIG. 10-18 (*a*) O corpo em queda faz o disco girar. (*b*) Diagrama de corpo livre do bloco. (*c*) Diagrama de corpo livre incompleto do disco.

IDÉIAS-CHAVE (1) Considerando o bloco como um sistema, podemos relacionar sua aceleração a às forças que agem sobre ele através da segunda lei de Newton ($\vec{F}_{res} = m\vec{a}$). (2) Considerando o disco como um sistema, podemos relacionar sua aceleração angular α ao torque que age sobre ele através da segunda lei de Newton para rotações ($\tau_{res} = I\alpha$). (3) Para combinar os movimentos do bloco e do disco, usamos o fato de que a aceleração linear a do bloco e a aceleração linear (tangencial) a_t da borda do disco são iguais.

Forças que agem sobre o bloco: Essas forças estão representadas no diagrama de corpo livre do bloco (Fig. 10-18*b*): A força da corda é $\vec{T}$ e a força gravitacional é $\vec{F}_g$, de módulo mg. Podemos escrever a segunda lei de Newton para as componentes ao longo de um eixo vertical y ($F_{res,y} = ma_y$) como

$$T - mg = ma. \qquad (10\text{-}46)$$

Entretanto, não podemos obter o valor de a usando apenas essa equação, porque ela também contém a incógnita T.

Torque exercido sobre o disco: Anteriormente, quando esgotávamos as possibilidades com o eixo y passávamos para o eixo x; aqui passamos para a rotação do disco. Para calcular os torques e o momento de inércia I usamos o fato de que o eixo de rotação é perpendicular ao disco e passa pelo seu centro, o ponto O da Fig. 10-18*c*.

Nesse caso, os torques são dados pela Eq. 10-40 ($\tau = rF_t$). A força gravitacional e a força do eixo agem sobre o centro do disco e, portanto, a uma distância $r = 0$, de modo que o torque produzido por essas forças é nulo. A força $\vec{T}$ exercida pela corda sobre o disco age a uma distância $r = R$ do eixo e é tangente à borda do disco. Assim, a força produz um torque $-RT$, negativo porque o torque tende a fazer o disco girar no sentido horário. De acordo com a Tabela 10-2*c*, o momento de inércia I do disco é $MR^2/2$. Assim, podemos escrever a equação $\tau_{res} = I\alpha$ na forma

$$-RT = \tfrac{1}{2}MR^2\alpha. \qquad (10\text{-}47)$$

Esta equação pode parecer inútil porque tem duas incógnitas, α e T, nenhuma das quais é a incógnita a cujo valor queremos determinar. Entretanto, com a persistência

que é a marca registrada dos físicos, conseguimos torná-la útil quando nos lembramos de um fato: como a corda não escorrega, a aceleração linear a do bloco e a aceleração linear (tangencial) a_t de um ponto na borda do disco são iguais. Nesse caso, de acordo com a Eq. 10-22 ($a_t = \alpha r$), vemos que $\alpha = a/R$. Substituindo este valor na Eq. 10-47, obtemos:

$$T = -\tfrac{1}{2}Ma. \qquad (10\text{-}48)$$

Combinação dos resultados: Combinando as Eqs. 10-46 e 10-48, temos:

$$a = -g\frac{2m}{M+2m} = -(9{,}8\ \text{m/s}^2)\frac{(2)(1{,}2\ \text{kg})}{2{,}5\ \text{kg}+(2)(1{,}2\ \text{kg})}$$

$$= -4{,}8\text{m/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Podemos usar a Eq. 10-48 para calcular T:

$$T = -\tfrac{1}{2}Ma = -\tfrac{1}{2}(2{,}5\ \text{kg})(-4{,}8\text{m/s}^2)$$

$$= 6{,}0\ \text{N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Como seria de se esperar, a aceleração a do bloco que cai é menor que g e a tensão T da corda (= 6,0 N) é menor que a força gravitacional que age sobre o bloco (= mg = 11,8 N). Vemos também que a e T dependem da massa do disco, mas não do seu raio. A título de verificação, notamos que as expressões obtidas se reduzem $a = -g$ e $T = 0$ para o caso de um disco de massa desprezível ($M = 0$). Isso é razoável; nesse caso, o bloco simplesmente cai em queda livre. De acordo com a Eq. 10-22, a aceleração angular do disco é

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{-4{,}8\ \text{m/s}^2}{0{,}20\ \text{m}} = -24\ \text{rad/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Exemplo 10-10

Para derrubar um adversário de 80 kg com um golpe de judô, você pretende puxar o quimono dele com uma força $\vec{F}$ e usar um braço de alavanca d_1 = 0,30 m em relação a um eixo de rotação situado no seu quadril direito (Fig. 10-19). Você quer fazê-lo girar em torno do eixo de rotação com uma aceleração angular α de $-6{,}0$ rad/s², ou seja, com uma aceleração angular *no sentido horário* da figura. Suponha que o momento de inércia I do seu adversário em relação ao eixo de rotação é 15 kg · m².

(a) Qual deve ser o módulo de $\vec{F}$ se, antes de tentar derrubar o adversário, você inclinar o corpo dele para a frente, de modo a reduzir a distância entre o centro de massa e o seu quadril (Fig. 10-19*a*)?

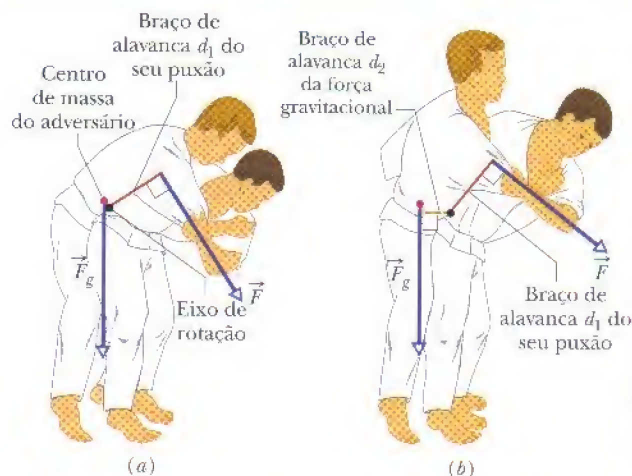


FIG. 10-19 Um golpe de judô (*a*) executado corretamente e (*b*) executado incorretamente.

IDÉIA-CHAVE É possível relacionar a força $\vec{F}$ à aceleração angular α através da segunda lei de Newton para rotações ($\tau_{res} = I\alpha$).

Cálculos: Quando os pés do seu adversário deixam o tatame, podemos supor que apenas três forças atuam sobre ele: a força $\vec{F}$ com a qual você puxa o quimono, a força $\vec{N}$ que você exerce sobre o seu adversário no eixo de rotação (esta força não está indicada na Fig. 10-19) e a força gravitacional $\vec{F}_g$. Para usar a equação $\tau_{res} = I\alpha$ precisamos calcular os três torques correspondentes, calculados para o mesmo eixo de rotação.

De acordo com a Eq. 10-41 ($\tau = r_\perp F$), o torque produzido pela força $\vec{F}$ é igual a $-d_1F$, onde d_1 é o braço de alavanca $r_\perp$, e o sinal negativo indica que a rotação que este torque tende a causar é no sentido horário. O torque produzido pela força $\vec{N}$ é nulo, pois $\vec{N}$ é aplicada ao eixo de rotação e, portanto, tem braço de alavanca $r_\perp = 0$.

Para calcular o torque produzido por $\vec{F}_g$, podemos supor que $\vec{F}_g$ está aplicada no centro de massa do adversário. Com o centro de massa no eixo de rotação, $\vec{F}_g$ tem braço de alavanca $r_\perp = 0$ e, portanto, o torque produzido por $\vec{F}_g$ é zero. Assim, o único torque que age sobre o seu oponente é o produzido pela força $\vec{F}_g$ que você aplica ao quimono, e podemos escrever $\tau_{res} = I\alpha$ na forma

$$-d_1F = I\alpha.$$

Nesse caso, temos:

$$F = \frac{-I\alpha}{d_1} = \frac{-(15\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(-6{,}0\ \text{rad/s}^2)}{0{,}30\ \text{m}}$$

$$= 300\ \text{N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual deve ser o módulo de $\vec{F}$ se seu oponente permanece em pé antes de você tentar derrubá-lo, de modo que $\vec{F}_g$ tem um braço de alavanca d_2 = 0,12 m (Fig. 10-19*b*)?

IDÉIA-CHAVE Como o braço de alavanca de $\vec{F}_g$ não é mais zero, o torque produzido por $\vec{F}_g$ é agora igual a d_2mg e é positivo, já que o torque tende a fazer o corpo do seu adversário girar no sentido anti-horário.

Cálculos: Nesse caso, a equação $\tau_{res} = I\alpha$ assume a forma

$$-d_1F + d_2mg = I\alpha,$$

o que nos dá

$$F = -\frac{I\alpha}{d_1} + \frac{d_2mg}{d_1}.$$

De acordo com o item (a), a primeiro termo do lado direito é igual a 300 N. Substituindo este e outros valores conhecidos, obtemos:

$$F = 300\text{ N} + \frac{(0{,}12\text{ m})(80\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)}{0{,}30\text{ m}}$$
$$= 613{,}6\text{ N} \approx 610\text{ N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Os resultados mostram que é preciso fazer muito mais força se você não inclinar o corpo do seu adversário para a frente, de modo a reduzir a distância entre o centro de massa e o seu quadril. Os bons lutadores de judô conhecem esta lição da física.

10-10 | Trabalho e Energia Cinética de Rotação

Como foi visto no Capítulo 7, quando uma força F acelera um corpo rígido de massa m ao longo de um eixo de coordenadas, a força realiza um trabalho W sobre o corpo. Isso significa que a energia cinética do corpo ($K = \frac{1}{2}mv^2$) pode mudar. Suponha que esta seja a única energia do corpo que varia. Nesse caso, podemos relacionar a variação ΔK da energia cinética ao trabalho W através do teorema do trabalho e energia cinética (Eq. 7-10), escrevendo

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 = W \quad \text{(teorema do trabalho e energia cinética).} \quad (10\text{-}49)$$

Para um movimento restrito a um eixo x, podemos calcular o trabalho usando a Eq. 7-32,

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F\,dx \quad \text{(trabalho, movimento unidimensional).} \quad (10\text{-}50)$$

Esta equação se reduz a $W = Fd$ quando F é constante e o deslocamento do corpo é d. A taxa com a qual o trabalho é realizado é a potência, que pode ser calculada usando com as Eqs. 7-43 e 7-48,

$$P = \frac{dW}{dt} = Fv \quad \text{(potência, movimento unidimensional).} \quad (10\text{-}51)$$

Vamos considerar uma situação análoga para rotações. Quando um torque acelera um corpo rígido em torno de um eixo fixo, o torque realiza um trabalho W sobre o corpo. Isso significa que a energia cinética rotacional do corpo ($K = \frac{1}{2}I\omega^2$) pode mudar. Suponha que esta seja a única energia do corpo que varia. Nesse caso, ainda podemos relacionar a variação ΔK da energia cinética ao trabalho W através do teorema do trabalho e energia cinética, mas agora a energia cinética é uma energia cinética rotacional:

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 = W \quad \text{(teorema do trabalho e energia cinética).} \quad (10\text{-}52)$$

onde I é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo fixo e ω_i e ω_f são, respectivamente, as velocidades angulares do corpo antes e depois que o trabalho é realizado.

Podemos também calcular o trabalho executado em uma rotação usando uma equação análoga à Eq. 10-50,

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\,d\theta \quad \text{(trabalho, rotação em torno de um eixo fixo),} \quad (10\text{-}53)$$

onde τ é o torque responsável pelo trabalho W e θ_i e θ_f são, respectivamente, as posições angulares do corpo antes e depois da rotação. Quando τ é constante, a Eq. 10-53 se reduz a

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) \quad \text{(trabalho, torque constante).} \tag{10-54}$$

TABELA 10-3

Algumas Correspondências entre os Movimentos de Translação e Rotação

Translação Pura (Direção Fixa)		Rotação Pura (Eixo Fixo)	
Posição	x	Posição angular	θ
Velocidade	$v = dx/dy$	Velocidade angular	$\omega = d\theta/dt$
Aceleração	$a = dv/dt$	Aceleração angular	$\alpha = d\omega/dt$
Massa	m	Momento de inércia	I
Segunda lei de Newton	$F_{res} = ma$	Segunda lei de Newton	$\tau_{res} = I\alpha$
Trabalho	$W = \int F\,dx$	Trabalho	$W = \int \tau\,d\theta$
Energia cinética	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Energia cinética	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Potência (força constante)	$P = Fv$	Potência (torque constante)	$P = \tau\omega$
Teorema do trabalho e energia cinética	$W = \Delta K$	Teorema do trabalho e energia cinética	$W = \Delta K$

A taxa com a qual o trabalho é realizado é a potência, que pode ser calculada usando uma equação equivalente à Eq. 10-51,

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega \quad \text{(potência, rotação em torno de um eixo fixo).} \tag{10-55}$$

A Tabela 10-3 mostra as equações que descrevem a rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo e as equações correspondentes para movimentos de translação.

Demonstração das Eqs. 10-52 a 10-55

Vamos considerar novamente a situação da Fig. 10-17, na qual uma força $\vec{F}$ faz girar um corpo rígido composto por uma partícula de massa m presa na extremidade de uma barra de massa desprezível. Durante a rotação, a força $\vec{F}$ realiza trabalho sobre o corpo. Vamos supor que a única energia do corpo que varia é a energia cinética. Nesse caso, podemos aplicar o teorema do trabalho e energia cinética da Eq. 10-49:

$$\Delta K = K_f - K_i = W. \tag{10-56}$$

Usando a relação $K = \frac{1}{2}mv^2$ e a Eq. 10-18 ($v = \omega r$), podemos escrever a Eq. 10-56 na forma

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}mr^2\omega_i^2 = W. \tag{10-57}$$

De acordo com a Eq. 10-33, o momento de inércia deste corpo é $I = mr^2$. Substituindo este valor na Eq. 10-57, obtemos

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 = W,$$

que é a Eq. 10-52. Deduzimos esta equação para um corpo rígido particular, mas ela vale para qualquer corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo.

Vamos agora relacionar o trabalho W realizado sobre o corpo da Fig. 10-17 ao torque τ exercido sobre o corpo pela força $\vec{F}$. Quando a partícula se desloca de uma distância ds ao longo da trajetória circular, apenas a componente tangencial F_t da força acelera a partícula ao longo da trajetória. Assim, apenas F_t realiza trabalho sobre a partícula. Esse trabalho dW pode ser escrito como $F_t\,ds$. Entretanto, podemos substituir ds por $r\,d\theta$, onde $d\theta$ é o ângulo descrito pela partícula. Temos, portanto,

$$dW = F_t r\,d\theta. \tag{10-58}$$

De acordo com a Eq. 10-40, o produto $F_t r$ é igual ao torque τ, de modo que podemos escrever a Eq. 10-58 na forma

$$dW = \tau d\theta. \qquad (10\text{-}59)$$

O trabalho realizado em um deslocamento angular finito de θ_i para θ_f é portanto

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau \, d\theta,$$

que é a Eq. 10-53. Ela vale para qualquer corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo. A Eq. 10-54 é uma conseqüência direta da Eq. 10-53.

Podemos calcular a potência P desenvolvida por um corpo em um movimento de rotação a partir da Eq. 10-59:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega,$$

que é a Eq. 10-55.

Exemplo 10-11

Suponha que o disco do Exemplo 10-9 e da Fig. 10-18 parte do repouso no instante $t = 0$. Qual é a energia cinética de rotação K no instante $t = 2{,}5$ s?

IDÉIA-CHAVE Podemos calcular K usando a Eq. 10-34 ($K = \frac{1}{2} I\omega^2$). Já sabemos que $K = \frac{1}{2} MR^2$, mas ainda não conhecemos o valor de ω no instante $t = 2{,}5$ s. Como, porém, a aceleração angular α tem o valor constante de -24 rad/s^2, podemos aplicar as equações para aceleração angular constante na Tabela 10-1.

Cálculos: Como estamos interessados em determinar ω e conhecemos α e ω_0 $(= 0)$, usamos a Eq. 10-12:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t = \alpha t.$$

Fazendo $\omega = \alpha t$ e $I = \frac{1}{2} MR^2$ na Eq. 10-34, obtemos

$$K = \tfrac{1}{2} I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2} MR^2)(\alpha t)^2 = \tfrac{1}{4} M(R\alpha t)^2$$
$$= \tfrac{1}{4}(2{,}5 \text{ kg})[(0{,}20 \text{ m})(-24 \text{ rad/s}^2)(2{,}5 \text{ s})]^2$$
$$= 90 \text{ J.} \qquad \text{(Resposta)}$$

IDÉIA-CHAVE Também podemos obter essa resposta calculando a energia cinética do disco a partir do trabalho realizado sobre o disco.

Cálculos: Primeiro, relacionamos a *variação* da energia cinética do disco ao trabalho total W realizado sobre o disco, usando o teorema do trabalho e energia cinética $(K_f - K_i = W)$. Substituindo K_f por K e K_i por 0, obtemos

$$K = K_i + W = 0 + W = W. \qquad (10\text{-}60)$$

Em seguida, precisamos calcular o trabalho W. Podemos relacionar W aos torques que atuam sobre o disco usando a Eq. 10-53 ou a 10-54. O único torque que produz aceleração angular e realiza trabalho é o torque devido à força $\vec{T}$ da corda sobre o disco. De acordo com o Exemplo 10-9, este torque é igual a $-TR$. Como α é constante, este torque também é constante. Assim, podemos usar a Eq. 10-54 para escrever

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) = -TR(\theta_f - \theta_i). \qquad (10\text{-}61)$$

Como α é constante, podemos usar a Eq. 10-13 para calcular $\theta_f - \theta_i$. Com $\omega_i = 0$, temos:

$$\theta_f - \theta_i = \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = \tfrac{1}{2}\alpha t^2.$$

Podemos substituir este valor na Eq. 10-61 e substituir o resultado na Eq. 10-60. Com $T = 6{,}0$ N e $\alpha = -24$ rad/s^2 (de acordo com o Exemplo 10-9), temos:

$$K = W = -TR(\theta_f - \theta_i) = -TR(\tfrac{1}{2}\alpha t^2) = -\tfrac{1}{2} TR\alpha t^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(6{,}0 \text{ N})(0{,}20 \text{ m})(-24 \text{ rad/s}^2)(2{,}5 \text{ s})^2$$
$$= 90 \text{ J.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Exemplo 10-12

Uma chaminé cilíndrica começa a tombar quando sua base é danificada. Trate a chaminé como uma barra fina da comprimento $L = 55{,}0$ m (Fig. 10-20a). Qual é sua velocidade angular ω no instante em que faz um ângulo $\theta = 35{,}0°$ com a vertical?

IDÉIAS-CHAVE (1) Durante a rotação, a energia mecânica (soma da energia cinética de rotação K com a energia po-

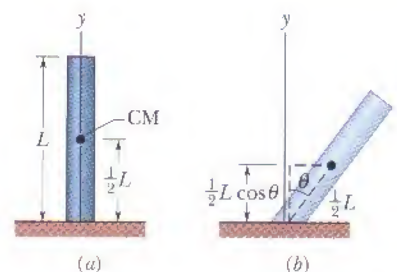


FIG. 10-20 (a) Uma chaminé cilíndrica. (b) A altura do centro de massa é determinada com o auxílio de um triângulo retângulo.

tencial gravitacional U) não varia. (2) A energia cinética de rotação é dada pela Eq. 10-34 ($K = \frac{1}{2} I\omega^2$).

Conservação da energia mecânica: Na queda da chaminé, a energia potencial gravitacional U é progressivamente convertida em energia cinética de rotação K, mas a energia total não varia. Podemos expressar este fato através da equação

$$K_f + U_f = K_i + U_i. \tag{10-62}$$

Energia cinética de rotação: A energia cinética de rotação K é inicialmente zero, mas seu valor em instantes posteriores ($= \frac{1}{2} I\omega^2$) depende do momento de inércia I. De acordo com a Tabela 2, no caso de uma barra fina girando em torno do centro de massa (ou seja, em torno do centro), $I_{CM} = \frac{1}{12} mL^2$, onde m é a massa da barra e L é o comprimento da barra. No nosso caso, a chaminé gira em torno de uma das extremidades, que fica a uma distância $L/2$ do centro de massa. De acordo com o teorema dos eixos paralelos, temos:

$$I = \frac{1}{12} mL + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} mL^2. \tag{10-63}$$

Substituindo este valor na equação $K = \frac{1}{2} I\omega^2$, obtemos

$$K_f = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} mL^2)\omega^2. \tag{10-64}$$

Energia potencial: A energia potencial U ($= mgy$) depende da altura de cada segmento da chaminé. Entretanto, podemos calcular U supondo que toda a massa está concentrada no centro de massa da chaminé, que se encontra inicialmente na altura $L/2$. Assim, a energia potencial inicial é

$$U_i = \frac{1}{2} mgL. \tag{10-65}$$

Quando a chaminé tomba de um ângulo θ, a Fig. 10-20*b* mostra que o centro de massa está a uma altura igual a $\frac{1}{2}L$. A energia potencial nesse instante é

$$U_f = \frac{1}{2} mgL \cos\theta. \tag{10-66}$$

Velocidade angular: Substituindo as Eqs. 10-66, 10-65 e 10-64 na Eq. 10-62, fazendo $K_i = 0$ e explicitando ω, obtemos

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1 - \cos\theta)} = \sqrt{\frac{3(9{,}8 \text{ m/s}^2)}{55{,}0 \text{ m}}(1 - \cos 35{,}0°)}$$
$$= 0{,}311 \text{ rad/s.} \quad \text{(Resposta)}$$

Comentários: Como a parte de baixo da chaminé tende a girar mais depressa que a parte de cima, é provável que a chaminé se quebre em duas partes durante a queda, com a parte de cima ficando para trás em relação à parte de baixo.

Exemplo 10-13

Na garra desproporcionalmente grande de um camarão-de-estalo, o dáctilo (parte móvel da garra) é puxado para longe do propódio (parte estacionária da garra) por um músculo que é colocado gradualmente sob tensão (Fig. 10-21). A energia armazenada no músculo aumenta à medida que a tensão aumenta. A brusca liberação do dáctilo permite que ele gire em torno de um eixo e se choque com o propódio após um intervalo de tempo Δt de apenas 290 μs. Em particular, a *cerda* do dáctilo penetra em uma cavidade do propódio, fazendo com que a água seja expulsa tão depressa da cavidade que sofre *cavitação*. Em outras palavras, formam-se bolhas de vapor d'água. Essas bolhas crescem rapidamente e depois murcham, emitindo ondas sonoras de grande intensidade. A combinação de ondas sonoras emitidas por muitas bolhas pode atordoar as presas do camarão.

A velocidade máxima de rotação do dáctilo, ω, é da ordem de 2×10^3 rad/s, e seu momento de inércia I é aproximadamente 3×10^{-11} kg · m². Qual é a taxa média de transferência de energia do músculo para a rotação?

IDÉIA-CHAVE (1) A energia cinética de rotação é dada pela Eq. 10-34 ($K = \frac{1}{2} I\omega^2$). (2) A potência média é dada pela Eq. 8-40 ($P_{méd} = \Delta E/\Delta t$).

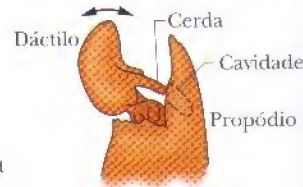


FIG. 10-21 A garra desproporcionalmente grande de um camarão-de-estalo. O dáctilo é puxado para longe do propódio e depois liberado bruscamente, fazendo com que a cerda penetre na cavidade.

Cálculos: Quando a velocidade angular atinge o valor máximo, a energia de rotação é

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}(3 \times 10^{-11} \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(2 \times 10^3 \text{ rad/s})^2$$
$$= 6 \times 10^{-5} \text{ J.}$$

A potência média é dada por

$$P_{méd} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{6 \times 10^{-5} \text{ J}}{290 \times 10^{-6} \text{ s}}$$
$$= 0{,}2 \text{ W.} \quad \text{(Resposta)}$$

Esta potência excede em muito a potência que qualquer músculo do camarão é capaz de desenvolver. Entretanto, o que o camarão faz é usar o dáctilo para distender um músculo como se fosse uma mola, de modo a aumentar gradualmente a tensão e a energia armazenada (a potência desenvolvida durante esse estágio po-

de ser relativamente pequena). Depois que a energia armazenada atinge um valor suficientemente elevado, o dáctilo é liberado e o músculo que faz o papel de mola se contrai rapidamente (a potência nesse estágio é muito alta). Muitos outros animais fazem uso desse recurso de armazenar energia lentamente e liberá-la de uma só vez, seja para conseguir um almoço, seja para não servir de almoço.

REVISÃO E RESUMO

Posição Angular Para descrever a rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo, chamado **eixo de rotação**, supomos que uma **reta de referência** está fixa no corpo, perpendicular ao eixo e girando com o corpo. Medimos a **posição angular** θ dessa linha em relação a uma direção fixa. Quando θ é medido em **radianos**,

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{(ângulo em radianos)}, \tag{10-1}$$

onde s é o comprimento de um arco de circunferência de raio r e ângulo θ. A relação entre um ângulo em radianos, um ângulo em revolução e um ângulo em graus é a seguinte:

$$1 \text{ rev} = 360° = 2\pi \text{ rad}. \tag{10-2}$$

Deslocamento Angular Um corpo que gira em torno de um eixo de rotação, mudando de posição angular de θ_1 para θ_2, sofre um **deslocamento angular**

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1, \tag{10-4}$$

onde $\Delta\theta$ é positivo para rotações no sentido anti-horário e negativo para rotações no sentido horário.

Velocidade Angular Se um corpo sofre um deslocamento angular $\Delta\theta$ em um intervalo de tempo Δt, sua **velocidade angular média** $\omega_{méd}$ é

$$\omega_{méd} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \tag{10-5}$$

A **velocidade angular (instantânea)** ω do corpo é

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}. \tag{10-6}$$

Tanto $\omega_{méd}$ como ω são vetores, cuja orientação é dada pela **regra da mão direita** da Fig. 10-6. O módulo da velocidade angular do corpo é a **velocidade angular escalar**.

Aceleração Angular Se a velocidade angular de um corpo varia de ω_1 para ω_2 em um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, a **aceleração angular média** $\alpha_{méd}$ do corpo é

$$\alpha_{méd} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \tag{10-7}$$

A **aceleração angular (instantânea)** α do corpo é

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}. \tag{10-8}$$

Tanto $\alpha_{méd}$ como α são vetores.

Equações Cinemáticas para Aceleração Angular Constante *A aceleração angular constante* (α = constante) é um caso especial importante de movimento de rotação. As equações cinemáticas apropriadas, que aparecem na Tabela 10-1, são

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \tag{10-12}$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2, \tag{10-13}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0), \tag{10-14}$$

$$\theta - \theta_0 = \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t, \tag{10-15}$$

$$\theta - \theta_0 = \omega t - \tfrac{1}{2}\alpha t^2, \tag{10-16}$$

Relações entre Variáveis Lineares e Angulares Um ponto de um corpo rígido em rotação, a uma *distância perpendicular* r do eixo de rotação, descreve uma circunferência de raio r. Se o corpo gira de um ângulo θ, o ponto descreve um arco de círculo de comprimento s dado por

$$s = \theta r \quad \text{(ângulo em radianos)}, \tag{10-17}$$

onde θ está em radianos.

A velocidade linear $\vec{v}$ do ponto é tangente à circunferência; a velocidade escalar linear v do ponto é dada por

$$v = \omega r \quad \text{(ângulo em radianos)}, \tag{10-18}$$

onde ω é a velocidade angular escalar (em radianos por segundo) do corpo.

A aceleração linear $\vec{a}$ do ponto tem uma componente *tangencial* e uma componente *radial*. A componente tangencial é

$$a_t = \alpha r \quad \text{(ângulo em radianos)}, \tag{10-22}$$

onde α é o módulo da aceleração angular (em radianos por segundo ao quadrado) do corpo. A componente radial de $\vec{a}$ é

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad \text{(ângulo em radianos)}. \tag{10-23}$$

No caso do movimento circular uniforme, o período T do movimento do ponto e do corpo é

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{(ângulo em radianos)}. \tag{10-19, 10-20}$$

Energia Cinética de Rotação e Momento de Inércia A energia cinética K de um corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo é dada por

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{(ângulo em radianos)}, \tag{10-34}$$

onde I é o **momento de inércia** do corpo, definido por

$$I = \sum m_i r_i^2 \tag{10-33}$$

para um sistema de partículas discretas e por

$$I = \int r^2\, dm \tag{10-35}$$

para um corpo com uma distribuição contínua de massa. Nessas expressões, r e r_i representam distâncias perpendiculares ao eixo de rotação.

Teorema dos Eixos Paralelos O *teorema dos eixos paralelos* relaciona o momento de inércia I de um corpo em torno de

qualquer eixo ao momento de inércia do mesmo corpo em torno de um eixo paralelo ao primeiro passando pelo centro de massa:

$$I = I_{CM} + Mh^2. \quad (10\text{-}36)$$

onde h é a distância perpendicular entre os dois eixos.

Torque *Torque* é uma ação de girar ou de torcer um corpo em torno de um eixo de rotação, produzida por uma força $\vec{F}$. Se $\vec{F}$ é exercida em um ponto dado pelo vetor posição $\vec{r}$ em relação ao eixo, o módulo desse torque é

$$\tau = rF_t = r_\perp F = rF \operatorname{sen} \phi \quad (10\text{-}40, 10\text{-}41, 10\text{-}39)$$

onde F_t é a componente de $\vec{F}$ perpendicular a $\vec{r}$ e ϕ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$. A grandeza $r_\perp$ é a distância perpendicular entre o eixo de rotação e a reta que coincide com o vetor $\vec{F}$. Esta reta é chamada de **linha de ação** de $\vec{F}$, e $r_\perp$ é chamada de **braço de alavanca** de $\vec{F}$. Da mesma forma, r é o braço de alavanca de F_t.

A unidade de torque do SI é o newton-metro (N · m). O torque τ é positivo se tende a girar um corpo inicialmente em repouso no sentido anti-horário e negativo se tende a girar o corpo no sentido horário.

Segunda Lei de Newton para Rotações A segunda lei de Newton para rotações é

$$\tau_{res} = I\alpha, \quad (10\text{-}45)$$

onde τ_{res} é o torque resultante que age sobre a partícula ou corpo rígido, I é o momento de inércia da partícula ou do corpo em torno do eixo de rotação e α é a aceleração angular em torno do eixo.

Trabalho e Energia Cinética de Rotação As equações usadas para calcular trabalho e potência para movimentos de rotação são análogas às usadas para movimentos de translação:

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau \, d\theta \quad (10\text{-}53)$$

e

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega. \quad (10\text{-}55)$$

Quando τ é constante, a Eq. 10-53 se reduz a

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i). \quad (10\text{-}54)$$

A forma do teorema do trabalho e energia usada para corpos em rotação é a seguinte:

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 = W. \quad (10\text{-}52)$$

PERGUNTAS

1 A Fig. 10-22 é um gráfico da velocidade angular em função do tempo para um disco que gira como um carrossel. Para um ponto na borda do disco, ordene os instantes a, b, c e d de acordo com o módulo (a) da aceleração tangencial e (b) da aceleração radial, do maior para o menor.

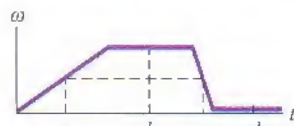


FIG. 10-22 Pergunta 1.

2 A Fig. 10-23b é um gráfico da posição angular do disco da Fig. 10-23a. A velocidade angular do disco é positiva, negativa ou nula em (a) t = 1 s, (b) t = 2 s, e (c) t = 3 s? (d) A aceleração angular é positiva ou negativa?

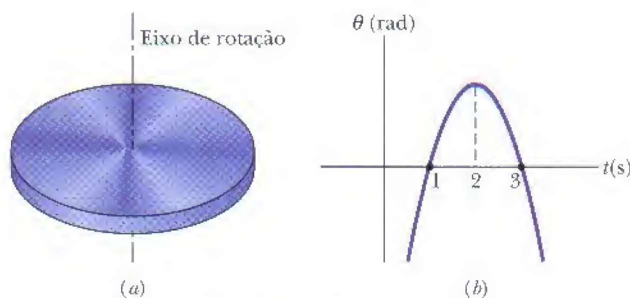


FIG. 10-23 Pergunta 2.

3 A Fig. 10-24 mostra uma placa metálica uniforme que era quadrada antes que 25% de sua área fossem cortados. Três pontos estão indicados por letras. Ordene-os de acordo com o valor do momento de inércia da placa em relação a um eixo perpendicular à placa passando por esses pontos, começando pelo maior.

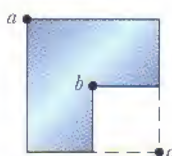


FIG. 10-24 Pergunta 3.

4 A Fig. 10-25 mostra gráficos da posição angular θ em função do tempo t para três casos nos quais um disco gira como um carrossel. Em cada caso, o sentido de rotação muda em uma certa posição angular θ_m. (a) Para cada caso, determine se θ_m corresponde a uma rotação no sentido horário ou anti-horário em relação à posição $\theta = 0$ ou se $\theta_m = 0$. Para cada caso, determine (b) se v é zero antes, depois ou no instante t = 0 e (c) se α é positiva, negativa ou nula.

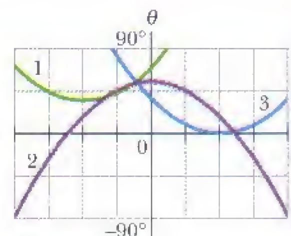


FIG. 10-25 Pergunta 4.

5 A Fig. 10-26a é uma vista superior de uma barra horizontal que pode girar; duas forças horizontais atuam sobre a barra, mas ela está parada. Se o ângulo entre $\vec{F}_2$ e a barra é reduzido a partir de 90°, $\vec{F}_2$ deve aumentar, diminuir ou permanecer a mesma para que a barra continue parada?

6 A Fig. 10-26b mostra uma vista superior de uma barra horizontal que gira em torno de um eixo sob a ação de duas forças horizontais, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, com $\vec{F}_2$ fazendo um ângulo ϕ com a barra. Ordene os seguintes valores de ϕ de acordo com o módulo da aceleração angular da barra, do maior para o menor: 90°, 70° e 110°.

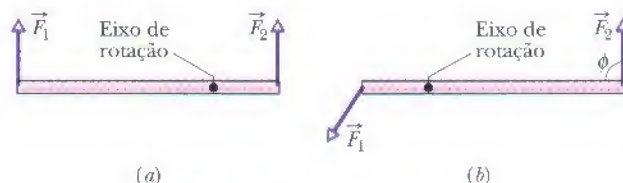


FIG. 10-26 Perguntas 5 e 6.

7 Na Fig. 10-27, duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, agem sobre um disco que gira em torno do centro como um carrossel. As forças mantêm os ângulos indicados durante a rotação, que ocorre no sentido anti-horário e com velocidade angular constante. Precisamos diminuir

o ângulo θ de $\vec{F}_1$ sem mudar o módulo de $\vec{F}_1$. (a) Para manter a velocidade angular constante, devemos aumentar, diminuir ou manter constante o módulo de $\vec{F}_2$? (b) A força $\vec{F}_1$ tende a girar o disco no sentido horário ou anti-horário? (c) E a força $\vec{F}_2$?

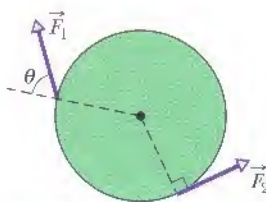


FIG. 10-27 Pergunta 7.

8 Na vista superior da Fig. 10-28, cinco forças de mesmo módulo agem sobre um estranho carrossel; ele é um quadrado que pode girar em torno do ponto P, o ponto médio de um dos lados. Ordene as forças de acordo com os torques que elas produzem em relação ao ponto P, do maior para o menor.

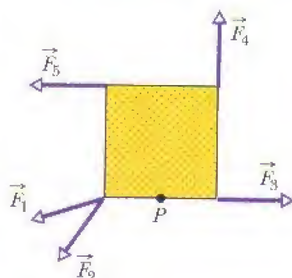


FIG. 10-28 Pergunta 8.

9 Uma força é aplicada à borda de um disco que pode girar como um carrossel, fazendo mudar sua velocidade angular. As velocidades angulares inicial e final, respectivamente, para quatro situações, são as seguintes: (a) −2 rad/s, 5 rad/s; (b) 2 rad/s, 5 rad/s; (c) −2 rad/s, −5 rad/s; e (d) 2 rad/s, −5 rad/s. Ordene as situações de acordo com o trabalho realizado pelo torque aplicado pela força, do maior para o menor.

10 A Fig. 10-29 mostra três discos planos (de raios iguais) que podem girar em torno do centro como carrosséis. Cada disco é composto dos mesmos dois materiais, um mais denso que o outro (ou seja, com uma massa maior por unidade de volume). Nos discos 1 e 3 o material mais denso forma a metade externa da área do disco. No disco 2 ele forma a metade interna da área do disco. Forças de mesmo módulo são aplicadas tangencialmente aos discos, na borda ou na interface dos dois materiais, como na figura. Ordene os discos de acordo (a) com o torque em relação ao centro do disco, (b) o momento de inércia em relação ao centro e (c) a aceleração angular do disco, em ordem decrescente.



FIG. 10-29 Pergunta 10.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

Seção 10-2 As Variáveis da Rotação

•1 Um bom lançador de beisebol pode arremessar uma bola a 85 mi/h com uma rotação de 1800 rev/min. Quantas revoluções a bola realiza até chegar à base principal? Para simplificar, suponha que a trajetória de 60 pés é percorrida em linha reta.

•2 Qual é a velocidade angular (a) do ponteiro dos segundos, (b) do ponteiro dos minutos e (c) do ponteiro das horas de um relógio analógico? Dê as respostas em radianos por segundo.

••3 Um mergulhador realiza 2,5 giros ao saltar de uma plataforma de 10 metros. Supondo que a velocidade vertical inicial seja nula, determine a velocidade angular média do mergulhador.

••4 A posição angular de um ponto da borda de uma roda é dada por $\theta = 4{,}0t - 3{,}0t^2 + t^3$, onde θ está em radianos e t em segundos. Quais são as velocidades angulares em (a) $t = 2{,}0$ s e (b) $t = 4{,}0$ s? (c) Qual é a aceleração angular média no intervalo de tempo que começa em $t = 2{,}0$ s e termina em $t = 4{,}0$ s? Qual é a aceleração angular instantânea (d) no início e (e) no fim desse intervalo?

••5 Quando se deixa cair uma fatia de pão com manteiga de uma mesa, a fatia adquire um movimento de rotação. Se a distância da mesa ao chão é de 76 cm e para rotações menores que 1 revolução, determine (a) a menor e (b) a maior velocidade angular para a qual a fatia cai com a manteiga para baixo.

••6 A posição angular de um ponto em uma roda é dada por $\theta = 2{,}0 + 4{,}0t^2 + 2{,}0t^3$, onde θ está em radianos e t em segundos. Em $t = 0$, quais são (a) a posição angular do ponto e (b) sua velocidade angular? (c) Qual é a velocidade angular em $t = 4{,}0$ s? (d) Calcule a aceleração angular em $t = 2{,}0$ s. (e) A aceleração angular da roda é constante?

•••7 A roda da Fig. 10-30 tem oito raios de 30 cm igualmente espaçados, está montada em um eixo fixo e gira a 2,5 rev/s. Você deseja atirar uma flecha de 20 cm de comprimento paralelamente ao eixo da roda sem atingir um dos raios. Suponha que a flecha e os raios são muito finos. (a) Qual é a menor velocidade que a flecha deve ter? (b) O ponto entre o eixo e a borda da roda por onde a flecha passa faz alguma diferença? Caso a resposta seja afirmativa, para que ponto você deve mirar?

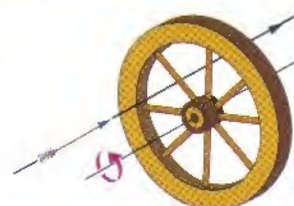


FIG. 10-30 Problema 7.

•••8 A aceleração angular de uma roda é $\alpha = 6{,}0t^4 - 4{,}0t^2$, com α em radianos por segundo ao quadrado e t em segundos. No instante $t = 0$ a roda tem uma velocidade angular de +2,0 rad/s e uma posição angular de +1,0 rad. Escreva expressões (a) para a velocidade angular (em rad/s) e (b) para a posição angular (em rad) em função do tempo (em s).

seção 10-4 Rotação com Aceleração Angular Constante

•9 Um disco, inicialmente girando a 120 rad/s, é freado com uma aceleração angular constante de módulo 4,0 rad/s². (a) Quanto tempo o disco leva para parar? (b) Qual é o ângulo total descrito pelo disco durante esse tempo?

•10 A velocidade angular do motor de um automóvel é aumentada a uma taxa constante de 1200 rev/min para 3000 rev/min em 12 s. (a) Qual é a aceleração angular em revoluções por minuto ao quadrado? (b) Quantas revoluções o motor executa nesse intervalo de 12 s?

•**11** Um tambor gira em torno de seu eixo central com uma velocidade angular de 12,60 rad/s. Se o tambor é freado a uma taxa constante de 4,20 rad/s^2, (a) quanto tempo leva para parar? (b) Qual é o ângulo total descrito pelo tambor até parar?

•**12** Partindo do repouso, um disco gira em torno do seu eixo central com aceleração angular constante. Em 5,0 s ele gira 25 rad. Durante esse tempo, quais são os módulos (a) da aceleração angular e (b) da velocidade angular média? (c) Qual é a velocidade angular instantânea do disco ao final dos 5,0 s? (d) Com a aceleração angular mantida, que ângulo adicional o disco irá descrever nos 5,0 s seguintes?

••**13** Uma roda tem uma aceleração angular constante de 3,0 rad/s^2. Durante um certo intervalo de 4,0 s ela descreve um ângulo de 120 rad. Supondo que a roda partiu do repouso, por quanto tempo ela já estava em movimento no início desse intervalo de 4,0 s?

••**14** Um carrossel gira a partir do repouso com uma aceleração angular de 1,50 rad/s^2. Quanto tempo leva para executar (a) as primeiras 2,00 revoluções e (b) as 2,00 revoluções seguintes?

••**15** Em $t = 0$, uma roda tem uma velocidade angular de 4,7 rad/s, uma aceleração angular constante de $-0{,}25$ rad/s^2 e uma reta de referência em $\theta_0 = 0$. (a) Qual é o maior ângulo $\theta_{máx}$ descrito pela reta de referência no sentido positivo? Quais são (b) o primeiro e (c) o segundo instante no qual a reta de referência passa pelo ângulo $\theta = \theta_{máx}/2$? Em que (d) instante negativo e (e) instante positivo a reta de referência passa pelo ângulo $\theta = -10{,}5$ rad? (f) Faça um gráfico de θ em função de t e indique as respostas dos itens (a) a (e) no gráfico.

••**16** Um disco gira em torno de seu eixo central partindo do repouso com aceleração angular constante. Em um certo instante ele está girando a 10 rev/s; após 60 revoluções, sua velocidade angular é de 15 rev/s. Calcule (a) a aceleração angular, (b) o tempo necessário para completar as 60 revoluções, (c) o tempo necessário para atingir a velocidade angular de 10 rev/s e (d) o número de revoluções desde o repouso até o instante em que o disco atinge a velocidade angular de 10 rev/s.

••**17** Uma roda executa 40 revoluções quando desacelera a partir de uma velocidade angular de 1,5 rad/s até parar. (a) Supondo que a aceleração angular é constante, determine o intervalo de tempo em que isso ocorre. (b) Qual é a aceleração angular da roda? (c) Quanto tempo é necessário para que a roda complete as 20 primeiras revoluções?

seção 10-5 Relacionando as Variáveis Lineares e Angulares

•**18** Um disco de vinil funciona girando em torno de seu eixo de modo que um sulco, aproximadamente circular, desliza sob uma agulha que fica na extremidade de um braço mecânico. Saliências do sulco passam pela agulha e a fazem oscilar. O equipamento converte essas oscilações em sinais elétricos, que são amplificados e transformados em sons. Suponha que um disco de vinil gira a 33 1/3 rev/min, que o sulco que está sendo tocado esteja a uma distância de 10,0 cm do centro do disco e que a distância média entre as saliências do sulco seja 1,75 mm. A que taxa (em toques por segundo) as saliências atingem a agulha?

•**19** Entre 1911 e 1990 o alto da torre inclinada de Pisa, Itália, se deslocou para o sul a uma taxa média de 1,2 mm/ano. A torre tem 55 m de altura. Em radianos por segundo, qual é a velocidade angular média do alto da torre em relação à base?

•**20** Um astronauta está sendo testado em uma centrífuga. A centrífuga tem um raio de 10 m e, ao partir, gira de acordo com a equação $\theta = 0{,}30t^2$, onde t está em segundos e θ em radianos. Quando $t = 5{,}0$ s, quais são os módulos (a) da velocidade angular, (b) da velocidade linear, (c) da aceleração tangencial e (d) da aceleração radial do astronauta?

•**21** Uma roda com um diâmetro de 1,20 m está girando com uma velocidade angular de 200 rev/min. (a) Qual é a velocidade angular da roda em rad/s? (b) Qual é a velocidade linear de um ponto na borda da roda? (c) Que aceleração angular constante (em revoluções por minuto ao quadrado) aumenta a velocidade angular da roda para 1000 rev/min em 60,0 s? (d) Quantas revoluções a roda executa nesses 60,0 s? A velocidade do avião é paralela ao eixo de rotação da hélice.

•**22** Se a hélice de um avião gira a 2000 rev/min quando o avião voa com uma velocidade de 480 km/h em relação ao solo, qual é a velocidade escalar linear de um ponto na ponta da hélice, a 1,5 m de distância do eixo, em relação (a) ao piloto e (b) a um observador no solo? A velocidade do avião é paralela ao eixo de rotação da hélice.

•**23** Quais são os módulos (a) da velocidade angular, (b) da aceleração radial e (c) da aceleração tangencial de uma nave espacial que faz uma curva circular com 3220 km de raio a uma velocidade de 29 000 km/h?

•**24** Um objeto gira em torno de um eixo fixo, e a posição angular de uma reta de referência sobre o objeto é dada por $\theta = 0{,}40e^{2t}$, onde θ está em radianos e t em segundos. Considere um ponto do objeto que está a 4,0 cm do eixo de rotação. Em $t = 0$, quais são os módulos (a) da componente tangencial e (b) da componente radial da aceleração do ponto?

••**25** Um disco, com um raio de 0,25 m, deve girar como um carrossel de um ângulo de 800 rad, partindo do repouso, ganhando velocidade angular a uma taxa constante α_1 nos primeiros 400 rad e em seguida perdendo velocidade angular a uma taxa constante $-\alpha_1$, até ficar novamente em repouso. O módulo da aceleração centrípeta de qualquer parte do disco não deve exceder 400 m/s^2. (a) Qual é o menor tempo necessário para a rotação? (b) Qual é o valor correspondente de α_1?

••**26** Uma roda de um giroscópio com 2,83 cm de raio é acelerada a partir do repouso a 14,2 rad/s^2 até que sua velocidade angular atinja 2760 rev/min. (a) Qual é a aceleração tangencial de um ponto na borda da roda durante este processo de aceleração angular? (b) Qual é a aceleração radial deste ponto quando a roda está girando na velocidade máxima? (c) Qual é a distância percorrida por um ponto da borda da roda durante este processo de aceleração angular?

••**27** Um método tradicional para medir a velocidade da luz utiliza uma roda dentada giratória. Um feixe de luz passa pelo espaço entre dois dentes situados na borda da roda, como na Fig. 10-31, viaja até um espelho distante e chega de volta à roda

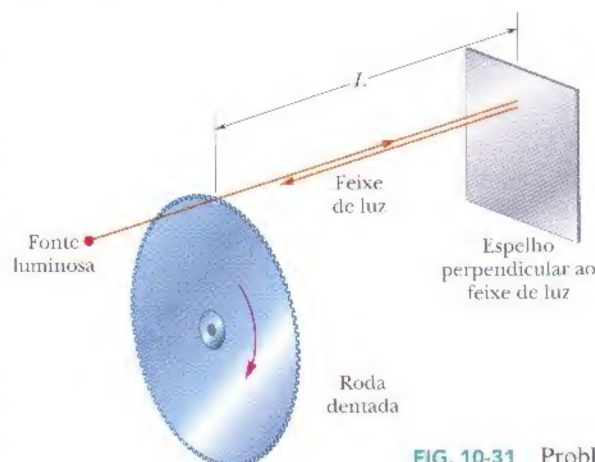


FIG. 10-31 Problema 27.

exatamente a tempo de passar pelo espaço seguinte entre dois dentes. Uma dessas rodas tem 5,0 cm de raio e 500 espaços entre dentes. Medidas realizadas quando o espelho está a uma distância $L = 500$ m da roda fornecem o valor de $3{,}0 \times 10^5$ km/s para a velocidade da luz. (a) Qual é a velocidade angular (constante) da roda? (b) Qual é a velocidade linear de um ponto na borda da roda?

••28 O volante de uma máquina a vapor gira com uma velocidade angular constante de 150 rev/min. Quando a máquina é desligada, o atrito nos mancais e com o ar pára a roda em 2,2 h. (a) Qual é a aceleração angular constante, em revoluções por minuto ao quadrado, da roda durante a desaceleração? (b) Quantas revoluções a roda executa antes de parar? (c) No instante em que a roda está girando a 75 rev/min, qual é a componente tangencial da aceleração linear de uma partícula da roda que está a 50 cm do eixo de rotação? (d) Qual é o módulo da aceleração linear total da partícula do item (c)?

••29 (a) Qual é a velocidade angular ω em torno do eixo polar de um ponto da superfície da Terra na latitude 40° N? (A Terra gira em torno desse eixo.) (b) Qual é a velocidade linear v desse ponto? Quais são (c) ω e (d) v para um ponto no equador?

••30 Na Fig. 10-32 uma roda A de raio $r_A = 10$ cm está acoplada por uma correia B a uma roda C de raio $r_C = 25$ cm. A velocidade angular da roda A é aumentada a partir do repouso a uma taxa constante de 1,6 rad/s². Determine o tempo necessário para que a roda C atinja uma velocidade angular de 100 rev/min, supondo que a correia não desliza. (*Sugestão:* Se a correia não desliza, as velocidades lineares das bordas dos discos são iguais.)

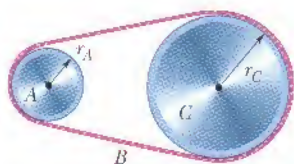


FIG. 10-32 Problema 30.

••31 O prato de um toca-discos está girando a 33 1/3 rev/min. Uma semente de melancia está sobre o prato a 6,0 cm de distância do eixo de rotação. (a) Calcule a aceleração da semente, supondo que ela não escorrega. (b) Qual é o valor mínimo do coeficiente de atrito estático entre a semente e o prato para que a semente não escorregue? (c) Suponha que o prato atinge sua velocidade angular final em 0,25 s, partindo do repouso com aceleração constante. Calcule o menor coeficiente de atrito estático necessário para que a semente não escorregue durante o período de aceleração.

•••32 Um pulsar é uma estrela de nêutrons que gira rapidamente em torno de si própria e emite um feixe de rádio, do mesmo modo como um farol emite um feixe luminoso. Recebemos na Terra um pulso de rádio para cada revolução da estrela. O período T de rotação de um pulsar é determinado medindo o intervalo de tempo entre os pulsos. O pulsar da nebulosa do Caranguejo tem um período de rotação $T = 0{,}033$ s que está aumentando a uma taxa de $1{,}26 \times 10^{-5}$ s/ano. (a) Qual é a aceleração angular α do pulsar? (b) Se α se mantiver constante, daqui a quantos anos o pulsar vai parar de girar? (c) O pulsar foi criado pela explosão de uma supernova observada no ano de 1054. Supondo que a aceleração α se manteve constante, determine o período T logo após a explosão.

seção 10-6 Energia Cinética de Rotação

•33 Calcule o momento de inércia de uma roda que tem uma energia cinética de 24 400 J quando gira a 602 rev/min.

•34 A Fig. 10-33 mostra a velocidade angular em função do tempo para uma barra fina que gira em torno de uma das extremidades. A escala do eixo ω é definida por $\omega_s = 6{,}0$ rad/s. (a) Qual é o módulo da aceleração angular da barra? (b) Em $t = 4{,}0$ s, a barra tem uma energia cinética de 1,60 J. Qual é a energia cinética da barra em $t = 0$?

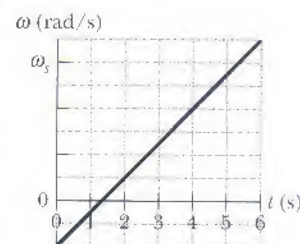


FIG. 10-33 Problema 34.

seção 10-7 Cálculo do Momento de Inércia

•35 Calcule o momento de inércia de uma régua de um metro, com uma massa de 0,56 kg, em relação a um eixo perpendicular à régua na marca de 20 cm. (Trate a régua como uma barra fina.)

•36 A Fig. 10-34 mostra três partículas de 0,0100 kg que foram coladas em uma barra de comprimento $L = 6{,}00$ cm e massa desprezível. O conjunto pode girar em torno de um eixo perpendicular que passa pelo ponto O na extremidade esquerda. Se removermos uma das partículas (ou seja, 33% da massa), de que porcentagem o momento de inércia do conjunto em relação ao eixo de rotação diminui se a partícula removida é (a) a mais interna e (b) a mais externa?

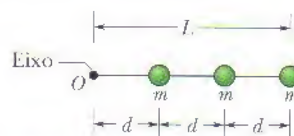


FIG. 10-34 Problemas 36 e 64.

•37 Dois cilindros uniformes, ambos girando em torno do eixo central (longitudinal) com uma velocidade angular de 235 rad/s, têm a mesma massa de 1,25 kg e raios diferentes. Qual é a energia cinética de rotação (a) do cilindro menor, de raio 0,25 m, e (b) do cilindro maior, de raio 0,75 m?

•38 A Fig. 10-35*a* mostra um disco que pode girar em torno de um eixo perpendicular à sua face a uma distância h do centro do disco. A Fig. 10-35*b* mostra o momento de inércia I do disco em relação ao eixo em função da distância h, desde o centro até a borda do disco. A escala do eixo I é definida por $I_A = 0{,}050$ kg · m² e $I_B = 0{,}150$ kg · m². Qual é a massa do disco?

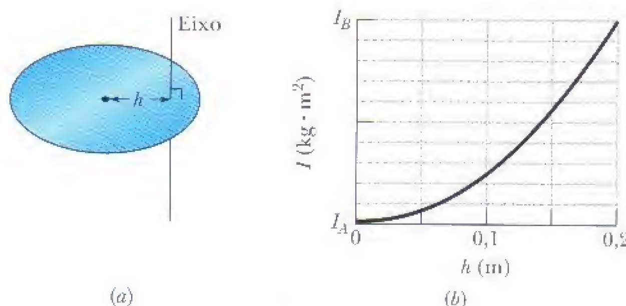


FIG. 10-35 Problema 38.

••39 Na Fig. 10-36, duas partículas, ambas de massa $m = 0{,}85$ kg, estão ligadas uma à outra e a um eixo de rotação em O por duas barras finas, ambas de comprimento $d = 5{,}6$ cm e massa $M = 1{,}2$ kg. O conjunto gira em torno do eixo de rotação com velocidade angular $\omega = 0{,}30$ rad/s. Em relação a O, quais são (a) o

momento de inércia do conjunto e (b) a energia cinética do conjunto?

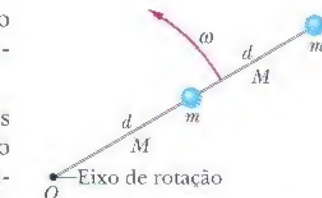


FIG. 10-36 Problema 39.

••40 Quatro partículas iguais de massa 0,50 kg cada uma são colocadas nos vértices de um quadrado de 2,0 m × 2,0 m e mantidas nesta configuração por quatro barras de massa desprezível, que formam os lados do quadrado. Qual é o momento de inércia deste corpo rígido em relação a um eixo que (a) está no plano do quadrado e passa pelos pontos médios de dois lados opostos, (b) passa pelo ponto médio de um dos lados e é perpendicular ao plano do quadrado e (c) está no plano do quadrado e passa por duas partículas diagonalmente opostas?

••41 O bloco uniforme da Fig. 10-37 tem massa de 0,172 kg e lados a = 3,5 cm, b = 8,4 cm e c = 1,4 cm. Calcule o momento de inércia do bloco em relação a um eixo que passa por um canto e é perpendicular às faces maiores.

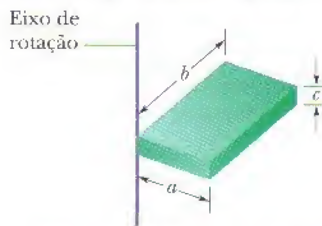


FIG. 10-37 Problema 41.

••42 A Fig. 10-38 mostra um arranjo de 15 discos iguais colados para formar uma barra de comprimento L = 1,0000 m e massa total M = 100,0 mg. O arranjo pode girar em torno de um eixo perpendicular que passa pelo disco central no ponto O. (a) Qual é o momento de inércia do conjunto em relação a esse eixo? (b) Se considerarmos o arranjo como sendo uma barra aproximadamente uniforme de massa M e comprimento L, que erro percentual estaremos cometendo se usarmos a fórmula da Tabela 10-2e para calcular o momento de inércia?

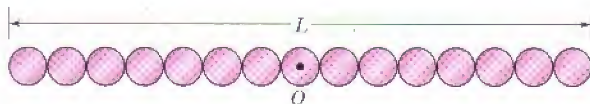


FIG. 10-38 Problema 42.

••43 Alguns caminhões utilizam a energia armazenada em um volante que um motor elétrico acelera até uma velocidade de 200π rad/s. Um desses volantes é um cilindro uniforme com uma massa de 500 kg e um raio de 1,0 m. (a) Qual é a energia cinética do volante quando está girando com a velocidade máxima? (b) Se o caminhão consome uma potência média de 8,0 kW, por quantos minutos pode operar sem que o volante seja novamente carregado?

••44 As massas e coordenadas de quatro partículas são as seguintes: 50 g, x = 2,0 cm, y = 2,0 cm; 25 g, x = 0, y = 4,0 cm; 25 g, x = −3,0 cm, y = −3,0 cm; 30 g, x = −2,0 cm, y = 4,0 cm. Quais são os momentos de inércia desse conjunto em relação aos eixos (a) x, (b) y e (c) z? (d) Suponha que as respostas de (a) e (b) sejam A e B, respectivamente. Nesse caso, qual é a resposta de (c) em termos de A e B?

seção 10-8 Torque

•45 Uma pequena bola de massa 0,75 kg está presa a uma das extremidades de uma barra de 1,25 m de comprimento e massa desprezível. A outra extremidade da barra está pendurada em um eixo. Quando o pêndulo assim formado faz um ângulo de 30° com a vertical, qual é o módulo do torque exercido pela força gravitacional em relação ao eixo?

•46 O comprimento do braço do pedal de uma bicicleta é de 0,152 m, e uma força de 111 N é aplicada ao pedal pelo ciclista. Qual é o módulo do torque em relação ao eixo do braço do pedal quando o braço faz um ângulo de (a) 30°, (b) 90° e (c) 180° com a vertical?

•47 O corpo da Fig. 10-39 pode girar em torno de um eixo perpendicular ao papel passando por O, e duas forças atuam sobre ele, como mostra a figura. Se r_1 = 1,30 m, r_2 = 2,15 m, F_1 = 4,20 N, F_2 = 4,90 N, θ_1 = 75,0° e θ_2 = 60,0°, qual é o torque resultante em relação ao eixo?

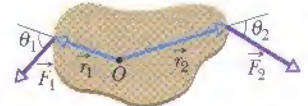


FIG. 10-39 Problema 47.

•48 O corpo da Fig. 10-40 tem um eixo que passa por O e é perpendicular ao papel. Três forças agem sobre ele: F_A = 10 N no ponto A, a 8,0 m de O; F_B = 16 N em B, a 4,0 m de O; e F_C = 19 N em C, a 3,0 m de O. Qual é o torque resultante em relação a O?

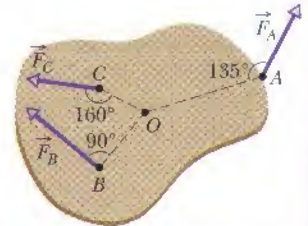


FIG. 10-40 Problema 48.

seção 10-9 A Segunda Lei de Newton para Rotações

•49 Em um salto de trampolim, a velocidade angular de uma mergulhadora em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa varia de zero a 6,20 rad/s em 220 ms. Seu momento de inércia em relação ao mesmo eixo é 12,0 kg · m². Durante o salto, quais são os módulos (a) da aceleração angular média da mergulhadora e (b) do torque externo médio exercido pelo trampolim sobre a mergulhadora?

•50 Se um torque de 32,0 N · m exercido sobre uma roda produz uma aceleração angular de 25,0 rad/s², qual é o momento de inércia da roda?

••51 A Fig. 10-41 mostra um disco uniforme que pode girar em torno do centro como um carrossel. O disco tem um raio de 2,00 cm e uma massa de 20,0 gramas, e está inicialmente em repouso. A partir do instante t = 0, duas forças devem ser aplicadas tangencialmente à borda do disco, como mostra a figura, para que, no instante t = 1,25 s, o disco tenha uma velocidade angular de 250 rad/s no sentido anti-horário. A força $\vec{F}_1$ tem um módulo de 0,100 N. Qual é o módulo de $\vec{F}_2$?

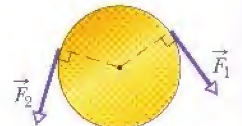


FIG. 10-41 Problema 51.

••52 A Fig. 10-42 mostra as partículas 1 e 2, ambas de massa m, presas às extremidades de uma barra rígida de massa desprezível e comprimento $L_1 + L_2$, com L_1 = 20 cm e L_2 = 80 cm. A barra é mantida horizontalmente no fulcro até ser liberada. Qual é o módulo da aceleração inicial (a) da partícula 1 e (b) da partícula 2?



FIG. 10-42 Problema 52.

••53 Na Fig. 10-43a uma placa de plástico de forma irregular, com espessura e massa específica (massa por unidade de volume) uniformes deve girar em torno de um eixo perpendicular à face da placa passando pelo ponto O. O momento de inércia da placa em torno desse eixo é medido usando o seguinte método: um disco circular de massa

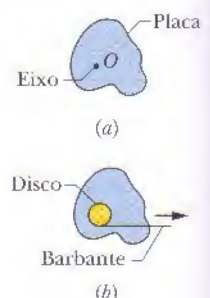


FIG. 10-43 Problema 53.

0,500 kg e raio 2,00 cm é colado na placa, com seu centro coincidindo com O (Fig. 10-43b). Um barbante é enrolado na borda do disco como se ele fosse um pião e puxado durante 5,00 s. Em conseqüência, o disco e a placa são submetidos a uma força constante de 0,400 N, aplicada pelo barbante tangencialmente à borda do disco. A velocidade angular resultante é de 114 rad/s. Qual é o momento de inércia da placa em relação ao eixo?

••54 Na Fig. 10-44 um cilindro com uma massa de 2,0 kg pode girar em torno de seu eixo central, que passa pelo ponto O. As forças mostradas têm os seguinte módulos: $F_1 = 6{,}0$ N, $F_2 = 4{,}0$ N, $F_3 = 2{,}0$ N e $F_4 = 5{,}0$ N. As distâncias radiais são $r = 5{,}0$ cm e $R = 12$ cm. Determine (a) o módulo e (b) a orientação da aceleração angular do cilindro. (Durante a rotação, as forças mantêm seus ângulos em relação ao cilindro.)

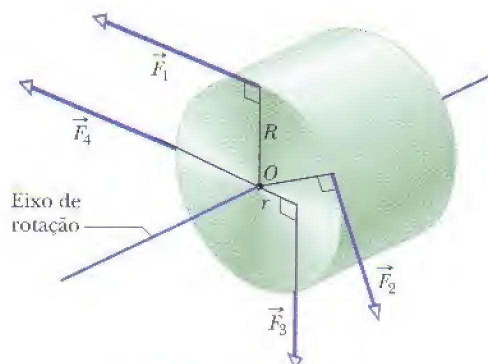


FIG. 10-44 Problema 54.

••55 Na Fig. 10-45 o bloco 1 tem massa $m_1 = 460$ g, o bloco 2 tem massa $m_2 = 500$ g, e a polia, que está montada em um eixo horizontal com atrito desprezível, tem um raio $R = 5{,}00$ cm. Quando o sistema é liberado a partir do repouso o bloco 2 cai 75,0 cm em 5,00 s sem que a corda deslize na borda da polia. (a) Qual é o módulo da aceleração dos blocos? Qual é o valor (b) da tensão T_2 e (c) da tensão T_1? (d) Qual é o módulo da aceleração angular da polia? (e) Qual é o momento de inércia da polia?

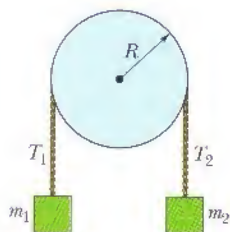


FIG. 10-45 Problemas 55 e 73.

••56 Em uma rasteira, no judô, você tira o apoio do pé esquerdo do adversário ao mesmo tempo em que puxa o quimono dele para este lado sem apoio. Em conseqüência, seu adversário gira em torno do pé direito em direção ao tatame. A Fig. 10-46 mostra um diagrama simplificado do seu adversário, com o pé esquerdo já fora do chão. O eixo de rotação passa pelo ponto O. A força gravitacional $\vec{F}_g$ age sobre o centro de massa do seu adversário, que está a uma distância horizontal $d = 28$ cm do ponto O. Sua massa é de 70 kg e seu momento de inércia em relação ao ponto O é 65 kg · m^2. Qual é o módulo da aceleração angular inicial do seu adversário em relação ao ponto O se o puxão $\vec{F}_a$ que você aplica ao seu quimono (a) é desprezível e (b) é horizontal, com um módulo de 300 N e aplicado a uma altura $h = 1{,}4$ m?

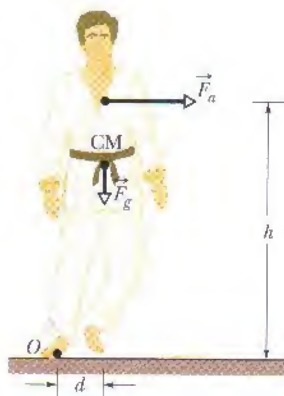


FIG. 10-46 Problema 56.

•••57 Uma polia, com um momento de inércia de $1{,}0 \times 10^{-3}$ kg · m^2 em relação a seu eixo e um raio de 10 cm, é submetida a uma força aplicada tangencialmente a sua borda. O módulo da força varia no tempo de acordo com a equação $F = 0{,}50t + 0{,}30t^2$, com F em newtons e t em segundos. A polia está inicialmente em repouso. Em $t = 3{,}0$ s, quais são (a) sua aceleração angular e (b) sua velocidade angular?

seção 10-10 Trabalho e Energia Cinética de Rotação

•58 Uma barra fina de 0,75 m de comprimento e uma massa de 0,42 kg está suspensa por uma das extremidades. Ela é puxada para o lado e liberada para oscilar como um pêndulo, passando pela posição mais baixa com uma velocidade angular de 4,0 rad/s. Desprezando o atrito e a resistência do ar, determine (a) a energia cinética da barra na posição mais baixa e (b) a altura acima dessa posição que o centro de massa alcança.

•59 Uma roda de 32,0 kg, essencialmente um aro fino com 1,20 m de raio, está girando a 280 rev/min. Ela precisa ser parada em 15,0 s. (a) Qual é o trabalho necessário para fazê-la parar? (b) Qual é a potência média necessária?

•60 (a) Se $R = 12$ cm, $M = 400$ g e $m = 50$ g na Fig. 10-18, determine a velocidade do bloco após ele ter descido 50 cm a partir do repouso. Resolva o problema usando a lei da conservação da energia. (b) Repita o item (a) para $R = 5{,}0$ cm.

•61 O virabrequim de um automóvel transfere energia do motor para o eixo a uma taxa de 100 hp (= 74,6 kW) quando gira a 1800 rev/min. Qual é o torque (em newtons-metros) exercido pelo virabrequim?

••62 Um cilindro uniforme com 10 cm de raio e uma massa de 20 kg está montado de modo a poder girar livremente em torno de um eixo horizontal paralelo ao eixo central longitudinal do cilindro e situado a 5,0 cm deste eixo. (a) Qual é o momento de inércia do cilindro em relação ao eixo de rotação? (b) Se o cilindro é liberado a partir do repouso com o eixo central longitudinal na mesma altura que o eixo em torno do qual pode girar, qual é a velocidade angular do cilindro ao passar pelo ponto mais baixo de sua trajetória?

••63 Uma régua de um metro é mantida verticalmente com uma das extremidades apoiada no solo e depois liberada. Determine a velocidade da outra extremidade pouco antes de tocar o solo, supondo que a extremidade de apoio não escorrega. (*Sugestão:* Considere a régua como uma barra fina e use a lei de conservação da energia.)

••64 Na Fig. 10-34, três partículas de 0,0100 kg foram coladas em uma barra de comprimento $L = 6{,}00$ cm e massa desprezível, que pode girar em torno de um eixo perpendicular que passa pelo ponto O em uma de suas extremidades. Determine o trabalho necessário para mudar a velocidade angular (a) de 0 para 20,0 rad/s, (b) de 20,0 rad/s para 40,0 rad/s e (c) de 40,0 rad/s para 60,0 rad/s. (d) Qual é a inclinação da curva da energia cinética do conjunto (em joules) em função do quadrado da velocidade angular (em radianos quadrados por segundo ao quadrado)?

•••65 A Fig. 10-47 mostra um corpo rígido formado por um aro fino (de massa m e raio $R = 0{,}150$ m) e uma barra fina radial (de massa m e comprimento $L = 2{,}00R$). O conjunto está na vertical, mas se recebe um pequeno empurrão começa a girar em torno de um eixo horizontal no plano do aro e da barra, que passa pela

extremidade inferior da barra. Supondo que a energia fornecida ao sistema pelo pequeno empurrão é desprezível, qual é a velocidade angular do conjunto quando ele passa pela posição invertida (de cabeça para baixo)?

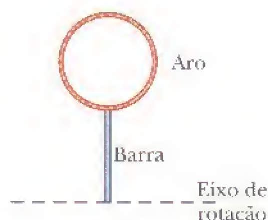


FIG. 10-47 Problema 65.

•••66 Uma casca esférica uniforme de massa $M = 4{,}5$ kg e raio $R = 8{,}5$ cm pode girar em torno de um eixo vertical sem atrito (Fig. 10-48). Uma corda de massa desprezível está enrolada no equador da casca, passa por uma polia de momento de inércia $I = 3{,}0 \times 10^{-3}$ kg · m^2 e raio $r = 5{,}0$ cm e está presa a um pequeno objeto de massa $m = 0{,}60$ kg. Não há atrito no eixo da polia e a corda não escorrega na casca nem na polia. Qual é a velocidade do objeto depois de cair 82 cm após ter sido liberado a partir do repouso? Use considerações de energia.

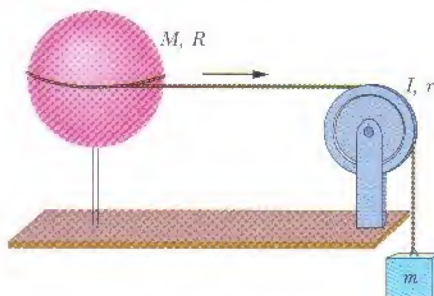


FIG. 10-48 Problema 66.

•••67 Uma chaminé cilíndrica cai quando sua base sofre uma ruptura. Trate a chaminé como uma barra fina com 55,0 m de comprimento. No instante em que a chaminé faz um ângulo de 35,0° com a vertical durante a queda, quais são (a) a aceleração radial do topo e (b) a aceleração tangencial do topo? (*Sugestão:* Use considerações de energia e não de torque.) (c) Para que ângulo θ a aceleração tangencial é igual a g?

Problemas Adicionais

68 George Washington Gale Ferris, Jr., um engenheiro civil formado pelo Instituto Politécnico Rensselaer, construiu a primeira roda-gigante para a Exposição Mundial Colombiana de 1893, em Chicago. A roda, uma impressionante obra de engenharia para a época, movimentava 36 cabinas de madeira, cada uma com capacidade para 60 passageiros, ao longo de uma circunferência de 76 m de diâmetro. Seis cabinas eram carregadas de cada vez, e quando as 36 cabinas estavam ocupadas a roda executava uma revolução completa, com velocidade angular constante, em cerca de 2 min. Estime o trabalho necessário para a máquina fazer girar apenas os passageiros.

69 Na Fig. 10-49, dois blocos de 6,20 kg estão ligados por uma corda de massa desprezível que passa por uma polia de 2,40 cm de raio e momento de inércia $7{,}40 \times 10^{-4}$ kg · m^2. A corda não escorrega na polia; não se sabe se existe atrito entre a mesa e o bloco que escorrega; não há atrito no eixo da polia. Quando este sistema é liberado a partir do repouso, a polia gira de 1,30 rad em 91,0 ms e a aceleração dos blocos é constante. Determine (a) o módulo da aceleração angular da polia, (b) o módulo da aceleração de cada bloco, (c) a tensão T_1 da corda e (d) a tensão T_2 da corda.

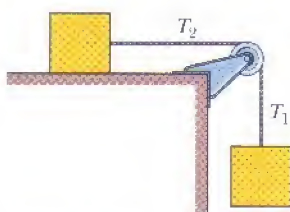


FIG. 10-49 Problema 69.

70 A Fig. 10-50 mostra um objeto plano formado por dois anéis circulares que têm um centro comum e são mantidos fixos por três barras de massa desprezível. O objeto, que está inicialmente em repouso, pode girar (como um carrossel) em torno do centro comum, onde se encontra outra barra de massa desprezível. As massas, raios internos e raios externos dos anéis aparecem na tabela a seguir. Uma força tangencial de módulo 12,0 N é aplicada à borda externa do anel externo por 0,300 s. Qual é a variação na velocidade angular do objeto neste intervalo de tempo?

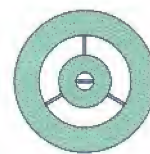


FIG. 10-50 Problema 70.

Anel	Massa (kg)	Raio Interno (m)	Raio Externo (m)
1	0,120	0,0160	0,0450
2	0,240	0,0900	0,1400

71 Na Fig. 10-51, um pequeno disco de raio $r = 2{,}00$ cm foi colado na borda de um disco maior de raio $R = 4{,}00$ cm, de modo que os discos estão no mesmo plano. Os discos podem girar em torno de um eixo perpendicular que passa pelo ponto O, situado no centro do disco maior. Os discos têm uma massa específica (massa por unidade de volume) uniforme de $1{,}40 \times 10^3$ kg/m^3 e uma espessura, também uniforme, de 5,00 mm. Qual é o momento de inércia do conjunto dos dois discos em relação ao eixo de rotação que passa por O?

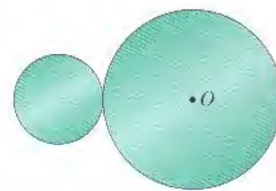


FIG. 10-51 Problema 71.

72 Às 7 h 14 min de 30 de junho de 1908 uma enorme explosão aconteceu na atmosfera sobre a Sibéria Central, na latitude 61° N e longitude 102° E; a bola de fogo criada por essa explosão foi o objeto mais brilhante visto na Terra antes das armas nucleares. O chamado *Evento de Tunguska*, que de acordo com uma testemunha "cobriu uma parte enorme do céu", foi provavelmente a explosão de um *asteróide rochoso* de aproximadamente 140 m de largura. (a) Considerando apenas a rotação da Terra, determine quanto tempo depois o asteróide deveria ter chegado à Terra para explodir acima de Helsinque, na longitude 25° E, destruindo totalmente a cidade. (b) Se o asteróide fosse *metálico*, poderia ter chegado à superfície da Terra. Quanto tempo depois o asteróide deveria ter chegado à Terra para que o choque ocorresse no oceano Atlântico, na longitude 20° W? (O tsunami resultante teria destruído cidades costeiras dos dois lados do Atlântico.)

73 Na Fig. 10-45, dois blocos, de massas $m_1 = 400$ g e $m_2 = 600$ g, estão ligadas por uma corda de massa desprezível que está enrolada na borda de um disco uniforme de massa $M = 500$ g e raio $R = 12{,}0$ cm. O disco pode girar sem atrito em torno de um eixo horizontal que passa pelo seu centro; a corda não desliza na borda do disco. O sistema é liberado a partir do repouso. Determine (a) o módulo da aceleração dos blocos, (b) a tensão T_1 da corda da esquerda e (c) a tensão T_2 da corda da direita.

74 Nas duas extremidades de uma fina barra de aço com 1,20 m de comprimento e 6,40 kg de massa existem pequenas bolas de massa 1,06 kg. A barra pode girar em um plano horizontal em torno de um eixo vertical que passa pelo seu ponto médio. Em

um certo instante ela está girando a 39,0 rev/s. Devido ao atrito ela desacelera até parar, 32,0 s depois. Supondo que o torque produzido pelo atrito é constante, calcule (a) a aceleração angular, (b) o torque produzido pelo atrito, (c) a energia transformada de energia mecânica em energia térmica pelo atrito e (d) o número de revoluções executadas pela barra até parar. (e) Suponha que o torque produzido pelo atrito não é constante. Se alguma das grandezas calculadas nos itens (a), (b), (c) e (d) ainda puder ser calculada sem qualquer informação adicional, forneça o seu valor.

75 Uma pá do rotor de um helicóptero tem 7,80 m de comprimento, uma massa de 110 kg e está presa ao eixo do rotor por um único parafuso. (a) Qual é o módulo da força exercida pelo eixo sobre o parafuso quando o rotor está girando a 320 rev/min? (*Sugestão:* Para este cálculo, a pá pode ser considerada uma massa pontual no centro de massa. Por quê?) (b) Calcule o torque que deve ser aplicado ao rotor para que ele atinja essa velocidade angular, a partir do repouso, em 6,70 s. Ignore a resistência do ar. (A lâmina não pode ser considerada uma massa pontual para este cálculo. Por quê? Suponha que a distribuição de massa é a de uma barra fina uniforme.) (c) Qual é o trabalho realizado pelo torque sobre a pá para que ela atinja a velocidade angular de 320 rev/min?

76 Uma roda, partindo do repouso, gira com uma aceleração angular constante de 2,00 rad/s^2. Durante um certo intervalo de 3,00 s ela descreve um ângulo de 90,0 rad. (a) Qual era a velocidade angular da roda no início do intervalo de 3,00 s? (b) Por quanto tempo a roda girou antes do início do intervalo de 3,00 s?

77 Uma bola de golfe é lançada com um ângulo de 20° em relação à horizontal, uma velocidade de 60 m/s e uma velocidade angular de 90 rad/s. Desprezando a resistência do ar, determine o número de revoluções que a bola executa até o instante em que atinge a altura máxima.

78 Duas esferas uniformes maciças têm a mesma massa de 1,65 kg, mas uma tem um raio de 0,226 m e a outra um raio de 0,854 m. Ambas podem girar em torno de um eixo que passa pelo centro. (a) Qual é o módulo τ do torque necessário para levar a esfera menor do repouso a uma velocidade angular de 317 rad/s em 15,5 s? (b) Qual é o módulo F da força que deve ser aplicada tangencialmente ao equador da esfera para produzir esse torque? Quais são os valores correspondentes de (c) τ e (d) F para a esfera maior?

79 A barra fina e uniforme na Fig. 10-52 tem 2,0 m de comprimento e pode girar, sem atrito, em torno de um pino horizontal que passa por uma das extremidades. Ela é liberada a partir do repouso quando faz um ângulo θ = 40° acima da horizontal. Use a lei de conservação da energia para determinar a velocidade angular da barra ao passar pela posição horizontal.

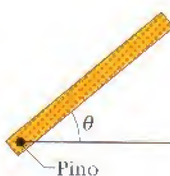


FIG. 10-52 Problema 79.

80 O volante de um motor está girando a 25,0 rad/s. Quando o motor é desligado o volante desacelera a uma taxa constante e pára em 20,0 s. Calcule (a) a aceleração angular do volante, (b) o ângulo descrito pelo volante até parar e (c) o número de revoluções realizadas pelo volante até parar.

81 Uma pequena bola com uma massa de 1,30 kg está montada em uma das extremidades de uma barra de 0,780 m de comprimento e massa desprezível. O sistema gira em um círculo horizontal em torno da outra extremidade da barra a 5010 rev/min. (a) Calcule o momento de inércia do sistema em relação ao eixo de rotação. (b) Existe uma força de arrasto de 2,30 × 10^{-2} N agindo sobre a bola, no sentido oposto ao de seu movimento. Que torque deve ser aplicado ao sistema para mantê-lo em rotação com velocidade constante?

82 Partindo do repouso em t = 0, uma roda gira com aceleração angular constante. Quando t = 2,0 s, a velocidade angular da roda é de 5,0 rad/s. A aceleração continua até t = 20 s, quando cessa abruptamente. De que ângulo gira a roda no intervalo de t = 0 a t = 40 s?

83 Um equilibrista procura manter sempre o seu centro de massa acima do arame (ou corda). Para isso, ele carrega muitas vezes uma vara comprida. Quando se inclina, digamos, para a direita (deslocando o centro de massa para a direita) e corre o risco de rodar em torno do arame, desloca a vara para a esquerda (deslocando o centro de massa para a esquerda) para diminuir a velocidade de rotação e ter tempo de recuperar o equilíbrio. Suponha que o equilibrista tem uma massa de 70,0 kg e um momento de inércia de 15,0 kg · m^2 em relação ao arame. Qual é o módulo da aceleração angular em relação ao arame se o seu centro de massa está 5,0 cm à direita do arame e (a) ele não carrega uma vara e (b) a vara de 14,0 kg que carrega é deslocada de tal forma que seu centro de massa fica 10 cm à esquerda do arame?

84 *Corrida de discos.* A Fig. 10-53 mostra dois discos que podem girar em torno do centro como carrosséis. No instante t = 0 as retas de referência dos dois discos têm a mesma orientação. O disco A já está em girando com uma velocidade angular constante de 9,5 rad/s. O disco B parte do repouso com uma aceleração angular constante de 2,2 rad/s^2. (a) Em que instante t as duas retas de referência têm o mesmo deslocamento angular θ? (b) Este é o primeiro instante t, desde t = 0, no qual as duas retas de referência estão alinhadas?

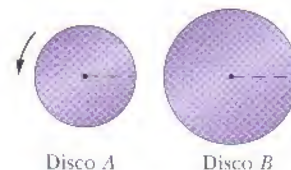


FIG. 10-53 Problema 84.

85 Um ciclista de 70 kg apóia toda a sua massa em cada movimento do pedal para baixo enquanto pedala em uma estrada íngreme. Suponha que o diâmetro da circunferência descrita pelo pedal é de 0,40 m e determine o módulo do torque máximo exercido pelo ciclista em relação ao eixo de rotação dos pedais.

86 Um disco gira, com aceleração angular constante, da posição angular θ_1 = 10,0 rad até a posição angular θ_2 = 70,0 rad em 6,00 s. A velocidade angular em θ_2 é de 15,0 rad/s. (a) Qual era a velocidade angular em θ_1? (b) Qual é a aceleração angular? (c) Em que posição angular o disco estava inicialmente em repouso? (d) Plote θ em função de t e a velocidade angular ω do disco em função de t, a partir do início do movimento (t = 0).

87 Uma roda de 0,20 m de raio está montada em um eixo horizontal sem atrito. O momento de inércia da roda em relação ao eixo é 0,050 kg · m^2. Uma corda de massa desprezível está enrolada na roda e presa a um bloco de 2,0 kg que escorrega em uma superfície horizontal sem atrito. Se uma força horizontal de módulo P = 3,0 N é aplicada ao bloco, como mostra a Fig. 10-54, qual é o módulo da aceleração angular da roda? Suponha que a corda não desliza em relação à roda.

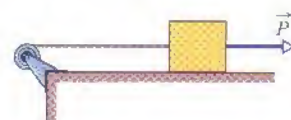


FIG. 10-54 Problema 87.

88 Nosso Sol está a 2,3 × 10^4 anos-luz do centro da Via Láctea e descreve uma circunferência em torno desse centro a uma ve-

locidade de 250 km/s. (a) Quanto tempo leva para o Sol executar uma revolução em torno do centro da galáxia? (b) Quantas revoluções o Sol completou desde que se formou, há cerca de $4{,}5 \times 10^9$ anos?

89 Um prato de toca-discos, que está girando a 33 1/3 rev/min, diminui gradualmente de velocidade e pára 30 s depois que o motor é desligado. (a) Determine a aceleração angular do prato (suposta constante) em revoluções por minuto ao quadrado. (b) Quantas revoluções o prato executa até parar?

90 Um corpo rígido é formado por três barras finas de comprimento L = 0,600 m, unidas na forma de uma letra **H** (Fig. 10-55). O corpo pode girar livremente em torno de um eixo horizontal que coincide com uma das pernas do **H**. O corpo é liberado a partir do repouso em uma posição na qual o plano do **H** está na horizontal. Qual é a velocidade angular do corpo quando o plano do **H** está na vertical?

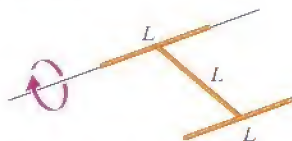


FIG. 10-55 Problema 90.

91 (a) Mostre que o momento de inércia de um cilindro maciço de massa M e raio R em relação ao eixo central é igual ao momento de inércia de um aro fino de massa M e raio $R/\sqrt{2}$ em relação ao eixo central. (b) Mostre que o momento de inércia I de um corpo qualquer de massa M em relação a qualquer eixo é igual ao momento de inércia de um *aro equivalente* em torno do mesmo eixo, se o aro tiver a mesma massa M e um raio k dado por

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}}.$$

O raio k do aro equivalente é chamado de *raio de giração* do corpo.

92 Uma casca esférica fina tem um raio de 1,90 m. Um torque aplicado de 960 N · m produz na casca uma aceleração angular de 6,20 rad/s² em relação a um eixo que passa pelo seu centro. Quais são (a) o momento de inércia da casca em relação a esse eixo e (b) a massa da casca?

93 Na Fig. 10-56 uma roda de 0,20 m de raio é montada em um eixo horizontal sem atrito. Uma corda de massa desprezível é enrolada na roda e presa a uma caixa de 2,0 kg que escorrega sobre a superfície sem atrito com uma inclinação $\theta = 20°$ em relação à horizontal. A caixa escorrega para baixo com uma aceleração de 2,0 m/s². Qual é o momento de inércia da roda em relação ao eixo?

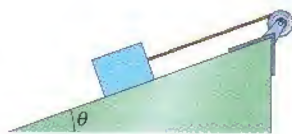


FIG. 10-56 Problema 93.

94 Até hoje se discute de que forma os pesados lintéis (blocos horizontais de pedra) foram colocados sobre blocos verticais em Stonehenge. Um possível método foi testado em uma pequena cidade tcheca. Um bloco de concreto com uma massa de 5124 kg foi puxado para cima ao longo de duas vigas de carvalho cujas superfícies superiores tinham sido descascadas e lubrificadas com gordura (Fig. 10-57). As vigas tinham 10 m de comprimento e iam do chão até o alto de um dos blocos verticais que serviriam de apoio para o bloco a ser levantado. Os blocos verticais tinham 3,9 m de altura; o coeficiente de atrito estático entre o bloco e as vigas era 0,22. O bloco foi puxado por cordas enroladas no bloco, que passavam pela extremidade superior de duas toras de abeto de 4,5 m de comprimento. Uma plataforma foi instalada na extremidade oposta de cada tora. Quando um número suficiente de operários subia na plataforma, a tora correspondente girava em torno de um apoio no alto da pedra vertical em que se apoiava e puxava uma extremidade do bloco por uma pequena distância ao longo da viga. Para cada tora, a corda que envolvia o bloco era aproximadamente perpendicular à tora; a distância entre o ponto de apoio e o ponto em que a corda estava amarrada na tora era de 0,70 m. Supondo que cada operário tinha uma massa de 85 kg, determine o menor número de operários que deviam se posicionar sobre as duas plataformas para que o bloco começasse a se mover para cima ao longo das traves. (Na realidade, metade deste número de operários poderia deslocar o bloco, movendo primeiro uma das extremidades e depois a outra.)

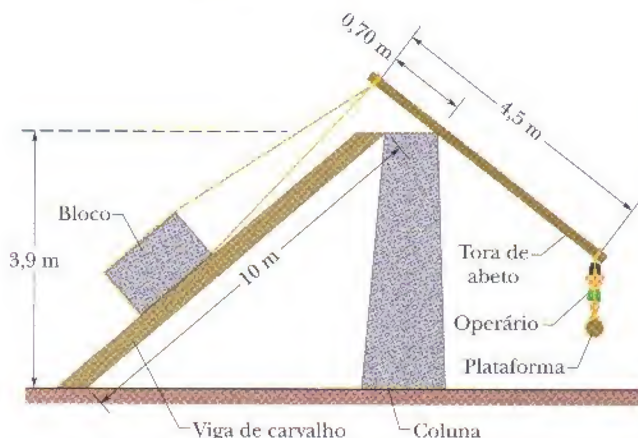


FIG. 10-57 Problema 94.

95 A Fig. 10-58 mostra uma pá de hélice que gira a 2000 rev/min em torno de um eixo perpendicular que passa pelo ponto B. O ponto A está na extremidade externa da pá, a uma distância radial de 1,50 m. (a) Qual é a diferença entre os módulos da aceleração centrípeta a do ponto A e de um ponto situado a 0,150 m do eixo? (b) Determine a inclinação do gráfico de a em função da distância radial ao longo da pá.



FIG. 10-58 Problema 95.

96 Um mecanismo em forma de ioiô, montado em um eixo horizontal sem atrito, é usado para levantar uma caixa de 30 kg, como mostra a Fig. 10-59. O raio externo R da roda é 0,50 m e o raio r do cubo da roda é 0,20 m. Quando uma força horizontal $\vec{F}$ constante de módulo igual a 140 N é aplicada a uma corda enrolada na roda a caixa, que está pendurada por uma corda enrolada no cubo, tem uma aceleração para cima de módulo igual a 0,80 m/s². Qual é o momento de inércia do mecanismo em relação ao eixo de rotação?

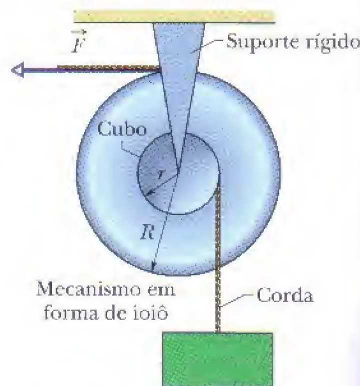


FIG. 10-59 Problema 96.

97 O corpo rígido mostrado na Fig. 10-60 é formado por três partículas ligadas por barras de massa desprezível. Ele gira em torno de um eixo perpendicular ao seu plano passando pelo

ponto P. Se $M = 0{,}40$ kg, $a = 30$ cm e $b = 50$ cm, qual é o trabalho necessário para levar o corpo do repouso até a velocidade angular de 5,0 rad/s?

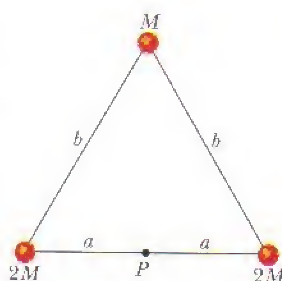


FIG. 10-60 Problema 97.

98 *Engenharia de embalagens.* A tampa com um anel de puxar foi um grande avanço na engenharia das latas de bebida. O anel gira em torno de um pino central situado na tampa da lata. Quando um dos lados do anel é puxado para cima, o outro lado empurra para baixo uma parte da tampa que foi riscada. Se você puxa para cima com uma força de 10 N, qual é, aproximadamente, o módulo da força aplicada à parte riscada da tampa? (Você terá que examinar uma lata desse tipo para resolver o problema.)

99 Existem relatos de guepardos correndo à velocidade impressionante de 114 km/h, feitos por observadores que dirigiam ao lado desses animais. Imagine o que é tentar medir a velocidade de um guepardo mantendo seu veículo emparelhado com o animal e ao mesmo tempo olhando de relance para um velocímetro que registra 114 km/h. Você conserva o veículo a uma distância constante de 8,0 m do guepardo, mas o barulho do motor faz com que o guepardo se afaste continuamente ao longo de uma trajetória circular com 92 m de raio. Assim, você é forçado a seguir uma trajetória circular com 100 m de raio. (a) Qual é a velocidade angular (sua e do guepardo) ao longo das trajetórias circulares? (b) Qual é a velocidade linear do guepardo? (Se você não levasse em consideração o movimento circular, concluiria erroneamente que a velocidade do guepardo era 114 km/h. Aparentemente, este tipo de erro foi cometido nos relatos publicados.)

100 Um ponto na borda de um rebolo com 0,75 m de diâmetro muda de velocidade, a uma taxa constante, de 12 m/s para 25 m/s em 6,2 s. Qual é a aceleração angular média do rebolo?

101 Na Fig. 10-61, uma barra fina e uniforme (com 4,0 m de comprimento e uma massa de 3,0 kg) gira livremente em torno de um eixo horizontal A que é perpendicular à barra e passa por um ponto situado a uma distância $d = 1{,}0$ m da extremidade da barra. A energia cinética da barra ao passar pela posição vertical é 20 J. (a) Qual é o momento de inércia da barra em relação ao eixo A? (b) Qual é a velocidade (linear) da extremidade B da barra ao passar pela posição vertical? (c) Em que ângulo θ a barra pára momentaneamente?

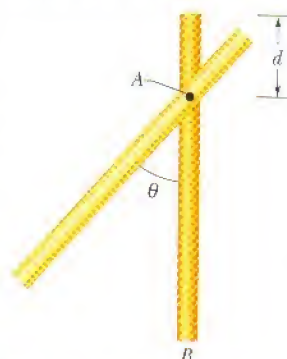


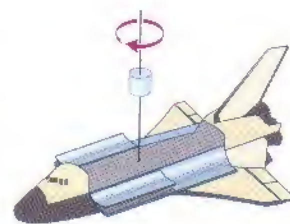
FIG. 10-61 Problema 101.

102 Um carro parte do repouso e se move ao longo de uma pista circular com 30,0 m de raio. Sua velocidade aumenta a uma taxa constante de 0,500 m/s². (a) Qual é o módulo de sua aceleração linear *média* 15,0 s mais tarde? (b) Que ângulo o vetor aceleração média faz com a velocidade do carro nesse instante?

103 Uma polia com 8,0 cm de diâmetro tem uma corda de 5,6 m de comprimento enrolada na borda. Partindo do repouso, a roldana recebe uma aceleração angular constante de 1,5 rad/s². (a) Que ângulo a roldana deve descrever para que a corda desenrole totalmente? (b) Quanto tempo isso leva para acontecer?

104 Um volante que gira em torno do eixo central está perdendo velocidade por causa do atrito com o eixo. Após o primeiro minuto de desaceleração sua velocidade angular é 0,900 vez a velocidade angular inicial de 250 rev/min. Supondo que a aceleração angular é constante, determine a velocidade angular após o segundo minuto.

105 A Fig. 10-62 mostra um satélite de comunicações, que é um cilindro maciço de 1210 kg com 1,21 m de diâmetro e 1,75 m de comprimento. Antes do lançamento a partir do compartimento de carga do ônibus espacial, o satélite é posto para girar a 1,52 rev/s em torno do eixo longitudinal. Quais são (a) seu momento de inércia em relação ao eixo de rotação e (b) sua energia cinética de rotação?


FIG. 10-62 Problema 105.

106 Um disco de vinil gira a 33 1/3 rev/min no prato de um toca-discos. (a) Qual é a sua velocidade angular em radianos por segundo? Qual é a velocidade linear em um ponto do disco (b) a 15 cm e (c) a 7,4 cm do centro do disco?

107 Qual é a velocidade angular de um carro que faz uma curva circular com 110 m de raio a 50 km/h?

108 Calcule (a) o torque, (b) a energia e (c) a potência média necessária para acelerar a Terra em 1 dia desde o repouso até sua velocidade angular atual em relação ao eixo de rotação.

109 A molécula de oxigênio (O_2) tem uma massa de $5{,}30 \times 10^{-26}$ kg e um momento de inércia de $1{,}94 \times 10^{-46}$ kg · m² em relação a um eixo que passa pelo ponto médio da reta que liga os dois átomos e é perpendicular a essa reta. Suponha que o centro de massa de uma molécula de O_2 em um gás tenha uma velocidade de translação de 500 m/s e que a molécula tenha uma energia cinética de rotação igual a 2/3 da energia cinética de translação do centro de massa. Qual é, nesse caso, a velocidade angular da molécula em relação ao centro de massa?

110 O corpo rígido da Fig. 10-63 é formado por três bolas e três barras de ligação, com $M = 1{,}6$ kg, $L = 0{,}60$ m e $\theta = 30°$. As bolas podem ser tratadas como partículas e as barras têm massa desprezível. Determine a energia cinética de rotação do corpo se sua velocidade angular é de 1,2 rad/s em relação (a) a um eixo que passa pelo ponto P e é perpendicular ao plano do papel, e (b) a um eixo que passa pelo ponto P, é perpendicular à barra de comprimento $2L$ e está no plano do papel.

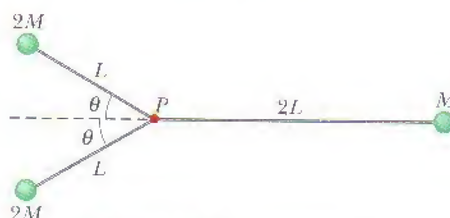


FIG. 10-63 Problema 110.

111 Na Fig. 10-64, quatro polias estão ligadas por duas correias. A polia A (de 15 cm de raio) é a polia motriz e gira a 10 rad/s. A polia B (de 10 cm de raio) está ligada à polia A pela correia 1. A polia B' (de 5 cm de raio) é concêntrica com a polia B e está rigidamente ligada a ela. A polia C (de 25 cm de raio) está ligada à polia B' pela correia 2. Calcule (a) a velocidade linear de um ponto da correia 1, (b) a velocidade angular da polia B, (c) a ve-

locidade angular da polia B', (d) a velocidade linear de um ponto da correia 2 e (e) a velocidade angular da polia C. (*Sugestão:* Se a correia entre duas polias não desliza, as velocidades lineares nas bordas das duas polias são iguais.)

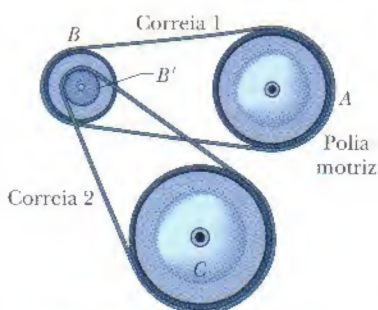


FIG. 10-64 Problema 111.

112 Quatro partículas, todas de massa 0,20 kg, ocupam os vértices de um quadrado com 0,50 m de lado. As partículas estão ligadas por barras de massa desprezível. Este corpo rígido pode girar em um plano vertical em torno de um eixo horizontal A que passa por uma das partículas. O corpo é liberado a partir do repouso com a barra AB na horizontal, como mostra a Fig. 10-65. (a) Qual é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo A? (b) Qual é a velocidade angular do corpo em relação ao eixo A no instante em que a barra AB passa pela posição vertical?



FIG. 10-65 Problema 112.

113 O prato de um toca-discos tem uma velocidade angular de 8,0 rad/s no instante em que o aparelho é desligado. Três segundos depois o prato tem uma velocidade angular de 2,6 rad/s. De quantos radianos o prato gira desde o instante em que o aparelho é desligado até o instante em que pára? (Suponha que α é constante.)

114 Duas barras finas (ambas de massa 0,20 kg) estão unidas para formar um corpo rígido, como mostra a Fig. 10-66. Uma das barras tem comprimento L_1 = 0,40 m e a outra tem comprimento L_2 = 0,50 m. Qual é o momento de inércia desse corpo rígido em relação (a) a um eixo perpendicular ao plano do papel passando pelo centro da barra menor e (b) um eixo perpendicular ao plano do papel passando pelo centro da barra maior?

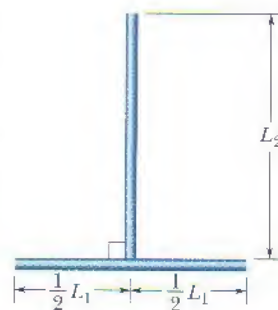


FIG. 10-66 Problema 114.

115 Na Fig. 10-18*a*, uma roda com 0,20 m de raio está montada em um eixo horizontal sem atrito. O momento de inércia da roda em relação ao é 0,40 kg · m^2. Uma corda de massa desprezível, enrolada na borda da roda, está presa a uma caixa de 6,0 kg. O sistema é liberado a partir do repouso. Quando a caixa tem uma energia cinética de 6,0 J, quais são (a) a energia cinética de rotação da roda e (b) a distância que a caixa percorreu?

116 Três partículas de 0,50 kg formam um triângulo eqüilátero de 0,60 m de lado. As partículas estão ligadas por barras de massa desprezível. Qual é o momento de inércia desse corpo rígido em relação (a) a um eixo que passa por uma das partículas e é paralelo à barra que liga as outras duas, (b) um eixo que passa pelo ponto médio de um dos lados e é perpendicular ao plano do triângulo e (c) um eixo que é paralelo a um dos lados do triângulo e passa pelos pontos médios dos outros dois lados?

Rolamento, Torque e Momento Angular



O balé tem vários tipos de saltos, mas o tour jeté é sem dúvida o mais bonito. Neste salto, depois de pular verticalmente o bailarino começa a girar, como se estivesse sendo impulsionado por uma mão invisível. Depois de meia volta, a rotação desaparece e o bailarino volta a pousar os pés no chão. Mesmo que os espectadores não conheçam as leis de Newton sabem que a rotação não pode simplesmente aparecer e desaparecer de um corpo em pleno ar; assim, o que vêem parece mágica.

Como se explica a mágica da rotação de um bailarino em pleno ar em um tour jeté?

A resposta está neste capítulo.



FIG. 11-1 O Segway. *(Justin Sullivan/Getty Images News and Sport Services)*

11-1 O QUE É FÍSICA?

Como vimos no Capítulo 10, um dos objetivos da física é o estudo das rotações. Entre as aplicações desse estudo a mais importante é talvez a análise do rolamento de rodas e de objetos que se comportam como rodas. Esta aplicação da física vem sendo usada há muito tempo. Assim, por exemplo, quando os habitantes pré-históricos da ilha da Páscoa moveram gigantescas estátuas de pedra de uma pedreira para outros lugares da ilha eles as arrastaram sobre toras, que funcionaram como roletes. Mais tarde, quando os americanos colonizaram o oeste no século XIX transportaram seus pertences primeiro em carroças e depois em vagões de trem. Hoje em dia, gostemos ou não, o mundo está repleto de carros, caminhões, motocicletas, bicicletas e outros veículos sobre rodas.

A física e a engenharia do transporte sobre rodas são tão antigas que alguém poderia pensar que nada há de novo para ser criado. Entretanto, as pranchas de *skate* e os patins *in-line* foram inventados e lançados recentemente no mercado e se tornaram um grande sucesso. Um tipo moderno de carrinho de rolimã, conhecido como *street luge*, entrou na moda nos Estados Unidos, e veículos individuais como o Segway (Fig. 11-1) podem mudar a forma como as pessoas se movimentam nas grandes cidades. As aplicações da física do rolamento ainda podem reservar muitas surpresas e recompensas. Nosso ponto de partida para estudar essa parte da física será simplificar o movimento de rolamento.

11-2 | O Rolamento como uma Combinação de Translação e Rotação



FIG. 11-2 Fotografia de longa exposição de um disco rolando. Pequenas lâmpadas foram presas ao disco, uma no centro e outra na borda. A segunda descreve uma curva chamada ciclóide. *(Richard Megna/Fundamental Photographs)*

No momento, vamos considerar apenas objetos que *rolam suavemente* em uma superfície, ou seja, objetos rolam sem escorregar ou quicar na superfície. A Fig. 11-2 mostra como o movimento de rolamento suave pode ser complicado: embora o centro do objeto se mova em uma linha reta paralela à superfície, um ponto da borda certamente não o faz. Entretanto, podemos estudar esse movimento tratando-o como uma combinação de translação do centro de massa e rotação do resto do objeto em torno do centro de massa.

Para compreender como isso é possível, imagine que você está parado em uma calçada observando a roda de bicicleta da Fig. 11-3 passar na rua. Como mostra a figura, você vê o centro de massa O da roda se mover com velocidade constante v_{CM}. O ponto P em que a roda faz contato com o piso também se move para a frente com velocidade v_{CM}, de modo que P permanece sempre diretamente abaixo de O.

Durante um intervalo de tempo t você observa os pontos O e P se deslocarem de uma distância s. O ciclista vê a roda girar de um ângulo θ em torno do eixo da roda, com o ponto da roda que estava tocando a rua no início do intervalo descrevendo um arco de comprimento s. A Eq. 10-17 relaciona o comprimento do arco s ao ângulo de rotação θ:

$$s = \theta R, \quad (11\text{-}1)$$

onde R é o raio da roda. A velocidade linear v_{CM} do centro da roda (o centro de massa desta roda uniforme) é ds/dt. A velocidade angular ω da roda é $d\theta/dt$. Derivando a Eq. 11-1 em relação a tempo (com R constante), obtemos

$$v_{CM} = \omega R \qquad \text{(rolamento suave).} \quad (11\text{-}2)$$

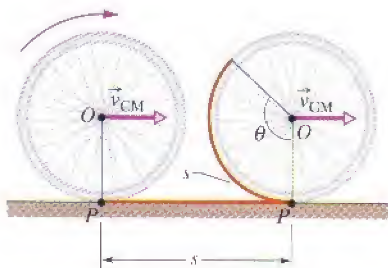


FIG. 11-3 O centro de massa O de uma roda percorre uma distância s com velocidade $\vec{v}_{CM}$ enquanto a roda gira de um ângulo θ. O ponto P de contato entre a roda e a superfície na qual está rolando também percorre uma distância s.

A Fig. 11-4 mostra que o movimento de rolamento de uma roda é uma combinação de um movimento puro de translação com um movimento puro de rotação. A Fig. 11-4*a* mostra o movimento puro de rotação (como se o eixo de rotação estivesse estacionário): todos os pontos da roda giram em torno do centro com velocidade angular ω. (Este é o tipo de movimento que discutimos no Capítulo 10.) Todos os pontos na periferia da roda têm uma velocidade linear v_{CM} dada pela Eq. 11-2. A Fig.

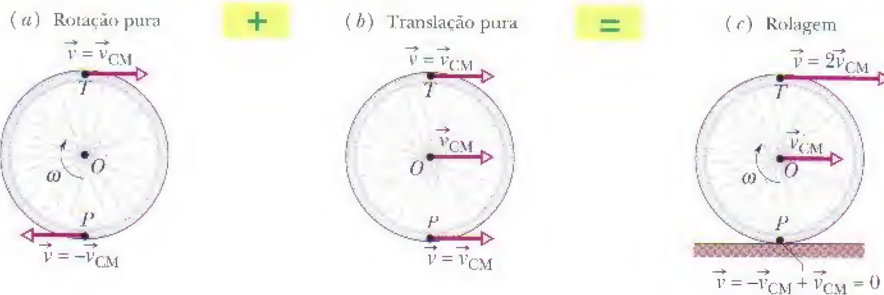


FIG. 11-4 Movimento de rolamento de uma roda como uma combinação de um movimento de rotação pura e um movimento de translação pura. (*a*) Movimento de rotação pura: todos os pontos da roda se movem com a mesma velocidade angular ω. Todos os pontos da borda da roda se movem com a mesma velocidade linear $v = v_{CM}$. São mostradas as velocidades lineares $\vec{v}$ de dois desses pontos, na borda de cima (T) e na borda de baixo (P) da roda. (*b*) Movimento de translação pura: todos os pontos da roda se movem para a direita com a mesma velocidade linear $\vec{v}_{CM}$. (*c*) O movimento de rolamento da roda é uma combinação de (*a*) com (*b*).

11-4*b* mostra o movimento puro de translação (como se a roda não estivesse rodando): Todos os pontos da roda se movem para a direita com uma velocidade escalar v_{CM}.

A combinação dos movimentos representados nas Figs. 11-4*a* e 11-4*b* é o rolamento da roda, representado na Fig. 11-4*c*. Observe que nesta combinação de movimentos a velocidade escalar da extremidade inferior da roda (ponto P) é zero e a velocidade escalar da extremidade superior (ponto T) é $2v_{CM}$, maior que em qualquer outro ponto da roda. Esses resultados são confirmados na Fig. 11-5, que é uma fotografia de longa exposição de uma roda de bicicleta em movimento. Pode-se ver que a roda está se movendo mais depressa perto da extremidade superior do que perto da extremidade inferior, porque os raios da roda estão mais difusos na parte de cima do que na parte de baixo.

O movimento de qualquer corpo redondo rolando suavemente em uma superfície pode ser separado em movimentos puros de rotação e translação, como nas Figs. 11-4*a* e 11-4*b*.

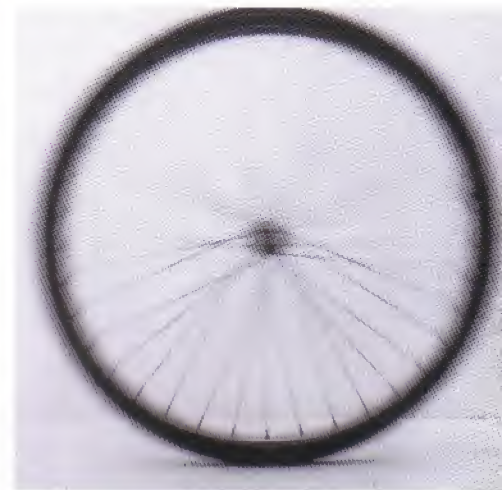


FIG. 11-5 Fotografia de uma roda de bicicleta em movimento. Os raios de cima estão menos nítidos que os raios de baixo porque estão se movendo mais depressa, como mostra a Fig. 11-4*c*. *(Cortesia de Alice Halliday)*

Rolamento como uma Rotação Pura

A Fig. 11-6 sugere outra forma de descrever o movimento de rolamento de uma roda: como uma rotação pura em torno de um eixo que sempre passa pelo ponto de contato entre a roda e a superfície sobre a qual a roda está rolando. Consideramos o movimento de rolamento como uma rotação pura em torno de um eixo passando pelo ponto P na Fig. 11-4*c* e perpendicular ao plano do papel. Os vetores da Fig. 11-6 mostram as velocidades instantâneas dos pontos da roda.

Pergunta: Que velocidade angular em torno deste novo eixo um observador estacionário atribuiria a uma roda de bicicleta?
Resposta: A mesma velocidade angular ω que o ciclista atribui à roda quando a observa em movimento de rotação pura em torno de um eixo passando pelo centro de massa.

Para mostrar que esta resposta está correta, vamos usá-la para calcular a velocidade linear da extremidade superior da roda, do ponto de vista de um observador estacionário. Chamando de R o raio da roda, a extremidade superior está a uma distância $2R$ do eixo que passa pelo ponto P na Fig. 11-6, de modo que, de acordo com a Eq. 11-2, a velocidade linear da extremidade superior é

$$v_{sup} = (\omega)(2R) = (\omega R) = 2v_{CM},$$

em perfeita concordância com a Fig. 11-4*c*. O leitor pode verificar que a concordância também é observada para os pontos O e P da Fig. 11-4*c*.

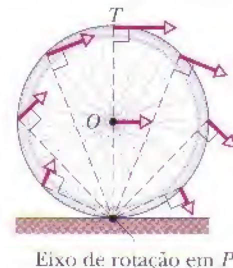


FIG. 11-6 O rolamento pode ser visto como uma rotação pura, com velocidade angular ω, em torno de um eixo que sempre passa por P. Os vetores mostram as velocidades lineares instantâneas de pontos escolhidos da roda. Esses vetores podem ser obtidos combinando os movimentos de translação e rotação, como na Fig. 11-4.

TESTE 1 A roda traseira da bicicleta de um palhaço tem um raio duas vezes maior que a roda dianteira. (a) Quando a bicicleta está se movendo a velocidade linear da extremidade superior da roda traseira é maior, menor ou igual à velocidade linear da extremidade superior da roda dianteira? (b) A velocidade angular da roda traseira é maior, menor ou igual à velocidade angular da roda dianteira?

11-3 | A Energia Cinética de Rolamento

Vamos agora calcular a energia cinética de uma roda em rolamento do ponto de vista de um observador estacionário. Quando encaramos o rolamento como uma rotação pura em torno de um eixo que passa pelo ponto P da Fig. 11-6, a Eq. 10-34 nos dá

$$K = \tfrac{1}{2} I_P \omega^2, \quad (11\text{-}3)$$

onde ω é a velocidade angular da roda e I_P é o momento de inércia da roda em relação a um eixo passando por P. De acordo com o teorema dos eixos paralelos da Eq. 10-36 ($I = I_{CM} + Mh^2$), temos:

$$I_P = I_{CM} + MR^2, \quad (11\text{-}4)$$

onde M é a massa da roda, I_{CM} é o momento de inércia da roda em relação a um eixo passando pelo centro de massa e R (o raio da roda) é a distância perpendicular h. Substituindo a Eq. 11-4 na Eq. 11-3, obtemos

$$K = \tfrac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \tfrac{1}{2} MR^2 \omega^2,$$

e usando a relação $v_{CM} = \omega R$ (Eq. 11-2), temos

$$K = \tfrac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \tfrac{1}{2} M v_{CM}^2. \quad (11\text{-}5)$$

Podemos interpretar o termo $\tfrac{1}{2} I_{CM} \omega^2$ como sendo a energia cinética associada à rotação da roda em torno de um eixo que passa pelo centro de massa (Fig. 11-4*a*) e o termo $\tfrac{1}{2} M v_{CM}^2$ como sendo a energia cinética associada ao movimento de translação do centro de massa da roda (Fig. 11-4*b*). Assim, temos a seguinte regra:

Um objeto em rolamento possui dois tipos de energia cinética: uma energia cinética de rotação ($\tfrac{1}{2} I_{CM} \omega^2$) associada à rotação em torno do centro de massa e uma energia cinética de translação ($\tfrac{1}{2} M v_{CM}^2$) associada à translação do centro de massa.

Exemplo 11-1

O recorde atual de velocidade em terra foi estabelecido em 1997, no deserto de Black Rock, no estado americano de Nevada, pelo carro a jato *Thrust SSC*. A velocidade atingida pelo carro foi de 1222 km/h em um sentido e 1233 km/h no sentido oposto. As duas velocidades ultrapassaram a velocidade do som no local (1207 km/h).

Quebrar o recorde de velocidade em terra era obviamente muito perigoso, por várias razões. Uma delas tinha a ver com as rodas do carro. Aproxime cada uma das rodas do *Thrust SSC* por um disco de espessura uniforme e massa M = 170 kg e suponha que o rolamento é suave. Quando a velocidade do carro era de 1233 km/h, qual era a energia cinética de cada roda?

IDÉIAS-CHAVE A Eq. 11-5 permite calcular a energia cinética de um objeto em rolamento, mas precisamos de três idéias para usá-la:

1. Quando falamos na velocidade de um objeto que rola, sempre estamos nos referindo à velocidade do centro de massa; assim, neste caso v_{CM} = 1233 km/h = 342,5 m/s.
2. Para usar a Eq. 11-5, precisamos conhecer a velocidade angular ω do objeto que está rolando, que podemos relacionar a v_{CM} através da Eq. 11-2, escrevendo $\omega = v_{CM}/R$, onde R é o raio da roda.
3. Para aplicar a Eq. 11-5, precisamos conhecer também o momento de inércia I_{CM} do objeto em relação a um eixo passando pelo centro de massa. De acordo com a Tabela 10-2*c*, para um disco uniforme $I_{CM} = \tfrac{1}{2} MR^2$.

Cálculos: De acordo com a Eq. 11-5, temos:

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \tfrac{1}{2} M v_{CM}^2 \\ &= (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2} MR^2)(v_{CM}/R)^2 + \tfrac{1}{2} M v_{CM}^2 = \tfrac{3}{4} M v_{CM}^2 \\ &= \tfrac{3}{4}(170\ \text{kg})(342{,}5\ \text{m/s})^2 \\ &= 1{,}50 \times 10^7\ \text{J} \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

(Observe que o resultado não depende do raio R da roda.)

Esta resposta dá uma idéia do perigo que o piloto correu ao estabelecer o recorde de velocidade terrestre no *Thrust SSC*: a energia cinética de cada roda (feita de alumínio) era enorme, quase igual à energia cinética ($2{,}1 \times 10^7$ J) do disco de aço que explodiu no Exemplo 10-8. Se a roda encontrasse um obstáculo resistente no caminho teria explodido como o disco de aço, com o carro e o piloto se movendo mais depressa que o som!

11-4 | As Forças do Rolamento

Atrito e Rolamento

Se uma roda rola com velocidade constante, como na Fig. 11-3, ela não tende a deslizar no ponto de contato P e, portanto, não está sujeita a uma força de atrito. Entretanto, se uma força age sobre a roda para aumentar ou diminuir sua velocidade essa força produz uma aceleração $\vec{a}_{CM}$ do centro de massa na direção do movimento. Ela faz também com que a roda gire mais depressa ou mais devagar, o que significa que ela causa uma aceleração angular α. Esta aceleração tende a fazer a roda deslizar no ponto P. Assim, uma força de atrito deve agir sobre a roda em P para se opor a essa tendência.

Se a roda *não desliza*, a força é uma força de atrito *estático* $\vec{f}_s$ e o movimento é de rolamento suave. Nesse caso, podemos relacionar o módulo da aceleração linear $\vec{a}_{CM}$ à aceleração angular α derivando a Eq. 11-2 em relação ao tempo (com R constante). No lado esquerdo, dv_{CM}/dt é igual a a_{CM}; no lado direito, $d\omega/dt$ é igual a α. Assim, no caso de um rolamento suave, temos:

$$a_{CM} = \alpha R \qquad \text{(rolamento suave).} \tag{11-6}$$

Se a roda *desliza* quando a força age sobre ela, a força de atrito que atua sobre o ponto P da roda na Fig. 11-3 é uma força de atrito cinético $\vec{f}_k$. Nesse caso, o movimento não é de rolamento suave, e a Eq. 11-6 não se aplica. Neste capítulo vamos discutir apenas movimentos de rolamento suave.

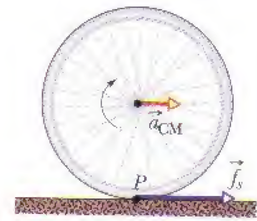


FIG. 11-7 Uma roda rola horizontalmente sem deslizar enquanto acelera com uma aceleração linear $\vec{a}_{CM}$. Uma força de atrito estático $\vec{f}_s$ age sobre a roda em P, impedindo o deslizamento.

A Fig. 11-7 mostra um exemplo no qual uma roda está sendo acelerada enquanto rola para a direita ao longo de uma superfície plana, como acontece com a roda de uma bicicleta no início de uma corrida. O aumento da velocidade de rotação tende a fazer a parte inferior da roda deslizar para a esquerda no ponto P. Uma força de atrito em P, dirigida para a direita, se opõe à tendência de deslizamento. Se a roda não desliza, a força de atrito é uma força de atrito estático $\vec{f}_s$ (como na Fig. 11-7), o movimento é de rolamento suave e a Eq. 11-6 pode ser empregada. (Sem atrito, as corridas de bicicleta seriam estacionárias e muito enfadonhas.)

Se a velocidade de rotação da roda na Fig. 11-7 estivesse diminuindo, como no caso de uma bicicleta sendo freada, a figura teria que sofrer duas modificações: os sentidos da aceleração do centro de massa $\vec{a}_{CM}$ e da força de atrito $\vec{f}_s$ no ponto P passariam a ser para a esquerda.

Rolando para Baixo em uma Rampa

A Fig. 11-8 mostra um corpo redondo uniforme, de massa M e raio R, rolando suavemente para baixo ao longo de um eixo x em uma rampa inclinada de ângulo θ. Queremos obter uma expressão para a aceleração do corpo $a_{CM,x}$ ao longo da rampa. Para isso, usamos as versões linear ($F_{res} = Ma$) e angular ($\tau_{res} = I\alpha$) da segunda lei de Newton.

Para começar, desenhamos as forças que agem sobre o corpo, como mostra a Fig. 11-8:

1. A força gravitacional $\vec{F}_g$ que atua sobre o corpo está dirigida para baixo. A origem desse vetor é colocada no centro de massa do corpo. A componente ao longo da rampa é F_g sen θ, que é igual a Mg sen θ.
2. A força normal $\vec{F}_N$ é perpendicular à rampa. Ela atua no ponto de contato P, mas na Fig. 11-8 o vetor foi deslocado ao longo de sua direção até que sua origem ficasse no centro de massa do corpo.
3. A força de atrito estático $\vec{f}_s$ atua no ponto de contato P e está dirigida para cima ao longo da rampa. (Você percebe por quê? Caso o corpo deslizasse no ponto P ele deslizaria *para baixo* ao longo da rampa. Assim, a força de atrito que se opõe a esse deslizamento deve estar dirigida *para cima* ao longo da rampa.)

Podemos escrever a segunda lei de Newton para as componentes ao longo do eixo x da Fig. 11-8 ($F_{res,x} = Ma_x$) como

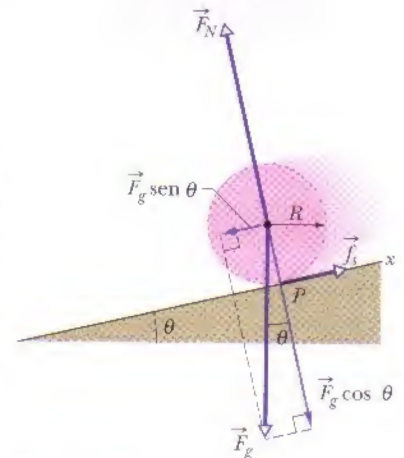


FIG. 11-8 Um corpo redondo uniforme de raio R rola para baixo em uma rampa. As forças que agem sobre ele são a força gravitacional $\vec{F}_g$, a força normal $\vec{F}_N$ e a força de atrito $\vec{f}_s$, que aponta para cima ao longo da rampa. (Para maior clareza, o vetor $\vec{F}_N$ foi deslocado ao longo de sua linha de ação até sua origem coincidir com o centro do corpo.)

$$f_s - Mg \operatorname{sen} \theta = Ma_{CM,x}. \quad (11\text{-}7)$$

Esta equação contém duas incógnitas, f_s e $a_{CM,x}$. (Não *podemos* supor que valor de f_s corresponde ao seu valor máximo, $f_{s,máx}$. Tudo que sabemos é que o valor de f_s é suficiente para que o corpo role suavemente para baixo na rampa, sem deslizar.)

Agora podemos usar a forma angular da segunda lei de Newton para descrever a rotação do corpo em torno de um eixo horizontal passando pelo o centro de massa. Para começar, usamos a Eq. 10-41 ($\tau = r_\perp F$) para escrever os torques sobre o corpo em relação a esse eixo. A força de atrito $\vec{f}_s$ possui braço de alavanca R e, portanto, produz um torque Rf_e, o que é positivo, já que tende a fazer o corpo girar no sentido anti-horário na Fig. 11-8. As forças $\vec{F}_g$ e $\vec{F}_N$ possuem braços de alavanca nulos em relação ao centro de massa e, portanto, produzem torques nulos. Assim, podemos escrever a forma angular da segunda lei de Newton ($\tau_{res} = I\alpha$) em relação a um eixo horizontal passando pelo centro de massa como

$$Rf_s = I_{CM}\alpha. \quad (11\text{-}8)$$

Esta equação contém duas incógnitas, f_s e α.

Como o corpo está rolando suavemente, podemos usar a Eq. 11-6 ($a_{CM} = \alpha R$) para relacionar as incógnitas $a_{CM,x}$ e α. Entretanto, devemos ter cuidado, pois neste caso $a_{CM,x}$ é negativa (no sentido negativo do eixo x) e α é positiva (no sentido anti-horário). Assim, devemos fazer $\alpha = -a_{CM,x}/R$ na Eq. 11-8. Explicitando f_s, obtemos

$$f_s = -I_{CM}\frac{a_{CM,x}}{R^2}. \quad (11\text{-}9)$$

Substituindo f_s na Eq. 11-7 pelo lado direito da Eq. 11-9, temos:

$$a_{CM,x} = -\frac{g \operatorname{sen} \theta}{1 + I_{CM}/MR^2}. \quad (11\text{-}10)$$

Podemos usar esta equação para determinar a aceleração linear $a_{CM,x}$ de qualquer corpo que role suavemente em um plano inclinado que faz um ângulo θ com a horizontal.



TESTE 2 Os discos A e B são iguais e rolam em um piso com a mesma velocidade. O disco A sobe uma rampa e atinge uma altura máxima h; o disco B sobe uma outra rampa igual à primeira, mas sem atrito. A altura máxima atingida pelo disco B é maior, menor ou igual a h?

Exemplo 11-2 Aumente sua capacidade

Uma bola uniforme, de massa M = 6,00 kg e raio R, rola suavemente, a partir do repouso, descendo uma rampa inclinada de ângulo θ = 30,0° (Fig. 11-8).

(a) A bola desce uma distância vertical h = 1,20 m para chegar à base da rampa. Qual é a sua velocidade ao chegar à base da rampa?

IDÉIAS-CHAVE A energia mecânica E do sistema bola-Terra é conservada quando a bola rola rampa abaixo. Isso acontece porque a única força que realiza trabalho sobre a bola é a força gravitacional, que é uma força conservativa. A força normal exercida pela rampa sobre a bola não realiza trabalho porque é perpendicular à trajetória da bola. A força de atrito exercida pela rampa sobre a bola não transforma energia em energia térmica porque a bola não desliza (ela *rola suavemente*).

Assim, podemos escrever a lei de conservação da energia mecânica ($E_f = E_i$) na forma

$$K_f + U_f = K_i + U_i, \quad (11\text{-}11)$$

onde os índices f e i se referem aos valores final (na base da rampa) e inicial (no alto da rampa), respectivamente. A energia potencial gravitacional é, inicialmente, $U_i = Mgh$ (onde M é a massa da bola). Na situação final, $U_f = 0$. A energia cinética é, inicialmente, $K_i = 0$. Para calcular a energia cinética final K_f precisamos de uma idéia adicional: como a bola rola, a energia cinética envolve translação *e* rotação, de modo que devemos incluir as duas formas de energia cinética usando o lado direito da Eq. 11-5.

Cálculos: Substituindo todas essas expressões na Eq. 11-11, obtemos

$$\left(\tfrac{1}{2} I_{\mathrm{CM}}\omega^2 + \tfrac{1}{2} M v_{\mathrm{CM}}^2\right) + 0 = 0 + Mgh, \qquad (11\text{-}12)$$

onde I_{CM} é o momento de inércia da bola em relação a um eixo que passa pelo centro de massa, v_{CM} é a velocidade pedida na base da rampa e ω é a velocidade angular na base da rampa.

Como a bola rola suavemente, podemos usar a Eq. 11-2 para substituir ω por v_{CM}/R e reduzir o número de incógnitas da Eq. 11-12. Fazendo isso, substituindo I_{CM} por $\frac{2}{5}MR^2$ (de acordo com a Tabela 10-2*f*) e explicitando v_{CM}, obtemos

$$v_{\mathrm{CM}} = \sqrt{\left(\tfrac{10}{7}\right)gh} = \sqrt{\left(\tfrac{10}{7}\right)(9{,}8\ \mathrm{m/s^2})(1{,}20\ \mathrm{m})}$$

$$= 4{,}10\ \mathrm{m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Note que a resposta não depende de M nem de R.

(b) Quais são o módulo e a orientação da força de atrito que age sobre a bola quando ela desce a rampa rolando?

IDÉIA-CHAVE Como a bola rola suavemente, a força de atrito que age sobre a bola é dada pela Eq. 11-9.

Cálculos: Para usar a Eq. 11-9 precisamos conhecer a aceleração da bola, $a_{\mathrm{CM},x}$, que pode ser calculada usando a Eq. 11-10:

$$a_{\mathrm{CM},x} = -\frac{g \operatorname{sen}\theta}{1 + I_{\mathrm{CM}}/MR^2} = -\frac{g \operatorname{sen}\theta}{1 + \frac{2}{5}MR^2/MR^2}$$

$$= -\frac{(9{,}8\ \mathrm{m/s^2}) \operatorname{sen} 30{,}0^\circ}{1 + \frac{2}{5}} = -3{,}50\ \mathrm{m/s^2}.$$

Note que não precisamos conhecer nem a massa M nem do raio R da bola para calcular $a_{\mathrm{CM},x}$. Isso significa que uma bola de qualquer tamanho e de qualquer massa (contanto que seja uniforme) terá a mesma aceleração para baixo em uma rampa com uma inclinação de 30,0°, desde que role suavemente.

Podemos agora resolver a Eq. 11-9 para obter o valor do módulo da força de atrito:

$$f_s = -I_{\mathrm{CM}}\frac{a_{\mathrm{CM},x}}{R^2} = -\tfrac{2}{5}MR^2\frac{a_{\mathrm{CM},x}}{R^2} = -\tfrac{2}{5}Ma_{\mathrm{CM},x}$$

$$= -\tfrac{2}{5}(6{,}00\ \mathrm{kg})(-3{,}50\ \mathrm{m/s^2}) = 8{,}40\ \mathrm{N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Note que precisamos da massa M, mas não do raio R; assim, a força de atrito exercida sobre qualquer bola de 6,00 kg que rolar suavemente em uma rampa de 30,0° será 8,40 N, independentemente do raio da bola.

11-5 | O Ioiô

O ioiô é um laboratório de física que cabe no bolso. Se um ioiô desce rolando uma distância h ao longo da corda perde uma quantidade de energia potencial igual a mgh, mas ganha energia cinética tanto na forma de translação ($\frac{1}{2}Mv_{\mathrm{CM}}^2$) como na de rotação ($\frac{1}{2}I_{\mathrm{CM}}\omega^2$). Quando volta a subir, perde energia cinética e readquire energia potencial.

Nos ioiôs modernos a corda não está presa no eixo, mas forma uma laçada em torno do eixo. Quando o ioiô "bate" na extremidade inferior da corda uma força dirigida para cima, exercida pela corda sobre o eixo, interrompe a descida. O ioiô passa a girar, com o eixo enlaçado pela corda, apenas com energia cinética rotacional. O ioiô se mantém girando ("adormecido") até ser "despertado" por um puxão na corda, que faz a corda se enrolar no eixo e, conseqüentemente, o ioiô voltar a subir. A energia cinética rotacional do ioiô na extremidade inferior da corda (e portanto o tempo de "sono") pode ser consideravelmente aumentada arremessando o ioiô para baixo para que ele comece a descer a corda com velocidades iniciais v_{CM} e ω, em vez de rolar para baixo a partir do repouso.

Para encontrar uma expressão para a aceleração linear a_{CM} de um ioiô rolando para baixo em uma corda, podemos usar a segunda lei de Newton, como fizemos para o corpo rolando para baixo na rampa da Fig. 11-8. A análise é a mesma, exceto pelo seguinte:

1. Em vez de descer rolando uma rampa que faz um ângulo θ com a horizontal, o ioiô desce uma corda que faz um ângulo $\theta = 90°$ com a horizontal.
2. Em vez de rolar sobre a superfície externa de raio R, o ioiô rola em torno de um eixo de raio R_0 (Fig. 11-9*a*).
3. Em vez de ser freado pela força de atrito $\vec{f}_s$, o ioiô é freado pela força $\vec{T}$ que a corda exerce sobre ele (Fig. 11-9*b*).

A análise do movimento nos levaria novamente à Eq. 11-10. Assim, vamos apenas mudar a notação da Eq. 11-10 e fazer $\theta = 90°$ para escrever a aceleração linear como

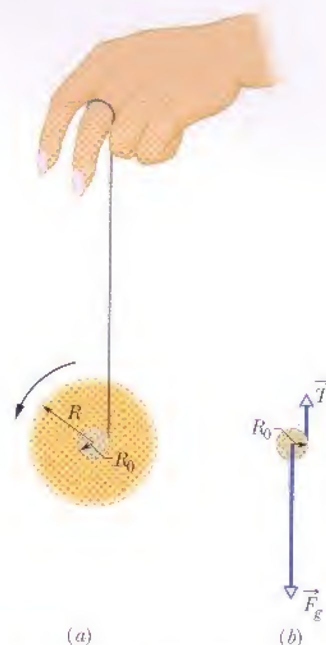


FIG. 11-9 (*a*) Um ioiô visto de lado. A corda, considerada de espessura desprezível, está enrolada em um eixo de raio R_0. (*b*) Diagrama de corpo livre do ioiô descendo. Apenas o eixo é mostrado.

$$a_{CM} = -\frac{g}{1 + I_{CM}/MR_0^2}, \tag{11-13}$$

onde I_{CM} é o momento de inércia do ioiô em relação a um eixo passando pelo centro e M é sua massa. Um ioiô possui a mesma aceleração para baixo quando está subindo de volta.

11-6 | Revisão do Torque

No Capítulo 10 definimos o torque τ de um corpo rígido capaz de girar em torno de um eixo fixo, com todas as partículas do corpo sendo forçadas a se mover em trajetórias circulares com centro nesse eixo. Agora, vamos ampliar a definição de torque para aplicá-la a uma partícula que se move em uma trajetória qualquer em relação a um *ponto* fixo (em vez de um eixo fixo). A trajetória não precisa mais ser circular, e devemos escrever o torque como um vetor $\vec{\tau}$ que pode ter qualquer orientação.

A Fig. 11-10*a* mostra uma dessas partículas no ponto A de um plano xy. Uma única força $\vec{F}$ nesse plano age sobre a partícula, e a posição da partícula em relação à origem O é dada pelo vetor posição $\vec{r}$. O torque $\vec{\tau}$ que age sobre a partícula em relação ao ponto fixo O é uma grandeza vetorial definida por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{(definição de torque).} \tag{11-14}$$

Podemos calcular o produto vetorial envolvido nesta definição de $\vec{\tau}$ usando as regras do produto vetorial que aparecem na Seção 3-8. Para determinar a orientação de $\vec{\tau}$ deslocamos o vetor $\vec{F}$ (sem mudar sua orientação) até que sua origem esteja no ponto O, o que faz coincidirem as origens dos dois vetores envolvidos no produto vetorial, como na Fig. 11-10*b*. Em seguida, usamos a regra da mão direita para produtos vetoriais da Fig. 3-21*a*, envolvendo com os dedos da mão direita o vetor $\vec{r}$ (o primeiro vetor no produto) com as pontas dos dedos apontando para $\vec{F}$ (o segundo vetor). O polegar direito esticado mostra a orientação de $\vec{\tau}$. Na Fig. 11-10*b* a orientação de $\vec{\tau}$ é o sentido positivo do eixo z.

Para determinar o módulo de $\vec{\tau}$ aplicamos a expressão geral da Eq. 3-27 ($c = ab$ sen ϕ), o que nos dá

$$\tau = rF \operatorname{sen} \phi, \tag{11-15}$$

onde ϕ é o menor dos ângulos entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$ quando as origens dos vetores coincidem. De acordo com a Fig. 11-10*b*, a Eq. 11-15 pode ser escrita na forma

$$\tau = rF_{\perp}, \tag{11-16}$$

onde $F_{\perp}$ (= F sen ϕ) é a componente de $\vec{F}$ perpendicular a $\vec{r}$. De acordo com a Fig. 11-10*c*, a Eq. 11-15 também pode ser escrita na forma

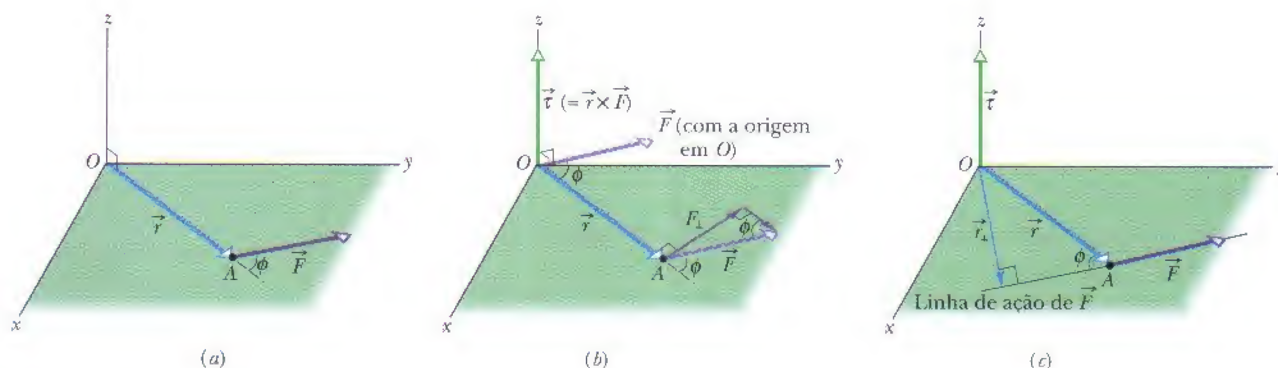


FIG. 11-10 Definição do torque. (*a*) Uma força $\vec{F}$, no plano xy, age sobre uma partícula situada no ponto A. (*b*) Essa força produz um torque $\vec{\tau}$ (= $\vec{r} \times \vec{F}$) sobre a partícula em relação à origem O. De acordo com a regra da mão direita para o produto vetorial, o vetor torque aponta no sentido positivo do eixo z. Seu módulo é dado por $rF_{\perp}$ em (b) e por $r_{\perp}F$ em (*c*).

$$\tau = r_{\perp}F, \tag{11-17}$$

onde $r_{\perp}$ (= r sen ϕ) é o braço de alavanca de $\vec{F}$ (a distância perpendicular entre o ponto O e a linha de ação de $\vec{F}$).

TESTE 3 O vetor posição $\vec{r}$ de uma partícula aponta no sentido positivo de um eixo z. Se o torque a que a partícula está submetida é (a) zero, (b) aponta no sentido negativo de x e (c) aponta no sentido negativo de y, qual é a orientação da força responsável pelo torque?

Exemplo 11-3

Na Fig. 11-11*a* três forças, todas de módulo 2,0 N, agem sobre uma partícula. A partícula está no plano xy, em um ponto A dado por um vetor posição $\vec{r}$ tal que $r = 3{,}0$ m e $\theta = 30°$. A força $\vec{F}_1$ é paralela ao eixo x, a força $\vec{F}_2$ é paralela ao eixo z e a força $\vec{F}_3$ é paralela ao eixo y. Quais são os torques, em relação à origem O, produzidos por essas três forças?

IDÉIA-CHAVE Como os três vetores das forças não estão em um mesmo plano, não podemos calcular seus torques como no Capítulo 10. Em vez disso, devemos usar produtos vetoriais, com módulos dados pela Eq. 11-15 ($\tau = rF$ sen ϕ) e orientações dadas pela regra da mão direita para produtos vetoriais.

Cálculos: Como estamos interessados em calcular os torques em relação à origem O, o vetor $\vec{r}$ usado para calcular os produtos vetoriais é o próprio vetor posição que aparece no enunciado do problema. Para determinar o ângulo ϕ entre a orientação de $\vec{r}$ e a orientação de cada força deslocamos os vetores força da Fig. 11-11*a*, um de cada vez, para que suas origens coincidam com o ponto O. As Figs. 11-11*b*, 11-11*c* e 11.11*d*, que são vistas superiores do plano xz, mostram os vetores força deslocados $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$, respectivamente. (Observe como é muito mais fácil ver os ângulos.) Na Fig. 11-11*d* o ângulo entre as orientações de $\vec{r}$ e $\vec{F}_3$ é 90° e o símbolo ⊗ significa que o sentido de $\vec{F}_3$ é para dentro do papel. Se o sentido da força fosse para fora do papel, ela seria representada pelo símbolo ⊙.

Aplicando a Eq. 11-15 a cada força, obtemos os módulos dos torques:

$$\tau_1 = rF_1 \text{ sen } \phi_1 = (3{,}0 \text{ m})(2{,}0 \text{ N})(\text{sen } 150°) = 3{,}0 \text{ N} \cdot \text{m},$$

$$\tau_2 = rF_2 \text{ sen } \phi_2 = (3{,}0 \text{ m})(2{,}0 \text{ N})(\text{sen } 120°) = 5{,}2 \text{ N} \cdot \text{m},$$

e
$$\tau_3 = rF_3 \text{ sen } \phi_3 = (3{,}0 \text{ m})(2{,}0 \text{ N})(\text{sen } 90°) = 6{,}0 \text{ N} \cdot \text{m}. \quad \text{(Resposta)}$$

Para determinar as orientações desses torques usamos a regra da mão direita, posicionando os dedos da mão direita em volta de $\vec{r}$ de modo a que apontem para $\vec{F}$ na direção do *menor* dos dois ângulos entre os dois vetores. O polegar aponta na direção do torque. Assim, $\vec{\tau}_1$ aponta para dentro do papel na Fig. 11-11*b*; $\vec{\tau}_2$ aponta para fora do papel na Fig. 11-11*c*; e $\vec{\tau}_3$ tem a orientação mostrada na Fig. 11-11*d*. Os três vetores torque aparecem na Fig. 11-11*e*.

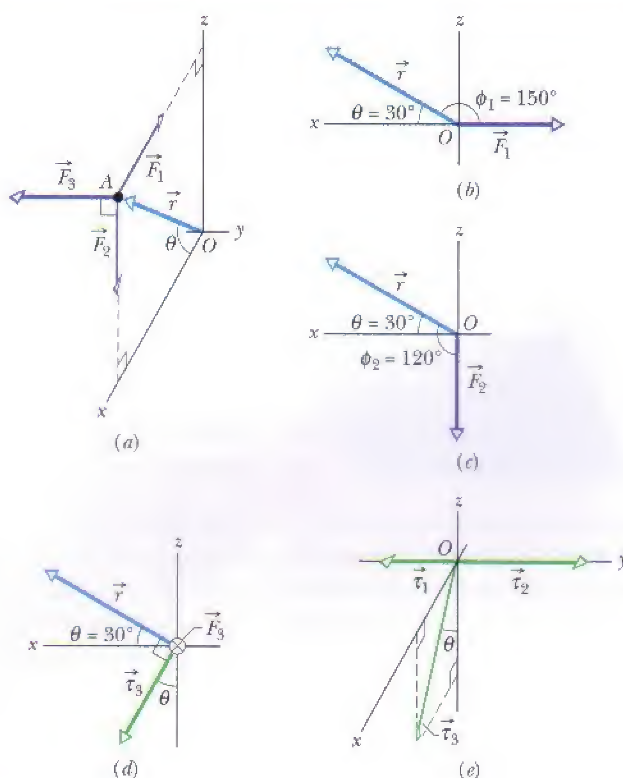
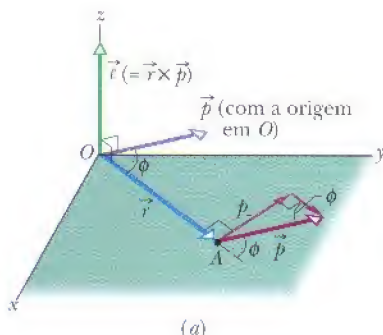


FIG. 11-11 (*a*) Uma partícula no ponto A sofre a ação de três forças, cada uma paralela a um dos eixos de coordenadas. O ângulo ϕ (usado para determinar o torque) é mostrado (*b*) para $\vec{F}_1$ e (*c*) para $\vec{F}_2$. (*d*) O torque $\vec{\tau}_3$ é perpendicular tanto a $\vec{r}$ como a $\vec{F}_3$ (a força $\vec{F}_3$ aponta para dentro do papel). (*e*) Os torques (em relação à origem O) que agem sobre a partícula.

TÁTICA PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 1: *Produtos Vetoriais e Torques* A Eq. 11-15 para torques é nossa primeira aplicação do produto vetorial. A Seção 3-8, onde são apresentadas as regras do produto vetorial, contém uma lista dos erros mais comuns no cálculo de um produto vetorial.

Lembre-se de que um torque é sempre calculado *em relação* a um ponto, que deve ser conhecido para que o valor do torque tenha significado. A mudança do ponto pode mudar tanto o módulo quanto a orientação do torque. No Exemplo 11-3 os torques produzidos pelas três forças foram calculados em relação à origem O. É fácil demonstrar que os torques produzidos por essas mesmas três forças são todos nulos se forem calculados em relação ao ponto A (a posição da partícula), já que, nesse caso, $r = 0$ para todas as forças.



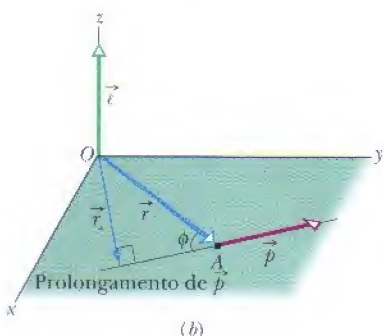


FIG. 11-12 Definição de momento angular. Uma partícula que passa pelo ponto A possui momento linear $\vec{p}\ (= m\vec{v})$, com o vetor $\vec{p}$ no plano xy. A partícula possui momento angular $\vec{\ell}\ (= \vec{r}\times\vec{p})$ em relação à origem O. Pela regra da mão direita, o vetor momento angular aponta no sentido positivo de z. (a) O módulo de $\vec{\ell}$ é dado por $\ell = rp_\perp = rmv_\perp$. ($b$) O módulo de $\vec{\ell}$ também é dado por $\ell = r_\perp p = r_\perp mv$.

11-7 | Momento Angular

Como vimos em capítulos anteriores, o conceito de momento linear $\vec{p}$ e a lei de conservação do momento linear são ferramentas extremamente poderosas, que permitem prever, por exemplo, o resultado de uma colisão de dois carros sem conhecer os detalhes da colisão. Vamos iniciar agora uma discussão de uma grandeza correspondente a $\vec{p}$ para movimentos de rotação, terminando na Seção 11-11 com uma lei correspondente, para movimentos de rotação, à lei de conservação do momento linear.

A Fig. 11-12 mostra uma partícula de massa m e momento linear $\vec{p}\,(= m\vec{v})$ ao passar por um ponto A de um plano xy. O **momento angular** $\vec{\ell}$ desta partícula em relação à origem O é uma grandeza vetorial definida através da equação

$$\vec{\ell} = \vec{r}\times\vec{p} = m(\vec{r}\times\vec{v}) \qquad \text{(definição de momento angular)}, \qquad (11\text{-}18)$$

onde $\vec{r}$ é o vetor posição da partícula em relação a O. Quando a partícula se move em relação a O na direção do seu momento linear $\vec{p}\,(= m\vec{v})$, o vetor posição $\vec{r}$ gira em torno de O. Observe que para possuir momento angular em relação a O a partícula *não precisa* estar girando em torno de O. Comparando as Eqs. 11-4 e 11-18, vemos que a relação entre o momento angular e o momento linear é a mesma que entre o torque e a força. A unidade de momento angular do SI é o quilograma-metro-quadrado por segundo (kg · m^2/s), que equivale ao joule-segundo (J · s).

Para determinar a orientação do vetor momento angular $\vec{\ell}$ na Fig. 11-12, deslocamos o vetor $\vec{p}$ até que sua origem coincida com o ponto O. Em seguida, usamos a regra da mão direita para produtos vetoriais envolvendo o vetor $\vec{r}$ com os dedos da mão direita apontados para o vetor $\vec{p}$. O dedo polegar esticado mostra que $\vec{\ell}$ aponta no sentido positivo do eixo z da Fig. 11-12. Este sentido positivo corresponde a uma rotação do vetor posição $\vec{r}$ no sentido anti-horário em torno do eixo z, associada ao movimento da partícula. (O sentido negativo de $\vec{\ell}$ corresponderia a uma rotação de $\vec{r}$ em torno do eixo z no sentido horário.)

Para determinar o módulo de $\vec{\ell}$, usamos a Eq. 3-27 para escrever

$$\ell = rmv \operatorname{sen} \phi, \qquad (11\text{-}19)$$

onde ϕ é o menor ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{p}$ quando os dois vetores têm uma origem comum. De acordo com a Fig. 11-12a, a Eq. 11-19 pode ser escrita na forma

$$\ell = rp_\perp = rmv_\perp, \qquad (11\text{-}20)$$

onde $p_\perp$ é a componente de $\vec{p}$ perpendicular a $\vec{r}$ e $v_\perp$ é a componente de $\vec{v}$ perpendicular a $\vec{r}$. De acordo com a Fig. 11-12b, a Eq. 11-19 pode ser escrita na forma

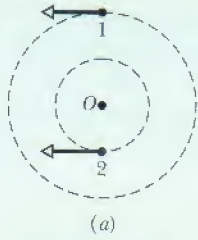
$$\ell = r_\perp p = r_\perp mv, \qquad (11\text{-}21)$$

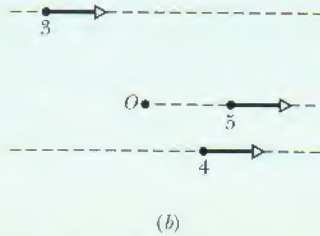
onde $r_\perp$ é a distância perpendicular entre O e a extensão de $\vec{p}$.

Assim como acontece com o torque, o momento angular tem significado apenas em relação a um ponto dado. Além disso, se a partícula da Fig. 11-12 não estivesse no plano xy ou se o momento linear $\vec{p}$ na partícula não estivesse também no plano xy, o momento angular $\vec{\ell}$ não seria paralelo ao eixo z. O vetor momento angular é sempre perpendicular ao plano formado pelos vetores posição e momento linear, $\vec{r}$ e $\vec{p}$.



TESTE 4 Na parte *a* da figura, as partículas 1 e 2 giram em torno do ponto *O* em sentidos opostos, em circunferências de raios 4 m e 2 m. Na parte *b*, as partículas 3 e 4 se movem na mesma direção, em linha reta, a distâncias perpendiculares de 4 m e 2 m do ponto *O*. A partícula 5 se afasta de *O* ao longo de uma linha reta que passa por *O*. As cinco partículas têm a mesma massa e a mesma velocidade constante. (a) Ordene as partículas de acordo com o módulo de seus momentos angulares em relação a *O*, em ordem decrescente. (b) Quais das partículas possuem momento angular negativo em relação a *O*?





Exemplo 11-4

A Fig. 11-13 mostra uma vista superior de duas partículas que se movem com velocidade constante ao longo de trajetórias horizontais. A partícula 1, com um momento de módulo $p_1 = 5{,}0$ kg · m/s, tem um vetor posição $\vec{r}_1$ e passará a 2,0 m do ponto *O*. A partícula 2, com um momento de módulo $p_2 = 2{,}0$ kg · m/s, tem um vetor posição $\vec{r}_2$ e passará a 4,0 m do ponto *O*. Quais são o módulo e a orientação do momento angular total $\vec{L}$ em relação ao ponto *O* do sistema formado pelas duas partículas?

IDÉIA-CHAVE Para determinar $\vec{L}$, podemos primeiro determinar os momentos angulares das duas partículas, $\vec{\ell}_1$ e $\vec{\ell}_2$, e depois somá-los. Para calcular os módulos podemos usar qualquer das Eqs. 11-18 a 11-21. Entretanto, a Eq. 11-21 é a mais fácil neste caso, já que conhecemos as distâncias perpendiculares $r_{1\perp}$ (= 2,0 m) e $r_{2\perp}$ (= 4,0 m) e os módulos dos momentos, p_1 e p_2.

Cálculos: No caso da partícula 1, a Eq. 11-21 nos dá

$$\ell_1 = r_{1\perp}p_1 = (2{,}0\text{ m})(5{,}0\text{ kg}\cdot\text{m/s}) = 10\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.$$

Para determinar a orientação do vetor $\vec{\ell}_1$ usamos a Eq. 11-18 e a regra da mão direita para produtos vetoriais. No caso de $\vec{r}_1 \times \vec{p}_1$, o produto vetorial aponta para fora do papel, perpendicularmente ao plano da Fig. 11-13. Este é o sentido positivo, coerente com a rotação do vetor posição $\vec{r}_1$ da partícula no sentido anti-horário em relação a *O* quando a partícula 1 se move. Assim, o vetor momento angular da partícula 1 é

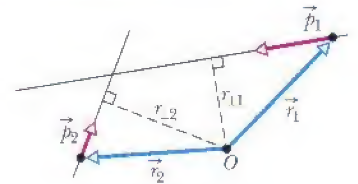


FIG. 11-13 Duas partículas passam nas proximidades do ponto *O*.

$$\ell_1 = +10\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.$$

Analogamente, o módulo de $\vec{\ell}_2$ é

$$\ell_2 = r_{\perp 2}p_2 = (4{,}0\text{ m})(2{,}0\text{ kg}\cdot\text{m/s}) = 8{,}0\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s},$$

e o produto vetorial $\vec{r}_2 \times \vec{p}_2$ aponta para dentro do papel, que é o sentido negativo, coerente com a rotação do vetor $\vec{r}_2$ no sentido horário em relação a *O* quando a partícula 2 se move. Assim, o vetor momento angular da partícula 2 é

$$\ell_2 = -8{,}0\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.$$

O momento angular total do sistema formado pelas duas partículas é

$$L = \ell_1 + \ell_2 = +10\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}) + (-8{,}0\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}) = +2{,}0\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}. \quad \text{(Resposta)}$$

O sinal positivo indica que o momento angular resultante do sistema em relação ao ponto *O* aponta para fora do papel.

11-8 | Segunda Lei de Newton para Rotações

A segunda lei de Newton escrita na forma

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \text{(partícula isolada)} \qquad (11\text{-}22)$$

expressa a relação entre força e momento linear para uma partícula isolada. Temos visto um suficiente paralelismo entre grandezas lineares e angulares para estarmos seguros de que existe também uma relação entre torque e momento angular. Guiados pela Eq. 11-22, podemos até mesmo conjeturar que ela seja

$$\vec{\tau}_{res} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \qquad \text{(partícula isolada).} \tag{11-23}$$

A Eq. 11-23 é de fato uma forma da segunda lei de Newton que se aplica aos movimentos de rotação de uma partícula isolada:

A soma (vetorial) dos torques que agem sobre uma partícula é igual à taxa de variação no tempo do momento angular da partícula.

A Eq. 11-23 não faz sentido, a menos que o torque $\vec{\tau}_{res}$ e o momento angular $\vec{\ell}$ sejam definidos em relação ao mesmo ponto.

Demonstração da Equação 11-23

Começamos com a Eq. 11-18, a definição do momento angular de uma partícula:

$$\vec{\ell} = m(\vec{r} \times \vec{v}),$$

onde $\vec{r}$ é o vetor posição da partícula e $\vec{v}$ é sua velocidade. Derivando* ambos os membros em relação ao tempo t, temos:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}\right). \tag{11-24}$$

Entretanto, $d\vec{v}/dt$ é a aceleração $\vec{a}$ da partícula e $d\vec{r}/dt$ é a velocidade $\vec{v}$. Assim, podemos escrever a Eq. 11-24 na forma

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{v}).$$

Acontece que $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ (o produto vetorial de qualquer vetor por si próprio é zero, pois o ângulo entre os dois vetores é necessariamente zero). Assim, temos:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times m\vec{a}.$$

Podemos usar a segunda lei de Newton ($\vec{F}_{res} = m\vec{a}$) para substituir $m\vec{a}$ pela soma das forças que atuam sobre a partícula, obtendo

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{res} = \Sigma(\vec{r} \times \vec{F}). \tag{11-25}$$

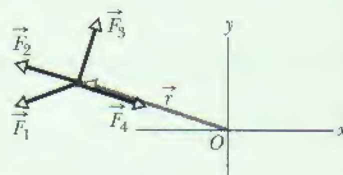
onde o símbolo Σ indica que devemos somar os produtos vetoriais $\vec{r} \times \vec{F}$ para todas as forças. Entretanto, de acordo com a Eq. 11-14 cada um desses produtos vetoriais é o torque associado à força correspondente. Assim, a Eq. 11-25 nos diz que

$$\vec{\tau}_{res} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}.$$

Esta é a Eq. 11-23, a relação que queríamos demonstrar.



TESTE 5 A figura mostra o vetor posição $\vec{r}$ de uma partícula em um certo instante e quatro opções para a orientação de uma força que deve acelerar a partícula. As quatro opções estão no plano xy. (a) Ordene as opções de acordo com o módulo da taxa de variação com o tempo ($d\vec{\ell}/dt$) que elas produzem no momento angular da partícula em relação ao ponto O, em ordem decrescente. (b) Qual das opções está associada a uma taxa de variação negativa do momento angular em relação ao ponto O?



*Ao derivar um produto vetorial é importante manter a ordem das grandezas ($\vec{r}$ e $\vec{v}$, no caso) que formam o produto. (Veja a Eq. 3-28.)

Exemplo 11-5 Aumente sua capacidade

Na Fig. 11-14 um pingüim de massa m cai, sem velocidade inicial, do ponto A, a uma distância horizontal D da origem O de um sistema de coordenadas xyz. (O sentido positivo do eixo z é para fora do papel.)

(a) Qual é o momento angular $\vec{\ell}$ do pingüim durante a queda, em relação ao ponto O?

IDÉIA-CHAVE Tratando o pingüim como uma partícula, seu momento angular $\vec{\ell}$ é dado pela Eq. 11-18 ($\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$), onde $\vec{r}$ é o vetor posição do pingüim (que vai de O até o pingüim) e $\vec{p}$ é o momento linear do pingüim. (O pingüim possui um momento *angular* em relação a O, embora esteja se movendo em linha reta, porque o vetor $\vec{r}$ gira em torno de O durante a queda.)

Cálculos: Para determinar o módulo de $\vec{\ell}$ podemos usar qualquer uma das equações escalares obtidas a partir da Eq. 11-18, ou seja, as Eqs. 11-19 a 11-21. Entretanto, a Eq. 11-21 ($\ell = r_\perp mv$) é a mais fácil de usar, porque a distância perpendicular $r_\perp$ entre O e o prolongamento do vetor $\vec{p}$ é um dos dados do problema (a distância D). A velocidade de um objeto que caiu a partir do repouso durante um intervalo de tempo t é $v = gt$. Podemos escrever a Eq. 11-21 em termos dos valores conhecidos na forma

$$\ell = r_\perp mv = Dmgt. \qquad \text{(Resposta)}$$

Para determinar a orientação de $\vec{\ell}$ usamos a regra da mão direita para o produto vetorial $\vec{r} \times \vec{p}$ da Eq. 11-18. Deslocamos mentalmente o vetor $\vec{p}$ até que sua origem esteja no ponto O e envolvemos $\vec{r}$ com os dedos da mão direita apontando na direção de $\vec{p}$. O dedo polegar estendido aponta para dentro do papel, mostrando que o produto $\vec{r} \times \vec{p}$ e, portanto, $\vec{\ell}$ têm essa orientação, que coincide com o sentido negativo do eixo z. Representamos $\vec{\ell}$ pelo símbolo ⊗ no ponto O. Apenas o módulo do vetor $\vec{\ell}$ varia com o tempo; sua orientação permanece inalterada.

(b) Qual é o torque $\vec{\tau}$ em relação ao ponto O a que é submetido o pingüim devido à força gravitacional $\vec{F}_g$?

IDÉIAS-CHAVE (1) O torque é dado pela Eq. 11-14 ($\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$), onde agora a força é $\vec{F}_g$. (2) A força $\vec{F}_g$ produz um torque sobre o pingüim, embora ele esteja se movendo em linha reta, porque $\vec{r}$ gira em torno de O durante a queda.

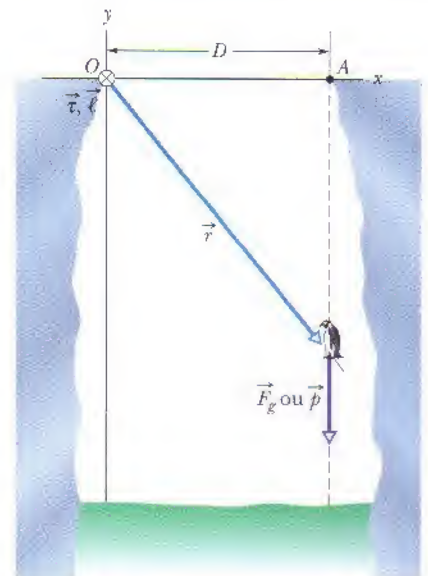


FIG. 11-14 Um pingüim cai verticalmente de um ponto A. O torque $\vec{\tau}$ e o momento angular $\vec{\ell}$ do pingüim em relação à origem O apontam para dentro do plano do papel e passam pelo ponto O.

Cálculos: Para determinar o módulo de $\vec{\tau}$ podemos usar qualquer uma das equações escalares obtidas a partir da Eq. 11-14, ou seja, as Eqs. 11-15 a 11-17. Entretanto, a Eq. 11-17 ($\tau = r_\perp F$) é a mais fácil de usar, porque a distância perpendicular $r_\perp$ entre O e a linha de ação de $\vec{F}_g$ é um dos dados do problema (a distância D). Substituindo $r_\perp$ por D e o módulo de $\vec{F}_g$ por mg, podemos escrever a Eq. 11-17 na forma

$$\tau = DF_g = Dmg. \qquad \text{(Resposta)}$$

Usando a regra da mão direita para o produto vetorial $\vec{r} \times \vec{F}$ da Eq. 11-14, descobrimos que a orientação de $\vec{\tau}$ é o sentido negativo do eixo z, a mesma de $\vec{\ell}$.

Os resultados que obtivemos nos itens (a) e (b) devem ser coerentes com a segunda lei de Newton para rotações, Eq. 11-23 ($\vec{\tau}_{res} = d\vec{\ell}/dt$). Para verificar se os módulos calculados estão corretos, escrevemos a Eq. 11-23 na forma de componentes em relação ao eixo z e usamos nosso resultado $\ell = Dmgt$. Temos:

$$\tau = \frac{d\ell}{dt} = \frac{d(Dmgt)}{dt} = Dmg,$$

que é o módulo que encontramos para $\vec{\tau}$. Para verificar se as orientações estão corretas observamos que, de acordo com a Eq. 11-23, $\vec{\tau}$ e $d\vec{\ell}/dt$ devem ter a mesma orientação. Assim, $\vec{\tau}$ e $\vec{\ell}$ também devem ter a mesma orientação, o que é exatamente o que encontramos.

11-9 | O Momento Angular de um Sistema de Partículas

Voltamos agora nossa atenção para o momento angular de um sistema de partículas em relação a uma origem. O momento angular total $\vec{L}$ do sistema é a soma (vetorial) dos momentos angulares $\vec{\ell}$ das partículas do sistema:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \cdots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i. \tag{11-26}$$

Os momentos angulares das partículas podem variar com o tempo por causa de forças externas ou de interações entre as partículas. Podemos determinar a variação total de $\vec{L}$ derivando a Eq. 11-26 em relação ao tempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{\ell}_i}{dt}. \tag{11-27}$$

De acordo com a Eq. 11-23, $d\vec{\ell}_i/dt$ é igual ao torque resultante $\vec{\tau}_{\text{res},i}$ a que está submetida a partícula de ordem i. Assim, a Eq. 11-27 pode ser escrita na forma

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{\text{res},i}. \tag{11-28}$$

Isso significa que a taxa de variação do momento angular $\vec{L}$ do sistema é igual à soma vetorial dos torques a que estão submetidas as partículas do sistema. Esses torques podem ser torques *internos* (produzidos por forças exercidas por outras partículas do sistema) e torques *externos* (produzidos por forças exercidas por corpos externos ao sistema). Entretanto, as forças exercidas pelas partículas do sistema sempre aparecem na forma de pares de forças da terceira lei, de modo que a soma dos torques produzidos por essas forças é nula. Assim, os únicos torques que podem fazer variar o momento angular total $\vec{L}$ do sistema são os torques externos que agem sobre o sistema.

Chamando de $\vec{\tau}_{\text{res}}$ o torque externo resultante, ou seja, a soma vetorial dos torques externos que agem sobre todas as partículas do sistema, a Eq. 11-28 pode ser escrita na forma

$$\vec{\tau}_{\text{res}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{(sistema de partículas)}, \tag{11-29}$$

que é a segunda lei de Newton para rotações. Em palavras:

O torque externo resultante $\vec{\tau}_{\text{res}}$ que age sobre um sistema de partículas é igual à taxa de variação com o tempo do momento angular total $\vec{L}$ do sistema.

A Eq. 11-29 é análoga à Eq. 9-27 ($\vec{F}_{\text{res}} = d\vec{P}/dt$), mas requer um cuidado adicional: os torques e o momento angular do sistema devem ser medidos em relação à mesma origem. Se o centro de massa do sistema não estiver acelerado em relação a um referencial inercial, essa origem pode ser qualquer ponto. Caso, porém, o centro de massa do sistema esteja acelerado a origem deve ser o centro de massa. Considere, por exemplo, uma roda como o sistema de partículas. Se a roda está girando em torno de um eixo fixo em relação ao solo a origem usada para aplicar a Eq. 11-29 pode ser qualquer ponto estacionário em relação ao solo. Entretanto, se a roda estiver girando em torno de um eixo acelerado (como acontecerá, por exemplo, se a roda estiver descendo uma rampa), a origem deverá ser o centro de massa da roda.

11-10 | Momento Angular de um Corpo Rígido Girando em Torno de um Eixo Fixo

Vamos agora calcular o momento angular de um sistema de partículas que formam um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo. A Fig. 11-15a mostra um corpo desse tipo. O eixo fixo de rotação é o eixo z, e o corpo gira em torno do eixo com uma velocidade angular constante ω. Estamos interessados em calcular o momento angular do corpo em relação a esse eixo.

Podemos calcular o momento angular somando as componentes z dos momentos angulares dos elementos de massa do corpo. Na Fig. 11-15a um elemento de massa típico, de massa Δm, está se movendo em torno do eixo z em uma trajetória circular. A posição do elemento de massa em relação à origem O é dada pelo vetor posição $\vec{r}_i$. O raio da trajetória circular do elemento de massa é $r_{\perp i}$, a distância perpendicular entre o elemento e o eixo z.

O módulo do momento angular $\vec{\ell}_i$ deste elemento de massa em relação a O é dado pela Eq. 11-19:

$$\ell_i = (r_i)(p_i)(\text{sen } 90°) = (r_i)(\Delta m_i v_i),$$

onde p_i e v_i são o momento linear e a velocidade linear do elemento de massa e 90° é o ângulo entre $\vec{r}_i$ e $\vec{p}_i$. O vetor momento angular $\vec{\ell}_i$ do elemento de massa da Fig. 11-15a aparece na Fig. 11-15b; o vetor é perpendicular a $\vec{r}_i$ e $\vec{p}_i$.

Estamos interessados na componente de $\vec{\ell}_i$ na direção paralela ao eixo de rotação, em nosso caso o eixo z. Esta componente z é dada por

$$\ell_{iz} = \ell_i \text{ sen } \theta = (r_1 \text{ sen } \theta)(\Delta m_i v_i) = r_{\perp i} \Delta m_i v_i.$$

A componente z do momento angular do corpo rígido como um todo pode ser calculada somando as contribuições de todos os elementos de massa do corpo. Como $v = \omega r_\perp$, podemos escrever

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} \ell_{iz} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i v_i r_{\perp i} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i (\omega r_{\perp i}) r_{\perp i}$$

$$= \omega \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_{\perp i}^2 \right). \qquad (11\text{-}30)$$

Podemos colocar ω do lado de fora do somatório porque tem o mesmo valor em todos os pontos do corpo rígido.

O fator $\sum \Delta m_i r_{\perp i}^2$ na Eq. 11-30 é o momento de inércia I do corpo em relação ao eixo fixo (veja a Eq. 10-33). Assim, a Eq. 11-30 se reduz a

$$L = I\omega \quad \text{(corpo rígido, eixo fixo).} \qquad (11\text{-}31)$$

O índice z foi omitido na Eq. 11-31, mas o leitor deve se lembrar de que o momento angular definido pela equação é o momento angular em torno do eixo de rotação. Além disso, I é o momento de inércia em relação a esse mesmo eixo.

A Tabela 11-1, que complementa a Tabela 10-3, amplia nossa lista de correspondências entre movimentos de translação e rotação.

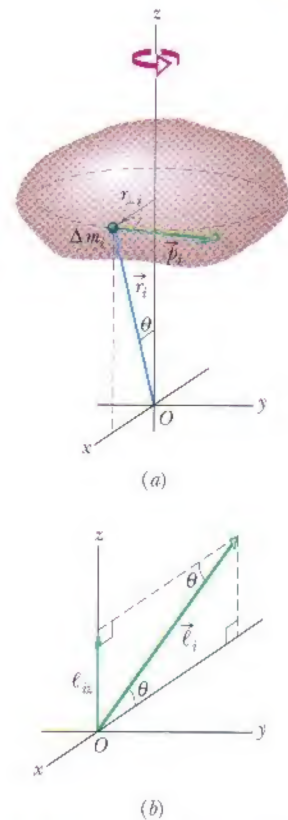


FIG. 11-15 (a) Um corpo rígido gira em torno de um eixo z com velocidade angular ω. Um elemento de massa Δm_i situado no interior do corpo se move em torno do eixo z em um círculo de raio $r_{\perp i}$. O elemento de massa possui momento linear $\vec{p}_i$ e sua posição em relação à origem O é determinada pelo vetor posição $\vec{r}_i$. O elemento de massa é mostrado na figura no instante em que $r_{\perp i}$ está paralelo ao eixo x. (b) O momento angular $\vec{\ell}_i$ do elemento de massa do item (a) em relação a O. A componente z, ℓ_{iz}, também é mostrada na figura.

TABELA 11-1

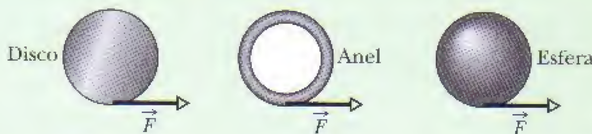
Outras Correspondências entre os Movimentos de Translação e Rotação[a]

Translação		Rotação	
Força	$\vec{F}$	Torque	$\vec{\tau}\ (= \vec{r} \times \vec{F})$
Momento linear	$\vec{p}$	Momento angular	$\vec{\ell}\ (= \vec{r} \times \vec{p})$
Momento linear[b]	$\vec{P}\ (= \sum \vec{p}_i)$	Momento angular[b]	$\vec{L}\ (= \sum \vec{\ell}_i)$
Momento linear[b]	$\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$	Momento angular[c]	$L = I\omega$
Segunda lei de Newton[b]	$\vec{F}_{res} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$	Segunda lei de Newton[b]	$\vec{\tau}_{res} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
Lei de conservação[d]	$\vec{P}$ = constante	Lei de conservação[d]	$\vec{L}$ = constante

[a]Veja também a Tabela 10-3.
[b]Para sistemas de partículas, incluindo corpos rígidos.
[c]Para um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo; L é a componente paralela ao eixo.
[d]Para um sistema fechado e isolado.



TESTE 6 Na figura, um disco, um anel e uma esfera maciça são postos para girar em torno de eixos centrais fixos (como piões) por meio de barbantes enrolados em torno dos objetos, que aplicam a mesma força tangencial constante $\vec{F}$ aos três objetos. Os três objetos têm a mesma massa e o mesmo raio e estão inicialmente em repouso. Ordene os objetos de acordo (a) com o momento angular em relação ao eixo central e (b) com a velocidade angular, em ordem decrescente, após os barbantes terem sido puxados por um certo intervalo de tempo t.



Exemplo 11-6

George Washington Gales Ferris, Jr., um engenheiro civil formado pelo Instituto Politécnico Rensselaer, construiu a primeira roda-gigante (Fig. 11-16) para a Exposição Mundial Colombiana de 1893, relizada em Chicago. A roda, uma surpreendente obra de engenharia para a época, fazia 36 cabinas de madeira, cada uma comportando até 60 passageiros, descreverem uma circunferência de raio R = 38 m. A massa de cada cabina era aproximadamente $1{,}1 \times 10^4$ kg. A massa da roda era aproximadamente $6{,}0 \times 10^5$ kg e estava concentrada principalmente na grade circular que sustentava as cabinas. A roda dava uma volta completa, com velocidade angular ω_R, em cerca de 2 min.

(a) Estime o módulo L do momento angular da roda-gigante e dos passageiros quando ela girava com velocidade angular ω_R.



FIG. 11-16 A primeira roda-gigante. *(Foto extraída de "Shepp's World's Fair Photographed", de James W. Shepp e Daniel P. Shepp, Globe Publishing Co., Chicago and Philadelphia, 1893)*

IDÉIA-CHAVE Podemos tratar a roda, as cabinas e os passageiros como um objeto rígido girando em torno de um eixo fixo, o eixo da roda. Nesse caso, a Eq. 11-31 ($L = I\omega$) pode ser usada para calcular o módulo do momento angular desse objeto. Para isso, porém, precisamos conhecer a velocidade angular ω_R e o momento de inércia I do objeto.

Momento de inércia: Para determinar I, vamos começar com as cabines e seus passageiros. Como podemos tratá-las como partículas situadas a uma distância R do eixo de rotação, sabemos pela Eq. 10-33 que o seu momento de inércia é $I_{pc} = M_{pc}R^2$, onde M_{pc} é a massa total. Vamos supor que as 36 cabines estão com a sua capacidade máxima de 60 passageiros, cada um deles com uma massa de 70 kg. Nesse caso, a massa total é

$$M_{pc} = 36[1{,}1 \times 10^4 \text{ kg} = 60(70 \text{ kg})] = 5{,}47 \times 10^5 \text{ kg}$$

e o momento de inércia é

$$I_{pc} = M_{pc}R^2 = (5{,}47 \times 10^5 \text{ kg})(38 \text{ m})^2 = 7{,}90 \times 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Consideramos em seguida a armação da roda. Vamos supor que o momento de inércia da estrutura se deve principalmente à grade circular que sustenta as cabines. Além disso, vamos supor que a grade forma um aro de raio R, com uma massa M_{aro} de $3{,}0 \times 10^5$ kg (metade da massa da roda). De acordo com a Tabela 10-2*a*, o momento de inércia do aro é

$$I_{aro} = M_{aro}R^2 = (3{,}0 \times 10^5 \text{ kg})(38 \text{ m})^2$$
$$= 4{,}33 \times 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

O momento de inércia conjunto I das cabines, passageiros e aro é, portanto,

$$I = I_{pc} + I_{aro} = 7{,}90 \times 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 4{,}33 \times 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$= 1{,}22 \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Velocidade angular: Para determinar a velocidade angular ω_R usamos a Eq. 10-5 ($\omega_{méd} = \Delta\theta/\Delta t$). Como a roda sofre um deslocamento angular $\Delta\theta = 2\pi$ rad (uma volta completa) em um intervalo de tempo Δt = 2 min, temos:

$$\omega_R = \frac{2\pi \text{ rad}}{(2 \text{ min})(60 \text{ s/min})} = 0{,}0524 \text{ rad/s}.$$

Momento angular: Agora podemos usar a Eq. 11-31 para calcular o módulo do momento angular:

$$L = I\omega_R = (1{,}22 \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(0{,}0524 \text{ rad/s})$$
$$= 6{,}39 \times 10^7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \approx 6{,}4 \times 10^7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Suponha que a roda-gigante totalmente carregada é acelerada até a velocidade angular ω_R, a girar a partir do repouso, em um intervalo de tempo $\Delta t = 5{,}0$ s. Qual é o módulo $\tau_{méd}$ do torque externo médio que age sobre a roda nesse intervalo?

IDÉIA-CHAVE O torque externo médio $\tau_{méd}$ está relacionado à variação ΔL do momento angular da roda-gigante carregada através da Eq. 11-29 ($\vec{\tau}_{res} = d\vec{L}/dt$).

Cálculo: Como a roda-gigante gira em torno de um eixo fixo até atingir a velocidade angular ω_R em um intervalo de tempo Δt_1, podemos escrever a Eq. 11-29 na forma $\tau_{méd} = \Delta L/\Delta t_1$. A variação ΔL é de zero até a resposta do item (a). Assim, temos:

$$\bar{\tau}_{méd} = \frac{\Delta L}{\Delta t_1} = \frac{6{,}39 \times 10^7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} - 0}{5{,}0 \text{ s}}$$
$$\approx 1{,}3 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}. \quad \text{(Resposta)}$$

11-11 | Conservação do Momento Angular

Até o momento discutimos duas importantes leis de conservação, a lei de conservação da energia e a lei de conservação do momento linear. Agora vamos falar de uma terceira lei desse tipo, envolvendo a conservação do momento angular. O ponto de partida é a Eq. 11-29 ($\vec{\tau}_{res} = d\vec{L}/dt$), que é a segunda lei de Newton para rotações. Se nenhum torque externo resultante age sobre o sistema, esta equação se torna $d\vec{L}/dt = 0$, ou seja,

$$\vec{L} = \text{constante} \quad \text{(sistema isolado)}. \qquad (11\text{-}32)$$

Este resultado, conhecido como **lei de conservação do momento angular**, também ser escrito na forma

$$\begin{pmatrix}\text{momento angular}\\ \text{total em um certo}\\ \text{instante inicial } t_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{momento angular}\\ \text{total em um}\\ \text{instante posterior } t_f\end{pmatrix},$$

ou

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \quad \text{(sistema isolado)}. \qquad (11\text{-}33)$$

As Eqs. 11-32 e 11-33 nos dizem o seguinte:

Se o torque externo resultante que age sobre um sistema é nulo, o momento angular $\vec{L}$ do sistema permanece constante, sejam quais forem as mudanças que ocorrem dentro do sistema.

As Equações 11-32 e 11-33 são equações vetoriais; como tais, são equivalentes a três equações para as componentes, que correspondem à conservação do momento angular em três direções mutuamente perpendiculares. Dependendo dos torques externos que agem sobre um sistema, o momento angular do sistema pode ser conservado em uma ou duas direções, mas não em todas:

Se a componente do torque *externo* resultante que age sobre um sistema ao longo de um certo eixo é nula, a componente do momento angular do sistema ao longo desse eixo permanece constante, sejam quais forem as mudanças que ocorrem dentro do sistema.

Podemos aplicar esta lei ao corpo isolado da Fig. 11-15, que está girando em torno do eixo z. Suponha que em um certo momento a massa do corpo é redistribuí-





FIG. 11-17 (*a*) O estudante possui um momento de inércia relativamente grande em relação ao eixo de rotação e uma velocidade angular relativamente pequena. (*b*) Diminuindo o momento de inércia, o estudante automaticamente aumenta a velocidade angular. O momento angular $\vec{L}$ do sistema permanece inalterado.

da de tal forma que o momento de inércia em relação a esse eixo muda de valor. De acordo com as Equações 11-32 e 11-33, o momento angular do corpo não pode mudar. Substituindo a Eq. 11-31 (para o momento angular ao longo do eixo de rotação) na Eq. 11-33, esta lei de conservação se torna

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f. \qquad (11\text{-}34)$$

onde os índices se referem aos valores do momento de inércia I e da velocidade ω antes e depois da redistribuição de massa.

Como acontece com as duas outras leis de conservação que discutimos anteriormente, as aplicações das Eqs. 11-32 e 11-33 vão além dos limites da mecânica newtoniana. Elas são válidas para partículas que se movem com velocidades próximas da velocidade da luz (caso em que deve ser usada a teoria da relatividade especial) e permanecem verdadeiras no mundo das partículas subatômicas (onde reina a física quântica). Nenhuma exceção à lei de conservação do momento angular jamais foi descoberta.

Discutiremos a seguir quatro exemplos que envolvem esta lei.

1. ***Aluno que gira*** A Fig. 11-17 mostra um estudante sentado em um banco que pode girar em torno de um eixo vertical. O estudante, que foi posto em rotação com uma pequena velocidade angular inicial ω_i, segura dois halteres com os braços abertos. Seu vetor momento angular $\vec{L}$ coincide com o eixo de rotação e aponta para cima.

   O professor pede ao estudante para fechar os braços; este movimento reduz o momento de inércia do valor inicial I_i para um valor menor I_f, pois a massa dos halteres fica mais próxima do eixo de rotação. A velocidade angular do estudante aumenta consideravelmente, de ω_i para ω_f. O estudante pode reduzir a velocidade angular estendendo novamente os braços, o que afasta os halteres do eixo.

   Nenhum torque externo resultante age sobre o sistema formado pelo estudante, o banco e os halteres. Assim, o momento angular desse sistema em relação ao eixo de rotação deve permanecer constante, independentemente do modo como o estudante manipula os halteres. Na Fig. 11-17*a* a velocidade angular ω_i do estudante é relativamente baixa e seu momento de inércia I_i é relativamente alto. De acordo com a Eq. 11-34, sua velocidade angular na Fig. 11-17*b* deve ser maior para compensar a redução de I_f.

2. ***Salto de trampolim*** A Fig. 11-18 mostra uma mergulhadora executando um salto mortal para a frente de uma volta e meia. Como seria de se esperar, o centro de massa descreve uma trajetória parabólica. A atleta deixa o trampolim com um certo momento angular $\vec{L}$ em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa, representado por um vetor dirigido para dentro do papel na Fig. 11-18. Quando a mergulhadora está no ar nenhum torque externo age sobre ela, de modo que seu momento angular em torno do centro de massa não pode variar. Levando os braços e pernas para a *posição grupada* ela pode reduzir consideravelmente o momento de inércia em torno desse eixo e, assim, de acordo com a Eq. 11-34, aumentar consideravelmente a velocidade angular. Quando a atleta passa da posição grupada para a *posição esticada* no final do salto seu momento de inércia aumenta, e assim ela diminui a velocidade angular para poder mergulhar espirrando o mínimo possível de água. Mesmo em um salto mais complicado, envolvendo também um movimento de parafuso, o momento angular da mergulhadora é conservado, em módulo *e* orientação, durante todo o salto.

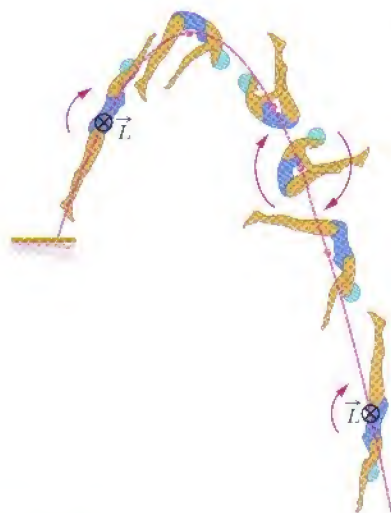


FIG. 11-18 O momento angular $\vec{L}$ da nadadora é constante durante o salto, sendo representado pela origem ⊗ de uma seta perpendicular ao plano do papel. Note também que o centro de massa da nadadora (representado pelos pontos) segue uma trajetória parabólica.

3. ***Salto em distância*** Quando um atleta deixa o solo em uma prova de salto em distância a força exercida pelo solo sobre o pé de impulsão imprime ao atleta uma rotação para a frente em torno de um eixo horizontal. Esta rotação, se não for controlada, não permite que o atleta chegue ao solo com a postura correta: na descida, as pernas devem estar juntas e estendidas para a frente, para que os calcanhares toquem na areia o mais longe possível do ponto de partida. Depois que o atleta deixa o solo seu momento angular não pode mudar (é conservado), já que não está sujeito a nenhum torque externo. Entretanto, ele pode transferir



FIG. 11-19 No salto em distância, a rotação dos braços ajuda a manter o corpo na orientação correta para a parte final do salto.

a maior parte do momento angular para os braços, fazendo-os girar em um plano vertical (Fig. 11-19). Com isso, o corpo permanece na orientação correta para parte final do salto.

4. ***Tour jeté*** Em um *tour jeté*, um bailarino salta com um pequeno movimento de rotação, mantendo uma perna vertical e a outra perpendicular ao corpo (Fig. 11-20*a*). A velocidade angular é tão pequena que pode não ser percebida pela platéia. Enquanto o bailarino está subindo movimenta a perna que está levantada para baixo e a outra perna para cima, fazendo com que ambas assumam um ângulo θ com o corpo (Fig. 11-20*b*). O movimento é elegante, mas também serve para aumentar a velocidade angular, já que o momento de inércia do bailarino é menor na nova posição. Como seu corpo não está sujeito a nenhum torque externo, seu momento angular não pode variar. Assim, se o momento de inércia diminui a velocidade angular deve aumentar. Quando o salto é bem executado a impressão para a platéia é a de que o bailarino de repente começa a girar e executa uma volta de 180º antes que as orientações iniciais das pernas sejam invertidas em preparação para o pouso. Quando uma das pernas é novamente estendida a rotação parece desaparecer.

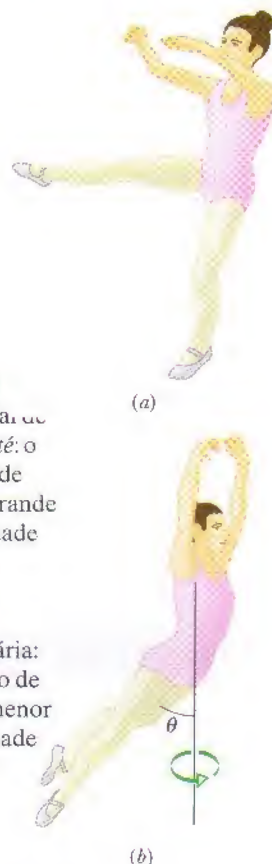


FIG. 11-20 Parte inicial de um *tour jeté*: o momento de inércia é grande e a velocidade angular é pequena. (*b*) Parte intermediária: o momento de inércia é menor e a velocidade angular é menor.

TESTE 7 Um besouro-rinoceronte está na borda de um pequeno disco que gira como um carrossel. Se o besouro se desloca em direção ao centro do disco as seguintes grandezas (todas em relação ao eixo central) aumentam, diminuem ou permanecem as mesmas: (a) momento de inércia, (b) momento angular e (c) velocidade angular?

Exemplo 11-7

A Fig. 11-21*a* mostra um estudante, novamente sentado em um banco que pode girar livremente em torno de um eixo vertical. O estudante, inicialmente em repouso, está segurando uma roda de bicicleta cuja borda está carregada de chumbo e cujo momento de inércia I_r em relação ao eixo central é 1,2 kg · m^2. A roda está girando com uma velocidade angular ω_r de 3,9 rev/s; vista de cima, a rotação é no sentido anti-horário. O eixo da roda é vertical e o seu momento angular $\vec{L}_r$ aponta verticalmente para cima. O estudante inverte a roda (Fig. 11-20*b*) de forma que, vista de cima, ela passa a girar no sentido horário. Seu momento angular é agora $-\vec{L}_r$. A inversão faz com que o estudante, o banco e o centro da roda girem juntos, como um corpo rígido composto, em torno do eixo de rotação do banco, com um momento de inércia I_c = 6,8 kg · m^2. (O fato de a roda

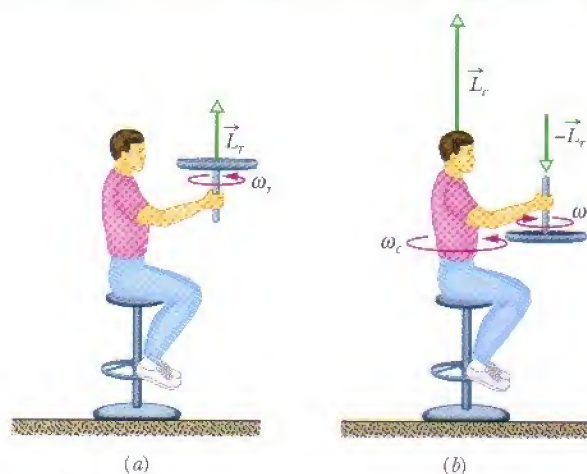


FIG. 11-21 (*a*) Um estudante segura uma roda de bicicleta que gira em torno de um eixo vertical. (*b*) O estudante inverte a roda e começa a girar. (*c*) O momento angular total do sistema é o mesmo antes e depois da inversão.

também estar girando em torno do seu eixo não afeta a distribuição de massa desse corpo composto; assim, I_c possui o mesmo valor, independentemente de a roda estar girando ou não.) Com que velocidade angular ω_c e em que sentido o corpo composto gira após a inversão da roda?

IDÉIAS-CHAVE

1. A velocidade angular ω_c pedida está relacionada ao momento angular final $\vec{L}_c$ do corpo composto em relação ao eixo de rotação do banco pela Eq. 11-31 ($L = I\omega$).
2. A velocidade angular inicial ω_r da roda está relacionada ao momento angular $\vec{L}_r$ da roda em relação ao centro pela mesma equação.
3. A soma dos vetores $\vec{L}_c$ e $\vec{L}_r$ fornece o momento angular total $\vec{L}_{tot}$ do sistema formado pelo estudante, o banco e a roda.
4. Quando a roda é invertida, nenhum torque externo resultante age sobre o sistema para mudar $\vec{L}_{tot}$ em relação a qualquer eixo vertical. (Os torques produzidos por forças entre o estudante e a roda quando o estudante inverte a roda são *internos* ao sistema.) Assim, o momento angular total do sistema é conservado em relação a qualquer eixo vertical.

Cálculos: A conservação de $\vec{L}_{tot}$ está representada por vetores na Fig. 11-21*c*. Podemos também escrever essa conservação em termos de componentes ao longo de um eixo vertical:

$$L_{c,f} + L_{r,f} = L_{c,i} + L_{r,i}, \qquad (11\text{-}35)$$

onde os índices *i* e *f* indicam o estado inicial (antes da inversão da roda) e o estado final (depois da inversão). Como a inversão da roda inverteu o momento angular associado à sua rotação, substituímos $L_{r,f}$ por $-L_{r,i}$. Fazendo $L_{c,i} = 0$ (pois o estudante, o banco e o centro da roda estão inicialmente em repouso), a Eq. 11-35 se torna

$$L_{c,f} = 2L_{r,i}.$$

Usando a Eq. 11-31, substituímos $L_{c,f}$ por $I_c\omega_c$ e $L_{r,i}$ por $I_r\omega_r$ e explicitamos ω_c, obtendo

$$\omega_c = \frac{2I_r}{I_c}\omega_r$$

$$= \frac{(2)(1{,}2\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(3{,}9\ \text{rev/s})}{6{,}8\ \text{kg}\cdot\text{m}^2} = 1{,}4\ \text{rev/s} \qquad \text{(Resposta)}$$

Este resultado positivo mostra que o estudante gira no sentido anti-horário em torno do eixo do banco, quando visto de cima. Se quiser parar de rodar, o estudante terá apenas que inverter novamente a roda.

Exemplo 11-8

Na Fig. 11-22 uma barata de massa m está sobre um disco de massa $6{,}00m$ e raio R. O disco gira como um carrossel em torno do eixo central, com velocidade angular $\omega = 1{,}50$ rad/s. A barata está inicialmente a uma distância $r = 0{,}800R$ do centro do disco, mas rasteja até a borda do disco. Trate a barata como se fosse uma partícula. Qual é a sua velocidade angular ao chegar à borda do disco?

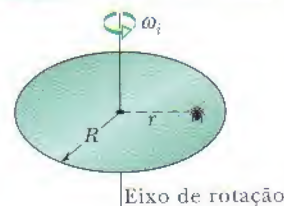


FIG. 11-22 Uma barata está a uma distância r do centro de um disco que gira como um carrossel.

IDÉIAS-CHAVE (1) Ao se deslocar, a barata muda a distribuição de massa (e, portanto, o momento de inércia) do sistema barata-disco. (2) O momento angular do sistema não varia porque ele não está sujeito a nenhum torque externo. (As forças e torques associados ao movimento da barata são internos ao sistema.) (3) O módulo do momento angular de um corpo rígido ou de uma partícula é dado pela Eq. (11-31) ($L = I\omega$).

Cálculos: Podemos determinar a velocidade angular final igualando o momento angular final L_f ao momento angular inicial L_i, já que ambos envolvem a velocidade angular e o momento de inércia. Para começar, vamos calcular o momento de inércia do sistema barata-disco antes e depois do deslocamento da barata.

De acordo com a Tabela 10-2*c*, o momento de inércia de um disco que gira em torno do eixo central é $\frac{1}{2}MR^2$. Como $M = 6{,}00m$, o momento de inércia do disco é

$$I_d = 3{,}00mR^2. \qquad (11\text{-}36)$$

(Não conhecemos os valores de m e R, mas vamos prosseguir com a coragem tradicional dos físicos.)

De acordo com a Eq. 10-33, o momento de inércia da barata (supondo que se comporta como uma partícula) é mr^2. Substituindo os valores da distância inicial entre a barata e o centro do disco ($r = 0{,}800R$) e da distância final ($r = R$), descobrimos que o momento de inércia inicial da barata em relação ao eixo de rotação é

$$I_{bi} = 0{,}64mR^2 \qquad (11\text{-}37)$$

e que o momento de inércia final em relação ao mesmo eixo é

$$I_{bf} = mR^2. \qquad (11\text{-}38)$$

Assim, o momento de inércia inicial do sistema barata-disco é

$$I_i = I_d + I_{bi} = 3{,}64mR^2, \quad (11\text{-}39)$$

e o momento de inércia final é

$$I_f = I_d + I_{bf} = 4{,}00mR^2. \quad (11\text{-}40)$$

Em seguida, usamos a Eq. 11-31 ($L = I\omega$) para levar em conta o fato de que o momento angular final L_f do sistema é igual ao momento angular inicial L_i:

$$I_f\omega_f = I_i\omega_i$$

ou $$4{,}00mR^2\omega_f = 3{,}64mR^2(1{,}50 \text{ rad/s}).$$

Depois de cancelar as incógnitas m e R, obtemos

$$\omega_f = 1{,}37 \text{ rad/s}. \quad \text{(Resposta)}$$

Observe que a velocidade angular diminuiu porque a distância entre parte da massa e o eixo de rotação aumentou.

11-12 | Precessão de um Giroscópio

Um giroscópio simples é formado por uma roda fixada a um eixo e livre para girar em torno do eixo. Se uma das extremidades do eixo de um giroscópio *estacionário* é apoiada em um suporte, como na Fig. 11-22*a*, e o giroscópio é liberado, o giroscópio cai, girando para baixo em torno da extremidade do suporte. Como a queda envolve uma rotação, ela é governada pela segunda lei de Newton para rotações, que é dada pela Eq. 11-29:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (11\text{-}41)$$

De acordo com esta equação, o torque que causa a rotação para baixo (a queda) faz variar o momento angular $\vec{L}$ do giroscópio a partir do seu valor nulo inicial. O torque $\vec{\tau}$ é produzido pela força gravitacional $M\vec{g}$ que age sobre o centro de massa do giroscópio, que tomamos como sendo o centro da roda. O braço de alavanca em relação à ponta do suporte, situada no ponto O da Fig. 11-23*a*, é $\vec{r}$. O módulo de $\vec{\tau}$ é

$$\tau = Mgr \operatorname{sen} 90° = Mgr \quad (11\text{-}42)$$

(pois o ângulo entre $M\vec{g}$ e $\vec{r}$ é de 90°) e seu sentido é o que aparece na Fig. 11-23*a*.

Um giroscópio que gira rapidamente se comporta de outra forma. Suponha que ele seja liberado com o eixo ligeiramente inclinado para cima. Nesse caso, ele começa a cair, girando em torno de um eixo horizontal que passa por O, mas em seguida, com a roda ainda girando em torno do eixo, passa a girar horizontalmente em torno de um eixo vertical que passa pelo ponto O, em um movimento chamado de **precessão**.

Por que o giroscópio em rotação permanece suspenso em vez de cair, como o giroscópio estacionário? Isso acontece porque, quando o giroscópio em rotação é liberado, o torque produzido pela força gravitacional, $M\vec{g}$, faz variar, não um momento angular que é inicialmente nulo, mas um momento angular já existente, graças à rotação da roda.

Para entender por que esse momento angular inicial leva à precessão, considere o momento angular $\vec{L}$ do giroscópio devido à rotação da roda. Para simplificar a situação, suponha que a rotação é tão rápida que o momento angular devido à precessão é desprezível em relação a $\vec{L}$. Suponha também que o eixo do giroscópio se encontra na horizontal quando a precessão começa, como na Fig. 11-23*b*. O módulo de $\vec{L}$ é dado pela Eq. 11-31:

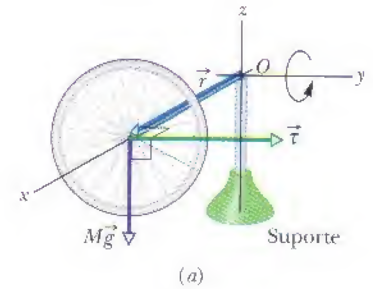
$$L = I\omega, \quad (11\text{-}43)$$

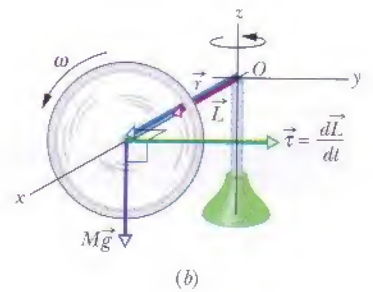
onde I é o momento de inércia do giroscópio em torno do seu eixo e ω é a velocidade angular com a qual a roda gira em torno do eixo. O vetor $\vec{L}$ aponta ao longo da haste, como na Fig. 11-23*b*. Como $\vec{L}$ é paralelo a $\vec{r}$, o torque $\vec{\tau}$ deve ser perpendicular a $\vec{L}$.

De acordo com a Eq. 11-41, o torque $\vec{\tau}$ causa uma variação incremental $d\vec{L}$ do momento angular do giroscópio em um intervalo de tempo incremental dt, ou seja,

$$d\vec{L} = \vec{\tau}\, dt \quad (11\text{-}44)$$

Entretanto, no caso de um giroscópio que *gira rapidamente* o módulo de $\vec{L}$ é fixado pela Eq. 11-43. Assim, o torque pode mudar a orientação de $\vec{L}$, mas não o seu módulo.





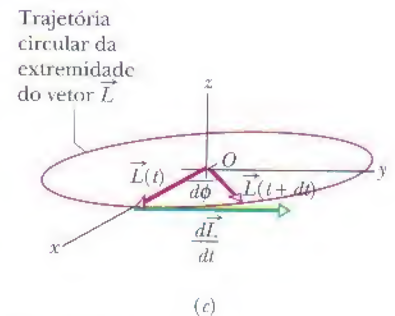


FIG. 11-23 (*a*) Um giroscópio parado gira em um plano *xz* devido ao torque $\vec{\tau}$ produzido pela força gravitacional. (*b*) Um giroscópio que gira rapidamente com momento angular $\vec{L}$ executa um movimento de precessão em torno do eixo *z*. Este movimento de precessão acontece no plano *xy*. (*c*) A variação $d\vec{L}/dt$ do momento angular leva a uma rotação de $\vec{L}$ em torno de *O*.

De acordo com a Eq. 11-44, a orientação de $d\vec{L}$ é a mesma de $\vec{\tau}$, perpendicular a $\vec{L}$. A única maneira pela qual $\vec{L}$ pode variar na direção de $\vec{\tau}$ sem que seu módulo L seja alterado é girar em torno do eixo z, como na Fig. 11-23*c*. Assim, $\vec{L}$ conserva o seu módulo, a extremidade do vetor $\vec{L}$ descreve uma trajetória circular e $\vec{\tau}$ é sempre tangente a essa trajetória. Como $\vec{L}$ tem sempre que apontar ao longo do eixo da roda, o eixo deve girar em torno do eixo z na direção de $\vec{\tau}$. Esta é a origem da precessão. Como o giroscópio em rotação obedece à segunda lei de Newton para rotações em resposta a qualquer mudança do momento angular inicial, realiza a precessão em vez de simplesmente tombar.

Podemos determinar a **velocidade de precessão** Ω usando primeiro as Eqs. 11-44 e 11-42 para obter o módulo de $d\vec{L}$:

$$dL = \tau\, dt = Mgr\, dt. \qquad (11\text{-}45)$$

Quando $\vec{L}$ varia de um valor incremental durante um tempo incremental dt, o eixo e $\vec{L}$ precessam em torno do eixo z de um ângulo incremental $d\phi$. (Na Fig. 11-23*c*, o ângulo $d\phi$ está exagerado para maior clareza.) Com a ajuda das Eqs. 11-43 e 11-45, descobrimos que $d\phi$ é dado por

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{Mgr\, dt}{I\omega}.$$

Dividindo esta expressão por dt e fazendo a velocidade de precessão Ω igual a $d\phi/dt$, obtemos:

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega} \quad \text{(velocidade de precessão).} \qquad (11\text{-}46)$$

Este resultado é válido contanto que a velocidade angular ω seja elevada. Note que Ω diminui quando ω aumenta. Observe também que não haveria precessão se a força gravitacional $M\vec{g}$ não agisse sobre o giroscópio; entretanto, como I é uma função linear de M, as massas no numerador e denominador da Eq. 11-46 se cancelam, ou seja, Ω não depende da massa do corpo.

A Eq. 11-46 também se aplica quando o eixo do giroscópio faz um ângulo diferente de zero com a horizontal. Ela também é válida para um pião inclinado, que é essencialmente um giroscópio cujo eixo faz um ângulo diferente de zero com a horizontal.

REVISÃO E RESUMO

Corpos em Rolamento No caso de uma roda de raio R rolando suavemente,

$$v_{CM} = \omega R, \qquad (11\text{-}2)$$

onde v_{CM} é a velocidade linear do centro de massa da roda e ω é a velocidade angular da roda em torno do seu centro. A roda pode também ser vista como se estivesse girando instantaneamente em torno do ponto P do "piso" que está em contato com a roda. A velocidade angular da roda em torno deste ponto é igual à velocidade angular da roda em torno do seu centro. Uma roda que rola possui uma energia cinética dada por

$$K = \tfrac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \tfrac{1}{2}Mv_{CM}^2 \qquad (11\text{-}5)$$

onde I_{CM} é o momento de inércia da roda em relação ao centro de massa e M é a massa da roda. Se a roda está sendo acelerada, mas ainda está rolando suavemente, a aceleração do centro de massa $\vec{a}_{CM}$ está relacionada à aceleração angular α em relação ao centro de rotação através da equação

$$a_{CM} = \alpha R. \qquad (11\text{-}6)$$

Se a roda desce uma rampa de ângulo θ rolando suavemente, sua aceleração ao longo de um eixo x ao longo da superfície da rampa é dada por

$$a_{CM,x} = -\frac{g \operatorname{sen}\theta}{1 + I_{CM}/MR^2}. \qquad (11\text{-}10)$$

O Torque como um Vetor Em três dimensões, o *torque* $\vec{\tau}$ é uma grandeza vetorial definida em relação a um ponto fixo (em geral a origem); ele é dado por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}. \qquad (11\text{-}14)$$

onde $\vec{F}$ é a força aplicada à partícula e $\vec{r}$ é o vetor posição da partícula em relação ao ponto fixo. O módulo de $\vec{\tau}$ é dado por

$$\tau = rF \operatorname{sen}\phi = rF_{\perp} = r_{\perp}F, \qquad (11\text{-}15, 11\text{-}16, 11\text{-}17)$$

onde ϕ é o ângulo entre $\vec{F}$ e $\vec{r}$, $F_{\perp}$ é a componente de $\vec{F}$ perpendicular a $\vec{r}$ e $r_{\perp}$ é o braço de alavanca de $\vec{F}$. A orientação de $\vec{\tau}$ é dada pela regra da mão direita.

Momento Angular de uma Partícula O *momento angular* $\vec{\ell}$ de uma partícula com momento linear $\vec{p}$, massa m e velocidade linear $\vec{v}$ é uma grandeza vetorial definida em relação a um ponto fixo (em geral a origem) como

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}). \qquad (11\text{-}18)$$

O módulo de $\vec{\ell}$ é dado por

$$\ell = rmv \operatorname{sen} \phi \qquad (11\text{-}19)$$
$$= rp_\perp = rmv_\perp \qquad (11\text{-}20)$$
$$= r_\perp p = r_\perp mv. \qquad (11\text{-}21)$$

onde ϕ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{p}$, $p_\perp$ e $v_\perp$ são as componentes de $\vec{p}$ e $\vec{v}$ perpendiculares a $\vec{r}$ e $r_\perp$ é a distância perpendicular entre o ponto fixo e a extensão de $\vec{p}$. A orientação de $\vec{\ell}$ é dada pela regra da mão direta para produtos vetoriais.

Segunda Lei de Newton para Rotações A segunda lei de Newton para uma partícula pode ser escrita na forma

$$\vec{\tau}_{res} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}, \qquad (11\text{-}23)$$

onde $\vec{\tau}_{res}$ é o torque resultante que age sobre a partícula e $\vec{\ell}$ é o momento angular da partícula.

Momento Angular de um Sistema de Partículas O momento angular $\vec{L}$ de um sistema de partículas é a soma vetorial dos momentos angulares das partículas:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \cdots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i. \qquad (11\text{-}26)$$

A taxa de variação com o tempo deste momento angular é igual ao torque externo resultante que age sobre o sistema (a soma vetorial dos torques produzidos pelas interações das partículas do sistema com partículas externas ao sistema):

$$\vec{\tau}_{res} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{(sistema de partículas).} \qquad (11\text{-}29)$$

Momento Angular de um Corpo Rígido Para um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo, a componente do momento angular paralela ao eixo de rotação é

$$L = I\omega \quad \text{(corpo rígido, eixo fixo).} \qquad (11\text{-}31)$$

Conservação do Momento Angular O momento angular $\vec{L}$ de um sistema permanece constante se o torque externo resultante que age sobre o sistema é nulo:

$$\vec{L} = \text{constante} \quad \text{(sistema isolado)} \qquad (11\text{-}32)$$

ou

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \quad \text{(sistema isolado).} \qquad (11\text{-}33)$$

Esta é a **lei de conservação do momento angular**.

Precessão de um Giroscópio Um giroscópio pode realizar um movimento de precessão em torno de um eixo vertical que passa pelo seu suporte com uma velocidade angular

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega}, \qquad (11\text{-}46)$$

onde M é a massa do giroscópio, r é o braço de alavanca, I é o momento de inércia e ω é a velocidade angular do giroscópio.

PERGUNTAS

1 Na Fig. 11-24, três forças de mesmo módulo são aplicadas a uma partícula localizada na origem ($\vec{F}_1$ é aplicada perpendicularmente ao plano do papel). Ordene as forças de acordo com os módulos dos torques que elas produzem (a) em relação ao ponto P_1, (b) em relação ao P_2 e (c) em relação ao ponto P_3, em ordem decrescente.

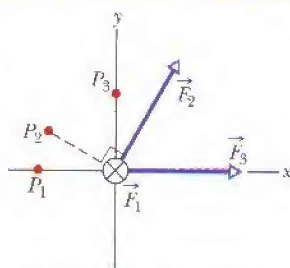


FIG. 11-24 Pergunta 1.

2 O vetor posição $\vec{r}$ de uma partícula em relação a um certo ponto tem um módulo de 3 m e a força $\vec{F}$ aplicada à partícula tem um módulo de 4 N. Qual é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$ se o módulo do torque associado é igual a (a) zero e (b) 12 N · m?

3 O que acontece ao ioiô inicialmente estacionário da Fig. 11-25 se ele é puxado através de sua corda (a) pela força $\vec{F}_2$ (cuja linha de ação passa pelo ponto de contato do ioiô com a mesa, como mostra a figura), (b) pela força $\vec{F}_1$ (cuja a linha de ação passa acima do ponto de contato) e (c) pela força $\vec{F}_3$ (cuja linha de ação passa à direita do ponto de contato)?

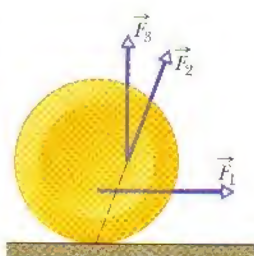


FIG. 11-25 Pergunta 3.

4 A Fig. 11-26 mostra duas partículas, A e B, nas coordenadas (1 m, 1 m, 0) e (1 m, 0, 1 m). Sobre cada partícula agem três forças numeradas, todas de mesmo módulo e cada uma paralela a um dos eixos. (a) Qual das forças produz um torque em relação à origem que é paralelo a y? (b) Ordene as forças de acordo com o módulo do torque que elas aplicam às partículas em relação à origem, em ordem decrescente.

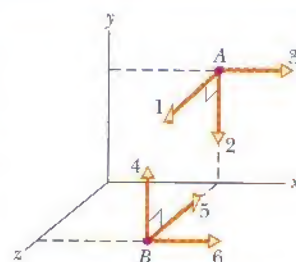


FIG. 11-26 Pergunta 4.

5 A Fig. 11-27 mostra três partículas de mesma massa e mesma velocidade escalar constante que se movem nas orientações indicadas pelos vetores velocidade. Os pontos a, b, c e d formam um quadrado, com o ponto e no centro. Ordene os pontos de acordo com o módulo do momento angular resultante do sistema de três partículas em relação aos pontos, em ordem decrescente.

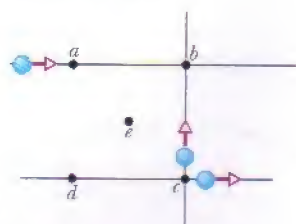


FIG. 11-27 Pergunta 5.

6 A Fig. 11-28 mostra uma partícula se movendo com velocidade constante $\vec{v}$ e cinco pontos com suas coordenadas xy.

Ordene os pontos de acordo com o módulo do momento angular da partícula em relação a eles, em ordem decrescente.

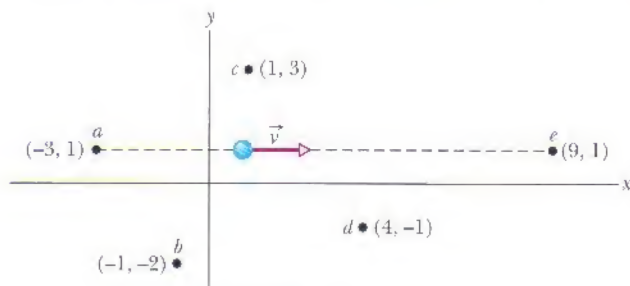


FIG. 11-28 Pergunta 6.

7 A Fig. 11-29 mostra o módulo do momento angular L de uma roda em função do tempo t. Ordene os quatro intervalos de tempo, indicados por letras, de acordo com o módulo do torque que age sobre a roda, em ordem decrescente.

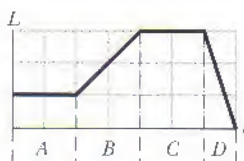


FIG. 11-29 Pergunta 7.

8 Os momentos angulares $\ell(t)$ de uma partícula em quatro situações são (1) $\ell = 3t + 4$; (2) $\ell = -6t^2$; (3) $\ell = 2$; (4) $\ell = 4/t$. Em que situação o torque resultante que age sobre a partícula é (a) zero, (b) positivo e constante, (c) negativo e com o módulo crescente para $t > 0$ e (d) negativo e com o módulo decrescente para $t > 0$?

9 Um besouro-rinoceronte está na borda de um disco horizontal que gira como um carrossel no sentido anti-horário. Se o besouro caminha ao longo da borda no sentido da rotação, os módulos das grandezas a seguir (medidas em relação ao eixo de rotação) aumentam, diminuem ou permanecem os mesmos (com o disco ainda girando no sentido anti-horário): (a) o momento angular do sistema besouro-disco, (b) o momento angular e a velocidade angular do besouro e (c) o momento angular e a velocidade angular do disco? (d) Quais são as respostas se o besouro caminha no sentido oposto ao da rotação?

10 A Fig. 11-30 mostra uma vista superior de uma placa retangular que pode girar como um carrossel em torno do centro O. Também são mostradas sete trajetórias ao longo das quais bolinhas de goma de mascar podem ser jogadas (todas com a mesma velocidade escalar e mesma massa) para grudar na placa estacionária. (a) Ordene as trajetórias, em ordem decrescente, de acordo com a velocidade angular que a placa (e a goma de mascar) após a goma grudar. (b) Para que trajetórias o momento angular da placa (e da goma) em relação ao ponto O é negativo do ponto de vista da Fig. 11-30?

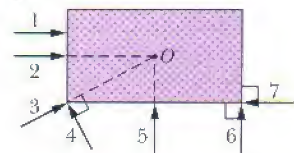


FIG. 11-30 Pergunta 10.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema


Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 11-2 O Rolamento como uma Combinação de Translação e Rotação

•1 Um carro se move a 80,0 km/h em uma estrada plana no sentido positivo de um eixo x. Cada pneu possui um diâmetro de 66 cm. Em relação a uma mulher que viaja no carro e em termos dos vetores unitários, qual é a velocidade $\vec{v}$ (a) no centro, (b) no alto e (c) na base de cada pneu e o módulo a da aceleração (d) no centro, (e) no alto e (f) na base de cada pneu? Em relação a uma pessoa sentada no acostamento da estrada e em termos dos vetores unitários, qual é a velocidade $\vec{v}$ (g) no centro, (h) no alto e (i) na base de cada pneu e o módulo da aceleração a (j) no centro, (k) no alto e (l) na base de cada pneu?

•2 Um automóvel que se move a 80 km/h possui pneus com 75,0 cm de diâmetro. (a) Qual é a velocidade angular dos pneus em relação aos respectivos eixos? (b) Se o carro é freado com aceleração constante e as rodas descrevem em 30 voltas completas (sem deslizamento), qual é o módulo da aceleração angular das rodas? (c) Que distância o carro percorre durante a frenagem?

seção 11-4 As Forças do Rolamento

•3 Um carro de 1000 kg tem quatro rodas de 10 kg. Quando o carro está em movimento, que fração da energia cinética total se deve à rotação das rodas em torno dos respectivos eixos? Suponha que as rodas têm o mesmo momento de inércia que discos uniformes da mesma massa e tamanho. Por que não é preciso conhecer o raio das rodas?

•4 Uma esfera maciça uniforme rola para baixo em um plano inclinado. (a) Qual deve ser o ângulo de inclinação do plano para que a aceleração linear do centro da esfera tenha um módulo de $0{,}10g$? (b) Se um bloco sem atrito deslizasse para baixo no mesmo plano inclinado, o módulo da aceleração seria maior, menor ou igual a $0{,}10g$? Por quê?

•5 Um aro de 140 kg rola em um piso horizontal de tal forma que seu centro de massa tem uma velocidade de 0,150 m/s. Qual é o trabalho necessário para fazê-lo parar?

••6 Uma esfera oca, com 0,15 m de raio e momento de inércia $I = 0{,}040\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ em relação a uma reta que passa pelo centro de massa, rola sem deslizar, subindo uma superfície com uma inclinação de 30° em relação à horizontal. Em uma certa posição inicial a energia cinética total da esfera é 20 J. (a) Quanto desta energia cinética inicial se deve à rotação? (b) Qual é a velocidade do centro de massa da esfera na posição inicial? Após a esfera ter se deslocado 1,0 m ao longo da superfície inclinada a partir da posição inicial, quais são (c) a energia cinética total e (d) a velocidade do centro de massa?

••7 Na Fig. 11-31 uma força horizontal constante $\vec{F}_{ap}$ de módulo 10 N é aplicada a uma roda de massa 10 kg e raio 0,30 m. A roda rola suavemente na superfície horizontal, e o módulo da aceleração do centro de massa é 0,60 m/s². (a) Em termos dos vetores unitários, qual é a força de atrito que age sobre a roda? (b) Qual é o momento de inércia da roda em relação ao eixo de rotação que passa pelo centro de massa?

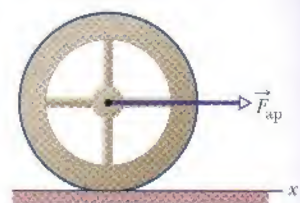


FIG. 11-31 Problema 7.

••8 Na Fig. 11-32, uma bola maciça de latão de massa 0,280 g rola suavemente ao longo do trilho quando é liberada a partir do repouso no trecho retilíneo. A parte circular do trilho tem um raio R = 14,0 cm e a bola tem um raio $r \ll R$. (a) Quanto vale h se a bola está na iminência de perder contato com o trilho quando chega ao ponto mais alto da parte curva do trilho? Se a bola é liberada a uma altura $h = 6{,}00R$, quais são (b) o módulo e (c) a orientação da componente horizontal da força que age sobre a bola no ponto Q?

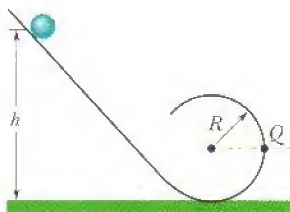


FIG. 11-32 Problema 8.

••9 Na Fig. 11-33, um cilindro maciço de raio 10 cm e massa 12 kg parte do repouso e rola para baixo uma distância L = 6,0 m, sem deslizar, em um teto inclinado de um ângulo θ = 30°. (a) Qual é a velocidade angular do cilindro em relação ao seu centro ao deixar o teto? (b) A borda do teto está a uma altura H = 5,0 m. A que distância horizontal da borda do teto o cilindro atinge o chão?

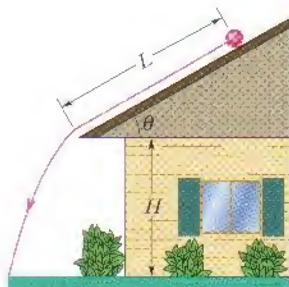


FIG. 11-33 Problema 9.

••10 A Fig. 11-34 mostra a velocidade escalar v em função do tempo t para um objeto de 0,500 kg e 6,00 cm de raio que rola suavemente para baixo em uma rampa de 30°. A escala do eixo das velocidades é definida por v_s = 4,0 m/s. Qual é o momento de inércia do objeto?

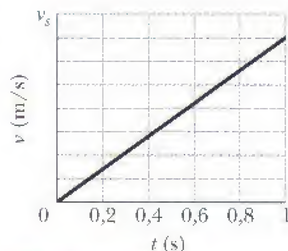


FIG. 11-34 Problema 10.

••11 Na Fig. 11-35, uma bola maciça rola suavemente a partir do repouso (começando na altura H = 6,0 m) até deixar a parte horizontal no fim da pista, a uma altura h = 2,0 m. A que distância horizontal do ponto A a bola toca o chão?

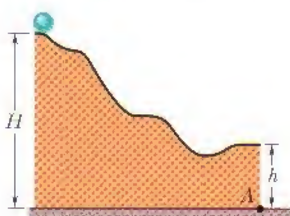


FIG. 11-35 Problema 11.

••12 A Fig. 11-36 mostra a energia potencial $U(x)$ de uma bola maciça que pode rolar ao longo de um eixo x. A escala do eixo U é definida por U_s = 100 J. A bola é uniforme, rola suavemente e possui uma massa de 0,400 kg. Ela é liberada em x = 7,0 m quando se move no sentido negativo do eixo x com uma energia mecânica de 75 J. (a) Se a bola pode chegar ao ponto x = 0 m, qual é sua velocidade nesse ponto, e se não pode, qual é o ponto de retorno? Suponha que a bola esteja se movendo no sentido positivo do eixo x ao ser liberada em x = 7,0 m com 75 J. (b) Se a bola pode chegar ao ponto x = 13 m, qual é sua velocidade nesse ponto e se não pode, qual é o ponto de retorno?

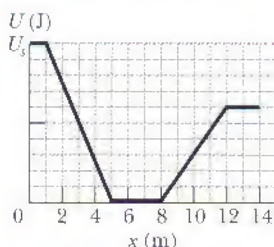


FIG. 11-36 Problema 12.

••13 Um jogador de boliche arremessa uma bola de raio R = 11 cm ao longo de uma pista. A bola (Fig. 11-37) desliza sobre a pista com velocidade inicial $v_{CM,0}$ = 8,5 m/s e velocidade angular inicial ω_0 = 0. O coeficiente de atrito cinético entre a bola e a pista é 0,21. A força de atrito cinético $\vec{f}_k$ que age sobre a bola produz uma aceleração linear e uma aceleração angular. Quando a velocidade v_{CM} diminui o suficiente e a velocidade angular ω aumenta o suficiente, a bola pára de deslizar e passa a rolar suavemente. (a) Qual é valor de v_{CM} em termos de ω nesse instante? Durante o deslizamento, quais são (b) a aceleração linear e (c) a aceleração angular da bola? (d) Por quanto tempo a bola desliza? (e) Que distância a bola desliza? (f) Qual é a velocidade linear da bola quando começa a rolar suavemente?

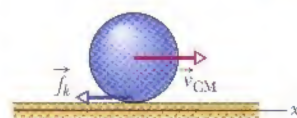


FIG. 11-37 Problema 13.

••14 Na Fig. 11-38 uma bola pequena, maciça e uniforme é lançada do ponto P, rola suavemente em uma superfície horizontal, sobe uma rampa e chega a um platô. Em seguida, deixa o platô horizontalmente para pousar em outra superfície mais abaixo, a uma distância horizontal d da extremidade do platô. As alturas verticais são h_1 = 5,00 cm e h_2 = 1,60 cm. Com que velocidade a bola deve ser lançada no ponto P para ela pousar em d = 6,00 cm?

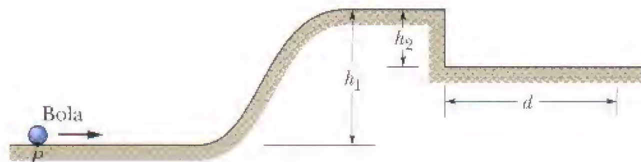


FIG. 11-38 Problema 14.

•••15 *Bola não-uniforme.* Na Fig. 11-39, uma bola de massa M e raio R rola suavemente, a partir do repouso, descendo uma rampa e passando por uma pista circular com 0,48 m de raio. A altura inicial da bola é h = 0,36 m. Na parte mais baixa da curva o módulo da força normal que a pista exerce sobre a bola é 2,00Mg. A bola é formada por uma casca esférica externa (com uma certa densidade uniforme) e uma esfera central (com uma densidade uniforme diferente). O momento de inércia da bola é dado pela expressão geral $I = \beta MR^2$, mas β não é igual a 0,4, como no caso de uma bola de densidade uniforme. Determine o valor de β.



FIG. 11-39 Problema 15.

•••16 *Objeto cilíndrico não-uniforme.* Na Fig. 11-40, um objeto cilíndrico de massa M e raio R rola suavemente descendo uma rampa, a partir do repouso, e passa para um trecho horizontal da pista. Em seguida, rola para fora da pista, pousando a uma distância horizontal d = 0,506 m da extremidade da pista. A altura inicial do objeto é H = 0,90 m; a extremidade da pista está a uma altura h = 0,10 m. O objeto é composto por uma camada cilín-

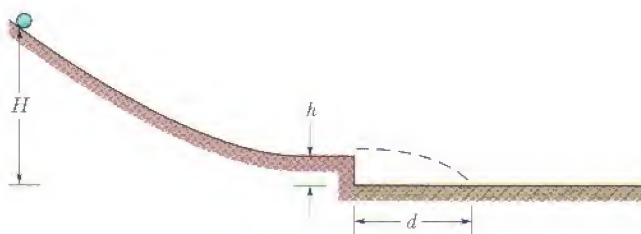


FIG. 11-40 Problema 16.

drica externa (com uma certa densidade uniforme) e um cilindro central (com uma densidade uniforme diferente). O momento de inércia do objeto é dado pela expressão geral $I = \beta MR^2$, mas β não é igual a 0,5, como no caso de um cilindro uniforme. Determine o valor de β.

seção 11-5 O Ioiô

•17 Um ioiô possui um momento de inércia de 950 g · cm² e uma massa de 120 g. O raio do seu eixo é 3,2 mm e sua corda tem 120 cm de comprimento. O ioiô rola, a partir do repouso, até a extremidade da corda. (a) Qual é o módulo da aceleração linear do ioiô? (b) Quanto tempo ele leva para chegar à extremidade da corda? Ao chegar à extremidade da corda, qual é (c) a velocidade linear, (d) a energia cinética de translação, (e) a energia cinética de rotação e (f) a velocidade angular?

•18 Em 1980, um grande ioiô foi solto de um guindaste sobre a baía de San Francisco. O ioiô de 116 kg era formado por dois discos uniformes com 32 cm de raio, ligados por um eixo com 3,2 cm de raio. Qual foi o módulo da aceleração do ioiô (a) durante a descida e (b) durante a subida? (c) Qual foi a tensão na corda? (d) A tensão estava próxima do limite de resistência da corda, 52 kN? Suponha que você construa uma versão ampliada do ioiô (mesma forma e mesmos materiais, porém maior). (e) O módulo da aceleração do seu ioiô durante a queda será maior, menor ou o igual ao do ioiô de San Francisco? (f) E a tensão na corda?

seção 11-6 Revisão do Torque

•19 Em termos dos vetores unitários, qual é o torque em relação à origem a que está submetida uma partícula localizada nas coordenadas (0, −4,0 m, 3,0 m) se esse torque se deve (a) a uma força $\vec{F}_1$ de componentes $F_{1x} = 2{,}0$ N, $F_{1y} = F_{1z} = 0$ e (b) a uma força $\vec{F}_2$ de componentes $F_{2x} = 0$, $F_{2y} = 2{,}0$ N, $F_{2z} = 4{,}0$ N?

•20 Uma ameixa está localizada nas coordenadas (−2,0 m, 0, 4,0 m). Em termos dos vetores unitários, qual é o torque em relação à origem a que está submetida a ameixa se esse torque se deve a uma força $\vec{F}$ cuja única componente é (a) $F_x = 6{,}0$ N, (b) $F_x = -6{,}0$ N, (c) $F_z = 6{,}0$ N, (d) $F_z = -6{,}0$ N?

•21 Em termos dos vetores unitários, qual é o torque resultante em relação à origem a que está submetida uma pulga localizada nas coordenadas (0, −4,0 m, 5,0 m) quando as forças $\vec{F}_1 = (3{,}0\text{ N})\hat{k}$ e $\vec{F}_2 = (-2{,}0\text{ N})\hat{j}$ agem sobre a pulga?

••22 Em termos dos vetores unitários, qual é o torque em relação à origem a que está submetido um vidro de pimenta localizado nas coordenadas (3,0 m, −2,0 m, 4,0 m) devido (a) à força $\vec{F}_1 = (3{,}0\text{ N})\hat{i} - (4{,}0\text{ N})\hat{j} + (5{,}0\text{ N})\hat{k}$, (b) à força $\vec{F}_2 = (-3{,}0\text{ N})\hat{i} - (4{,}0\text{ N})\hat{j} - (5{,}0\text{ N})\hat{k}$ e (c) à soma vetorial de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$? (d) Repita o item (c) para o torque em relação ao ponto de coordenadas (3,0 m, 2,0 m, 4,0 m).

••23 A força $\vec{F} = (-8{,}0\text{ N})\hat{i} + (6{,}0\text{ N})\hat{j}$ age sobre uma partícula cujo vetor posição é $\vec{r} = (3{,}0\text{ m})\hat{i} + (4{,}0\text{ m})\hat{j}$. Quais são (a) o torque em relação à origem a que está submetida a partícula, em termos dos vetores unitários, e (b) o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$?

••24 Uma partícula se move em um sistema de coordenadas xyz sob a ação de uma força. Quando o vetor posição da partícula é $\vec{r} = (2{,}00\text{ m})\hat{i} + (3{,}00\text{ m})\hat{j} + (2{,}00\text{ m})\hat{k}$, a força é $\vec{F} = F_x\hat{i} + (7{,}00\text{ N})\hat{j} - (6{,}00\text{ N})\hat{k}$ e o torque correspondente em relação à origem é $\vec{\tau} = (4{,}00\text{ N}\cdot\text{m})\hat{i} + (2{,}00\text{ N}\cdot\text{m})\hat{j} - (1{,}00\text{ N}\cdot\text{m})\hat{k}$. Determine F_x.

••25 A força $\vec{F} = (2{,}0\text{ N})\hat{i} - (3{,}0\text{ N})\hat{k}$ age sobre uma pedra cujo vetor posição é $\vec{r} = (0{,}50\text{ m})\hat{j} - (2{,}0\text{ m})\hat{k}$ em relação à origem. Em termos dos vetores unitários, qual é o torque resultante a que a pedra está submetida (a) em relação à origem e (b) em relação ao ponto (2,0 m, 0, −3,0 m)?

seção 11-7 Momento Angular

•26 Um objeto de 2,0 kg, que se comporta como uma partícula, se move em um plano com componentes de velocidade $v_x = 30$ m/s e $v_y = 60$ m/s ao passar por um ponto de coordenadas (3,0, −4,0) m. Nesse instante, em termos dos vetores unitários, qual é o momento angular do objeto em relação (a) à origem e (b) ao ponto (−2,0, −2,0) m?

•27 No instante da Fig. 11-41, duas partículas se movem em um plano xy. A partícula P_1 possui uma massa de 6,5 kg e uma velocidade $v_1 = 2{,}2$ m/s e está a uma distância $d_1 = 1{,}5$ m do ponto O. A partícula P_2 possui uma massa de 3,1 kg e uma velocidade $v_2 = 3{,}6$ m/s e está a uma distância $d_2 = 2{,}8$ m do ponto O. Quais são (a) o módulo e (b) a orientação do momento angular resultante das duas partículas em relação ao ponto O?

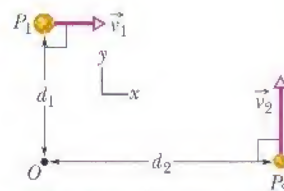


FIG. 11-41 Problema 27.

•28 No instante da Fig. 11-42, uma partícula P de 2,0 kg possui um vetor posição $\vec{r}$ de módulo 3,0 m e ângulo $\theta_1 = 45°$ e uma velocidade $\vec{v}$ de módulo 4,0 m/s e ângulo $\theta_2 = 30°$. A força $\vec{F}$, de módulo 2,0 N e ângulo $\theta_3 = 30°$, age sobre P. Os três vetores estão no plano xy. Quais são, em relação à origem, (a) o módulo, (b) a orientação do momento angular de P, (c) o módulo e (d) a orientação do torque que age sobre P?

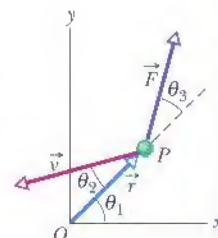


FIG. 11-42 Problema 28.

•29 Em um certo instante, a força $\vec{F} = 4{,}0\hat{j}$ N age sobre um objeto de 0,25 kg cujo vetor posição é $\vec{r} = (2{,}0\hat{i} - 2{,}0\hat{k})$ m e cujo vetor velocidade é $\vec{v} = (-5{,}0\hat{i} + 5{,}0\hat{k})$ m/s. Em relação à origem e em termos dos vetores unitários, quais são (a) o momento angular do objeto e (b) o torque que age sobre o objeto?

••30 No instante em que o deslocamento de um objeto de 2,00 kg em relação à origem é $\vec{d} = (2{,}00\text{ m})\hat{i} + (4{,}00\text{ m})\hat{j} - (3{,}00\text{ m})\hat{k}$, sua velocidade é $\vec{v} = -(6{,}00\text{ m/s})\hat{i} + (3{,}00\text{ m/s})\hat{j} + (3{,}00\text{ m/s})\hat{k}$ e ele está sujeito a uma força $\vec{F} = (6{,}00\text{ N})\hat{i} - (8{,}00\text{ N})\hat{j} + (4{,}00\text{ N})\hat{k}$. Determine (a) a aceleração do objeto, (b) o momento angular do objeto em relação à origem, (c) o torque em relação à origem a que está submetido o objeto e (d) o ângulo entre a velocidade do objeto e a força que age sobre ele.

••31 Na Fig. 11-43, uma bola de 0,400 kg é lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 40,0 m/s. Qual é o seu momento angular em relação a P, um ponto a uma distância horizontal de 2,00 m do ponto de lançamento, quando a bola está (a) na altura máxima e (b) na metade do caminho de volta ao chão? Qual é o torque em relação a P a que a bola é submetida devido à força gravitacional quando está (c) na altura máxima e (d) na metade do caminho de volta ao chão?

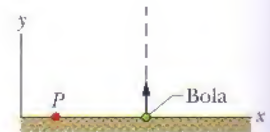


FIG. 11-43 Problema 31.

seção 11-8 Segunda Lei de Newton para Rotações

•32 Uma partícula se move em um plano xy em torno da origem, no sentido horário, do ponto de vista do lado positivo do

eixo z. Em termos dos vetores unitários, qual é o torque que age sobre a partícula se o módulo do momento angular da partícula em relação à origem é (a) 4,0 kg · m²/s, (b) $4{,}0t^2$ kg · m²/s, (c) $4{,}0\sqrt{t}$ kg · m²/s e (d) $4{,}0/t^2$ kg · m²/s?

•33 Uma partícula de 3,0 kg com uma velocidade $\vec{v} = (5{,}0\ \text{m/s})\hat{\text{i}} - (6{,}0\ \text{m/s})\hat{\text{j}}$ está em $x = 3{,}0$ m, $y = 8{,}0$ m. Ela é puxada por uma força de 7,0 N no sentido negativo do eixo x. Quais são, em relação à da origem, (a) o momento angular da partícula, (b) o torque que age sobre a partícula e (c) a taxa com a qual o momento angular está variando?

•34 Uma partícula sofre a ação de dois torques em relação à origem: $\vec{\tau}_1$ tem módulo 2,0 N · m e aponta no sentido positivo do eixo x; $\vec{\tau}_2$ tem módulo 4,0 N · m e aponta no sentido negativo do eixo y. Determine $d\vec{\ell}/dt$, onde $\vec{\ell}$ é o momento angular da partícula em relação à origem, em termos dos vetores unitários.

•35 No instante t, $\vec{r} = 4{,}0t^2\hat{\text{i}} - (2{,}0t + 6{,}0t^2)\hat{\text{j}}$ fornece a posição de uma partícula de 3,0 kg em relação à origem de um sistema de coordenadas xy ($\vec{r}$ está em metros e t em segundos). (a) Escreva uma expressão para o torque em relação à origem que age sobre a partícula. (b) O módulo do momento angular da partícula em relação à origem está aumentando, diminuindo ou permanece o mesmo?

seção 11-10 Momento Angular de um Corpo Rígido Girando em Torno de um Eixo Fixo

•36 Um disco de polimento, com momento de inércia $1{,}2 \times 10^{-3}$ kg · m², está preso a uma broca elétrica cujo motor produz um torque de módulo 16 N · m em relação ao eixo central do disco. Com o torque aplicado durante 33 ms, qual é o módulo (a) do momento angular e (b) da velocidade angular do disco em relação a esse eixo?

•37 O momento angular de um volante com um momento de inércia de 0,140 kg · m² em relação ao eixo central diminui de 3,00 para 0,800 kg · m²/s em 1,50 s. (a) Qual é o módulo do torque médio em relação ao eixo central que age sobre o volante durante esse período? (b) Supondo uma aceleração angular constante, de que ângulo o volante gira? (c) Qual é o trabalho realizado sobre o volante? (d) Qual é a potência média do volante?

•38 A Fig. 11-44 mostra três discos uniformes acoplados por correias. Uma correia passa pelas bordas dos discos A e C; a outra passa por um cubo do disco A e pela borda do disco B. As correias se movem suavemente, sem deslizar nas bordas e no eixo central. O disco A tem raio R e seu cubo tem raio $0{,}5000R$; o disco B tem raio $0{,}2500R$; o disco C tem raio $2{,}000R$. Os discos B e C têm a mesma massa específica (massa por unidade de volume) e mesma espessura. Qual é a razão entre o módulo do momento angular do disco C e o módulo do momento angular do disco B?

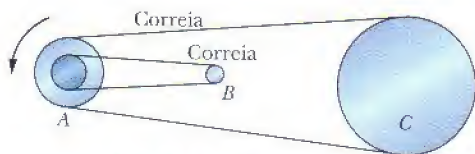


FIG. 11-44 Problema 38.

•39 Na Fig. 11-45, três partículas de massa $m = 23$ g estão presas a três barras de comprimento $d = 12$ cm e massa desprezível. O conjunto gira em torno do ponto O com velocidade angular $\omega = 0{,}85$ rad/s. Em relação ao ponto O, quais são (a) o momento de inércia do conjunto, (b) o módulo do momento angular da partícula do meio e (c) o módulo do momento angular do conjunto?

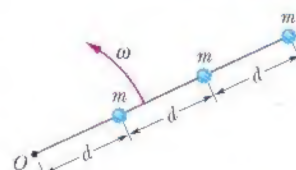


FIG. 11-45 Problema 39.

••40 A Fig. 11-46 mostra o torque τ que age sobre um disco inicialmente estacionário que pode girar em torno do seu centro como um carrossel em função do tempo. Qual é o momento angular do disco em relação ao eixo de rotação nos instantes (a) $t = 7{,}0$ s e (b) t = 20 s?

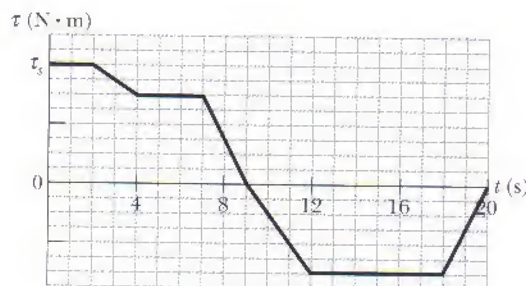


FIG. 11-46 Problema 40.

••41 A Fig. 11-47 mostra uma estrutura rígida formada por um aro de raio R e massa m e um quadrado feito de quatro barras finas de comprimento R e massa m. A estrutura rígida gira com velocidade constante em torno de um eixo vertical, com um período de rotação de 2,5 s. Supondo que $R = 0{,}50$ m e $m = 2{,}0$ kg, calcule (a) o momento de inércia da estrutura em relação ao eixo de rotação e (b) o momento angular da estrutura em relação ao eixo.

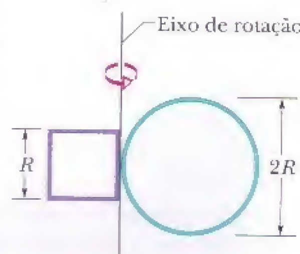


FIG. 11-47 Problema 41.

••42 Um disco com um momento de inércia de 7,00 kg · m² gira como um carrossel sob o efeito de um torque dado por $\tau = (5{,}00 + 2{,}00t)$ N · m. No instante $t = 1{,}00$ s, o momento angular do disco é 5,00 kg · m²/s. Qual é o momento angular do disco no instante $t = 3{,}00$ s?

seção 11-11 Conservação do Momento Angular

•43 Um homem está em pé sobre uma plataforma que gira (sem atrito) com uma velocidade angular de 1,2 rev/s; seus braços estão abertos e ele segura um tijolo em cada mão. O momento de inércia do sistema formado por homem, os tijolos e a plataforma em relação ao eixo vertical central da plataforma é de 6,0 kg · m². Se, ao mover os braços, o homem reduz o momento de inércia do sistema para 2,0 kg · m², determine (a) a nova velocidade angular da plataforma e (b) a razão entre a nova energia cinética do sistema e a energia cinética inicial. (c) De onde vem a energia cinética adicional?

•44 O rotor de um motor elétrico tem um momento de inércia $I_m = 2{,}0 \times 10^{-33}$ kg · m² em relação ao eixo central. O motor é usado para mudar a orientação da sonda espacial no qual está montado. O eixo do motor coincide com o eixo central da sonda; a sonda possui um momento de inércia $I_p = 12$ kg · m² em relação a desse eixo. Calcule o número de revoluções do rotor necessárias para fazer a sonda girar 30° em torno do eixo central.

•**45** Uma roda está girando livremente com uma velocidade angular de 800 rev/min em torno de um eixo cujo momento de inércia é desprezível. Uma segunda roda, inicialmente em repouso e com um momento de inércia duas vezes maior que a primeira, é acoplada à mesma haste. (a) Qual é a velocidade angular da combinação resultante do eixo e as duas rodas? (b) Que fração da energia cinética de rotação inicial é perdida?

•**46** Uma barata está no centro de um disco circular que gira livremente como um carrossel, sem torques externos. A barata caminha em direção à borda do disco, cujo raio é R. A Fig. 11-48 mostra a velocidade angular ω do sistema barata-disco durante a caminhada. A escala do eixo ω é definida por $\omega_a = 5{,}0$ rad/s e $\omega_b = 6{,}0$ rad/s. Quando a barata está na borda do disco, qual é a razão entre o momento de inércia do inseto e o momento de inércia do disco, ambos calculados em relação ao eixo de rotação?

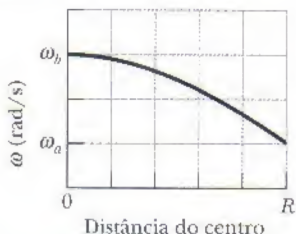


FIG. 11-48 Problema 46.

•**47** Dois discos estão montados (como um carrossel) em rolamentos de baixo atrito do mesmo eixo e podem ser acoplados e girar como se fossem um só. O primeiro disco, com um momento de inércia de 3,30 kg · m^2 em relação ao eixo central, é posto para girar no sentido anti-horário a 450 rev/min. O segundo disco, com um momento de inércia de 6,60 kg · m^2 em relação ao eixo central, é posto para girar no sentido anti-horário a 900 rev/min. Em seguida, os discos são acoplados. (a) Qual é a velocidade angular dos discos após o acoplamento? Se, em vez disso, o segundo disco é posto para girar a 900 rev/min no sentido horário, quais são (b) a velocidade angular e (c) o sentido de rotação dos discos após o acoplamento?

•**48** O momento de inércia de uma estrela que diminui de tamanho enquanto está girando em torno de si mesma cai para 1/3 do valor inicial. Qual é a razão entre a nova energia cinética de rotação e a energia antiga?

•**49** Uma pista é montada em uma grande roda que pode girar livremente, com atrito desprezível, em torno de um eixo vertical (Fig. 11-49). Um trem de brinquedo de massa m é colocado na pista e, com o sistema inicialmente em repouso, a alimentação elétrica do brinquedo é ligada. O trem adquire uma velocidade de 0,15 m/s em relação à pista. Qual é a velocidade angular da roda se sua massa é 1,1m e seu raio é 0,43 m? (Trate a roda como um aro e despreze as massas dos raios e do cubo da roda.)

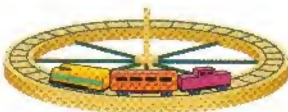


FIG. 11-49 Problema 49.

•**50** Uma barata de massa 0,17 kg corre no sentido anti-horário na borda de um disco circular de raio 15 cm e momento de inércia $5{,}0 \times 10^{-3}$ kg · m^2, montado em eixo vertical com atrito desprezível. A velocidade da barata (em relação ao chão) é de 2,0 m/s e o disco gira no sentido horário com uma velocidade angular $\omega_0 = 2{,}8$ rad/s. A barata encontra uma migalha de pão na borda e, obviamente, pára. (a) Qual é a velocidade angular do disco depois que a barata pára? (b) A energia mecânica é conservada quando a barata pára?

•**51** Na Fig. 11-50, duas patinadoras, ambas com uma massa de 50 kg, se aproximam uma da outra ao longo de trajetórias paralelas separadas por 3,0 m. Elas têm velocidades opostas de 1,4 m/s cada uma. Uma das patinadoras carrega uma vara comprida, de massa desprezível, segurando-a em uma extremidade, e a outra se agarra à outra extremidade ao passar por ela, o que faz com que as patinadoras passem a descrever uma circunferência em torno do centro da vara. Suponha que o atrito entre as patinadoras e o gelo seja desprezível. Quais são (a) o raio da circunferência, (b) a velocidade angular das patinadoras e (c) a energia cinética do sistema das duas patinadoras? Em seguida, as patinadoras puxam a vara até ficarem separadas por uma distância de 1,0 m. Nesse momento, qual é (d) a velocidade angular das patinadoras e (e) a energia cinética do sistema? (f) De onde vem a energia cinética adicional?



FIG. 11-50 Problema 51.

•**52** Uma boleadeira é composta por três esferas pesadas iguais, ligadas a um ponto comum por cordas resistentes de mesmo comprimento (Fig. 11-51a). Para lançar esta arma inventada na América do Sul você segura uma das esferas acima da cabeça e faz a mão girar em torno do pulso para fazer as outras duas esferas girarem em um plano horizontal em torno da mão. Depois de conseguir uma velocidade de rotação suficiente você arremessa a arma em direção ao alvo. Inicialmente a boleadeira gira em torno na esfera que foi mantida fixa, mas em pouco tempo todas as esferas passam a girar em torno do ponto comum das três cordas com velocidade angular ω_f (Fig. 11-51b). (a) Qual é a razão ω_f/ω_i? (b) Qual é a razão das energias cinéticas de rotação correspondentes, K_f/K_i, no referencial do centro de massa?

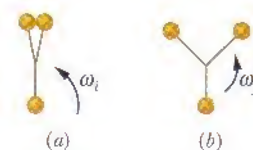


FIG. 11-51 Problema 52.

•**53** Um disco de vinil horizontal de massa 0,10 kg e raio 0,10 m gira livremente em torno de um eixo vertical que passa pelo centro com uma velocidade angular de 4,7 rad/s. O momento de inércia do disco em relação ao eixo de rotação é $5{,}0 \times 10^{-4}$ kg · m^2. Um pedaço de massa de modelar de massa 0,020 kg cai verticalmente e gruda na borda do disco. Qual é a velocidade angular do disco imediatamente após a massa cair?

••**54** No salto em distância, um atleta deixa o solo com um momento angular que tende a fazer seu corpo rolar para a frente, o que o faria chegar ao chão na posição errada. O atleta combate esta tendência fazendo girar os braços estendidos para "absorver" o momento angular (Fig. 11-19). Em 0,700 s, um dos braços descreve 0,500 rev e o outro descreve 1,000 rev. Trate cada braço como uma barra fina de massa 4,0 kg e comprimento 0,60 m, girando em torno da extremidade. Qual é o módulo do momento angular total dos braços do atleta em relação a um eixo de rotação comum, passando pelos ombros, no referencial do atleta?

••**55** Uma barra fina uniforme com 0,500 m de comprimento e massa 4,00 kg pode girar em um plano horizontal em torno de um eixo vertical passando pelo centro. A barra está em repouso quando uma bala de 3,0 g é disparada, no plano de rotação, em direção a uma das suas extremidades. Vista de cima, a trajetória da bala faz um ângulo $\theta = 60{,}0°$ com a haste (Fig. 11-52). Se a bala se aloja na barra e a velocidade angular da barra é 10 rad/s imediatamente após a colisão, qual é a velocidade da bala imediatamente antes do impacto?

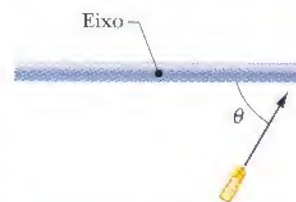


FIG. 11-52 Problema 55.

••56 Uma barata de massa m está na borda de um disco uniforme de massa 4,00m que pode girar livremente em torno do centro como um carrossel. Inicialmente, a barata e o disco giram juntos com uma velocidade angular de 0,260 rad/s. A barata caminha até metade da distância ao centro do disco. (a) Qual é, nesse momento, a velocidade angular do sistema barata-disco? (b) Qual é a razão K/K_0 entre a nova energia cinética do sistema e a sua energia cinética antiga? (c) Por que a energia cinética varia?

••57 A Fig. 11-53 é uma vista de cima de uma barra fina uniforme de comprimento 0,800 m e massa M girando horizontalmente a 20,0 rad/s no sentido anti-horário em torno de um eixo que passa pelo centro. Uma partícula de massa M/3,00, inicialmente presa a uma extremidade da barra, é liberada e assume uma trajetória que é perpendicular à barra no instante em que a partícula foi liberada. Se a velocidade v_p da partícula é 6,00 m/s maior que a velocidade da barra imediatamente após a liberação, qual é o valor de v_p?

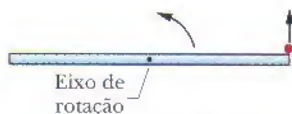


FIG. 11-53 Problema 57.

••58 Na Fig. 11-54 uma bala de 1,0 g é disparada em um bloco de 0,50 kg preso à extremidade de uma barra não-uniforme de 0,60 m de comprimento e uma massa de 0,50 kg. O sistema bloco-barra-bala passa a girar no plano do papel, em torno de um eixo fixo que passa por A. O momento de inércia da barra em relação a esse eixo é 0,060 kg · m². Trate o bloco como uma partícula. (a) Qual é o momento de inércia do sistema bloco-haste-bala em relação ao eixo que passa pelo ponto A? (b) Se a velocidade angular do sistema em relação ao eixo que passa por A imediatamente após o impacto é 4,5 rad/s, qual é a velocidade da bala imediatamente antes do impacto?

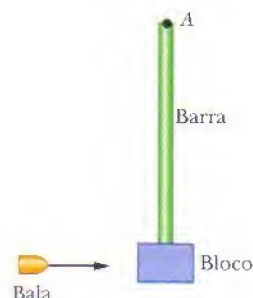


FIG. 11-54 Problema 58.

••59 Um disco uniforme de massa 10m e raio 3,0r pode girar livremente como um carrossel em torno do centro fixo. Um disco uniforme menor de massa m e raio r está sobre o disco maior, concêntrico com ele. Inicialmente, os dois discos giram juntos com uma velocidade angular de 20 rad/s. Em seguida, uma pequena perturbação faz com que o disco menor deslize para fora em relação ao disco maior, até que a sua borda fique presa na borda do disco maior. Depois disso, os dois discos passam novamente a girar juntos (sem que haja novos deslizamentos). (a) Qual é a velocidade angular final dos sistema em relação ao centro do disco maior? (b) Qual é a razão K/K_0 entre a nova energia cinética do sistema e a energia cinética inicial?

••60 Uma plataforma horizontal com a forma de um disco circular gira sem atrito em torno de um eixo vertical que passa pelo centro do disco. A plataforma tem uma massa de 150 kg, um raio de 2,0 m e um momento de inércia de 300 kg · m² em relação ao eixo de rotação. Uma estudante de 60 kg caminha lentamente da borda da plataforma em direção ao centro. Se a velocidade angular do sistema é 1,5 rad/s quando a estudante está na borda, qual é a velocidade angular quando ela está a 0,50 m de distância do centro?

••61 A barra uniforme (de 0,60 m de comprimento e 1,0 kg de massa) da Fig. 11-55 gira no plano do papel em torno de um eixo que passa por uma das extremidades, com um momento de inércia de 0,12 kg · m². Quando a barra passa pela posição mais baixa colide com um pedaço de massa de modelar de 0,20 kg, que fica grudada na sua extremidade. Se a velocidade angular da barra imediatamente antes da colisão é 2,4 rad/s, qual é a velocidade angular do sistema haste-massa de modelar imediatamente após a colisão?

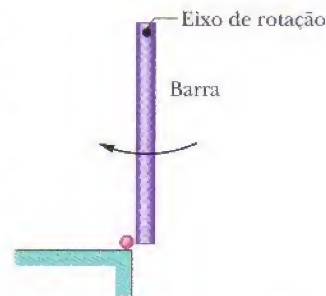


FIG. 11-55 Problema 61.

•••62 Uma bailarina começa um *tour jeté* (Fig. 11-20a) com uma velocidade angular ω_i e um momento angular formado por duas partes: I_{perna} = 1,44 kg · m² da perna estendida, que faz um ângulo θ = 90,0° com o corpo, e I_{tronco} = 0,660 kg · m² do resto do corpo (principalmente o tronco). Quando está quase atingindo a altura máxima suas duas pernas fazem uma ângulo θ = 30° com o corpo e sua velocidade angular é ω_f (Fig. 11-20b). Supondo que I_{tronco} permanece o mesmo, qual é a valor da razão ω_f/ω_i?

•••63 A Fig. 11-56 é uma vista de cima de uma barra fina uniforme de comprimento 0,600 m e massa M girando horizontalmente a 80,0 rad/s no sentido anti-horário em torno de um eixo que passa pelo centro. Uma partícula de massa M/3,00, que se move horizontalmente com uma velocidade de 40,0 m/s, choca-se com a barra e fica presa. A trajetória da partícula é perpendicular à barra no momento do choque, que ocorre a uma distância d do centro da barra. (a) Para que valor de d a barra e a partícula permanecem em repouso após o choque? (b) Em que sentido a barra e a partícula começam a girar se d é maior que o valor calculado no item (a)?

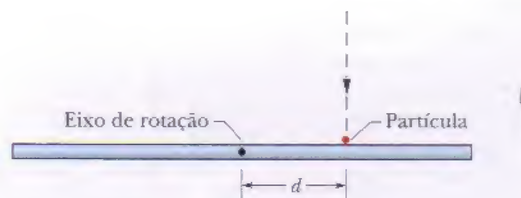


FIG. 11-56 Problema 63.

•••64 Durante um salto até seu companheiro de número, um trapezista pretende fazer quatro cambalhotas em um intervalo de tempo Δt = 1,87 s. Durante o primeiro e último quarto de cambalhota ele mantém o corpo esticado como na Fig. 11-57, com um momento de inércia I_1 = 19,9 kg · m² em relação ao centro de

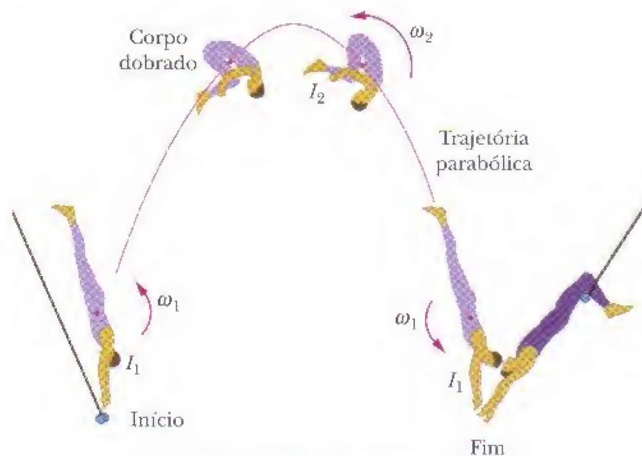


FIG. 11-57 Problema 64.

massa (o ponto da figura). Durante o resto do percurso ele mantém o corpo dobrado, com um momento de inércia $I_2 = 3{,}93$ kg · m^2. Qual deve ser a velocidade angular ω_2 do trapezista quando está com o corpo dobrado?

•••**65** Na Fig. 11-58, uma criança de 30 kg está em pé na borda de um carrossel estacionário de massa 100 kg e raio 2,0 m. O momento de inércia do carrossel em relação ao eixo de rotação é 150 kg · m^2. A criança agarra uma bola de massa 1,0 kg lançada por um colega. Imediatamente antes de a bola ser agarrada ela tem uma velocidade $\vec{v}$ de módulo 12 m/s, fazendo um ângulo $\phi = 37°$ com uma reta tangente à borda do carrossel, como mostra a figura. Qual é a velocidade angular do carrossel imediatamente após a criança agarrar a bola?

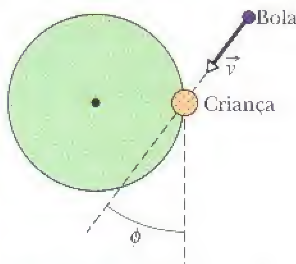


FIG. 11-58 Problema 65.

•••**66** Na Fig. 11-59, um pequeno bloco de 50 g desliza para baixo em uma superfície curva sem atrito a partir de uma altura h = 20 cm e depois adere a uma barra uniforme de massa 100 g e comprimento 40 cm. A barra gira de um ângulo θ em torno do ponto O antes de parar momentaneamente. Determine θ.

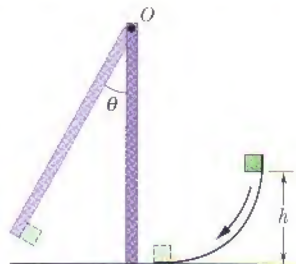


FIG. 11-59 Problema 66.

•••**67** Duas bolas de 2,00 kg estão presas às extremidades de uma barra fina de 50,0 cm de comprimento e massa desprezível. A barra está livre para girar sem atrito em um plano vertical em torno de um eixo horizontal que passa pelo centro. Com a haste inicialmente na horizontal (Fig. 11-60), um pedaço de massa de modelar de 50,0 g cai em uma das bolas, atingindo-a com uma velocidade de 3,00 m/s e aderindo a ela. (a) Qual é a velocidade angular do sistema imediatamente após a colisão com a massa de modelar? (b) Qual é a razão entre a energia cinética do sistema após a colisão e a energia cinética do pedaço de massa de modelar imediatamente antes da colisão? (c) De que ângulo o sistema irá girar antes de parar momentaneamente?

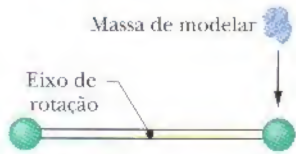


FIG. 11-60 Problema 67.

seção 11-12 Precessão de um Giroscópio

••**68** Um pião gira a 30 rev/s em torno de um eixo que faz um ângulo de 30° com a vertical. A massa do pião é 0,50 kg, seu momento de inércia em relação ao eixo central é $5{,}0 \times 10^{-4}$ kg · m^2 e seu centro de massa está a 4,0 cm do ponto de apoio. Se a rotação é no sentido horário quando vista de cima, quais são (a) a taxa de precessão e (b) o sentido da precessão quando o pião é visto de cima?

••**69** Um certo giroscópio é formado por um disco uniforme com 50 cm de raio montado no centro de um eixo de 11 cm de comprimento e massa desprezível. O eixo está na posição horizontal, apoiado em uma das extremidades. Se o disco está girando em torno do eixo a 1000 rev/min, qual é a taxa de precessão?

Problemas Adicionais

70 Um bloco uniforme de granito na forma de um livro possui faces de 20 cm e 15 cm e 1,2 cm de espessura. A massa específica (massa por unidade de volume) do granito é 2,64 g/cm^3. O bloco gira em torno de um eixo perpendicular às suas faces localizado a meia distância entre o centro e um dos cantos. Seu momento angular em torno desse eixo é 0,104 kg · m^2/s. Qual é sua energia cinética de rotação em torno desse eixo?

71 A Fig. 11-61 mostra uma vista de cima de um anel que pode girar em torno do centro como um carrossel. O raio externo R_2 é 0,800 m, o raio interno R_1 é R_2/2,00, a massa M é 8,00 kg e a massa da cruz no centro é desprezível. Inicialmente, o disco gira com uma velocidade angular de 8,00 rad/s, com um gato de massa $m = M$/4,00 na borda externa, a uma distância R_2 do centro. De quanto o gato aumentará a energia cinética do sistema gato-disco se rastejar até a borda interna, de raio R_1?

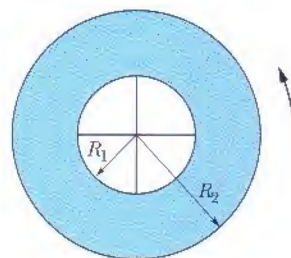


FIG. 11-61 Problema 71.

72 Uma partícula de 2,50 kg que se movendo horizontalmente em um piso com velocidade $(-3{,}00 \text{ m/s})\hat{j}$ sofre uma colisão perfeitamente inelástica com uma partícula de 4,00 kg que está se movendo horizontalmente no mesmo piso com velocidade $(4{,}50 \text{ m/s})\hat{i}$. A colisão ocorre nas coordenadas (−0,500 m, −0,100 m). Após a colisão e em termos dos vetores unitários, qual é o momento angular do sistema das duas partículas em relação à origem?

73 Duas partículas de massa $2{,}90 \times 10^{-4}$ kg e velocidade 5,46 m/s se movem em sentidos opostos ao longo de retas paralelas separadas por uma distância de 4,20 cm. (a) Qual é o módulo L do momento angular do sistema das duas partículas em relação ao ponto médio da distância entre as duas retas? (b) O valor de L muda se o ponto em relação ao qual é calculado não está a meia distância entre as retas? Se o sentido de movimento de uma das partículas é invertido, qual é (c) a resposta do item (a) e (d) a resposta do item (b)?

74 Uma barra uniforme gira em um plano horizontal em torno de um eixo vertical que passa por uma das extremidades. A barra tem 6,00 m de comprimento, pesa 10,0 N e gira a 240 rev/min. Calcule (a) o momento de inércia em relação ao eixo de rotação e (b) o módulo do momento angular em torno desse eixo.

75 As rodas A e B na Fig. 11-60 são conectadas por uma correia que não desliza. O raio de B é 3,00 vezes maior que o de A. Qual é a razão I_A/I_B entre os momentos de inércia das duas rodas se elas têm (a) o mesmo momento angular em relação aos respectivos eixos centrais e (b) a mesma energia cinética de rotação?

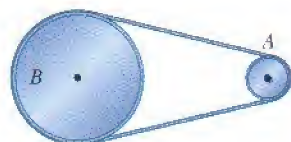


FIG. 11-62 Problema 75.

76 No instante $t = 0$, o vetor posição de uma partícula de 2,0 kg em relação à origem é $\vec{r} = (4{,}0 \text{ m})\hat{i} - (2{,}0 \text{ m})\hat{j}$. Sua velocidade é dada por $\vec{v} = (-6{,}0t^2 \text{ m/s})\hat{i}$ para $t \geq 0$ em segundos. Quais são (a) o momento angular $\vec{L}$ da partícula e (b) o torque $\vec{\tau}$ a que a partícula está submetida, ambos em relação à origem, em termos dos vetores unitários e para $t > 0$? Quais são (c) $\vec{L}$ e (d) $\vec{\tau}$ em relação ao ponto (−2,0 m, −3,0 m, 0) para $t > 0$?

77 Uma roda uniforme de massa 10,0 kg e raio 0,400 m está montada rigidamente em um eixo que passa pelo centro (Fig. 11-63). O raio do eixo é 0,200 m e o momento de inércia do conjunto roda-eixo em relação ao eixo é 0,600 kg · m^2. A roda está inicial-

mente em repouso no alto de uma superfície que faz um ângulo $\theta = 30{,}0°$ com a horizontal; o eixo está apoiado na superfície, enquanto a roda penetra em um sulco aberto na superfície, sem tocá-la. Depois de liberado, o eixo rola para baixo, suavemente e sem deslizamento, ao longo da superfície. Depois que o conjunto roda-eixo desce 2,00 m ao longo da superfície, quais são (a) sua energia cinética de rotação e (b) sua energia cinética de translação?

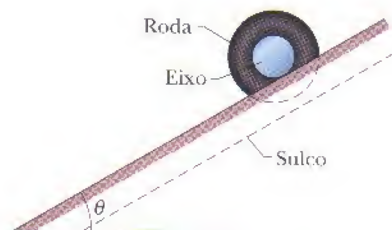


FIG. 11-63 Problema 77.

78 Suponha que o ioiô no Problema 17, em vez de rolar a partir do repouso, é arremessado para baixo com uma velocidade inicial de 1,3 m/s. (a) Quanto tempo o ioiô leva para chegar à extremidade da corda? Nesse momento, qual é o valor (b) da energia cinética total, (c) da velocidade linear, (d) da energia cinética de translação, (e) da velocidade angular e (f) da energia cinética de rotação?

79 Uma pequena esfera maciça com raio 0,25 cm de raio e uma massa de 0,56 g rola sem deslizar no interior de um grande hemisfério fixo com 15 cm de raio e um eixo de simetria vertical. A esfera parte do repouso no alto do hemisfério. (a) Qual é sua energia cinética ao chegar ao fundo do hemisfério? (b) Que fração de sua energia cinética no fundo está associada à rotação em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa? (c) Qual é o módulo da força normal que a esfera exerce sobre o hemisfério no instante em que chega ao fundo?

80 Uma bola maciça uniforme rola suavemente em um piso horizontal e depois começa a subir uma rampa com uma inclinação de 15°. A bola pára momentaneamente após ter rolado 1,50 m ao longo da rampa. Qual era sua velocidade inicial?

81 Um corpo de raio R e massa m rola suavemente com velocidade v em uma superfície horizontal e depois sobe uma colina até uma altura máxima h. (a) Se $h = 3v^2/4g$, qual é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo de rotação que passa pelo seu centro de massa? (b) Que corpo pode ser este?

82 Uma roda de 0,250 m de raio, que está se movendo inicialmente a 43,0 m/s, rola em 225 m até parar. Calcule o módulo (a) da aceleração linear e (b) da aceleração angular da roda. (c) O momento de inércia da roda em torno do eixo central é 0,155 kg · m². Calcule o módulo do torque em relação ao eixo central devido ao atrito sobre a roda.

83 Se as calotas polares de gelo da Terra derretessem totalmente e a água voltasse para os oceanos, estes ficariam cerca de 30 m mais profundos. Que efeito isso teria sobre a rotação da Terra? Faça uma estimativa de qual seria a variação na duração do dia.

84 Um avião de 1200 kg está voando em uma linha reta a 80 m/s, 1,3 km acima do solo. Qual é o módulo do momento angular do avião em relação a um ponto no solo verticalmente abaixo do local onde ele se encontra?

85 Em um parquinho existe um carrossel com 1,20 m de raio e uma massa de 180 kg. Seu raio de giração (veja Problema 91 do Capítulo 10) é 91,0 cm. Uma criança com 44,0 kg de massa corre com uma velocidade de 3,00 m/s ao longo de uma trajetória tangente à borda do carrossel, inicialmente em repouso, e pula no carrossel. Despreze o atrito entre os rolamentos e o eixo do carrossel. Calcule (a) o momento de inércia do carrossel em relação ao eixo de rotação, (b) o módulo do momento angular da criança em relação ao eixo de rotação do carrossel e (c) a velocidade angular do carrossel e da criança após ela saltar no carrossel.

86 Uma roda gira no sentido horário em torno do eixo central com um momento angular de 600 kg · m²/s. No instante $t = 0$, um torque de módulo 50 N · m é aplicado à roda para inverter a rotação. Em que instante t a velocidade angular da roda se anula?

87 Um carro de brinquedo de 3,0 kg se move ao longo de um eixo x com uma velocidade dada por $\vec{v} = -2{,}0t^3\hat{\mathrm{i}}$ m/s, com t em segundos. Para $t > 0$, quais são (a) o momento angular $\vec{L}$ do carro e (b) o torque $\vec{\tau}$ sobre o carro, ambos calculados em relação à origem? Quais são (c) $\vec{L}$ e (d) $\vec{\tau}$ em relação ao ponto (2,0 m, 5,0 m, 0)? Quais são (e) $\vec{L}$ e (f) $\vec{\tau}$ em relação ao ponto (2,0 m, −5,0 m, 0)?

88 Um cano de paredes finas rola no chão. Qual é a razão entre sua energia cinética de translação e sua energia cinética de rotação em relação ao eixo central paralelo à sua maior dimensão?

89 Uma esfera maciça com 36,0 N de peso sobe rolando um plano inclinado com um ângulo de 30,0°. Na base do plano inclinado o centro de massa da esfera possui uma velocidade de translação de 4,90 m/s. (a) Qual é a energia cinética da esfera na base do plano? (b) Que distância a esfera sobe ao longo do plano? (c) A resposta do item (b) depende da massa da esfera?

90 Um automóvel tem uma massa de 1700 kg. Ele acelera a partir do repouso até 40 km/h em 10 s. Suponha que as rodas são discos uniformes de 32 kg. Determine, no final do intervalo de 10 s, (a) a energia cinética de rotação de cada roda em torno do seu respectivo eixo, (b) a energia cinética total de cada roda e (c) a energia cinética total do automóvel.

91 Com eixo e raios de massa desprezível e um aro fino, uma certa roda de bicicleta tem um raio de 0,350 m e pesa 37,0 N; ela pode girar em torno do eixo com atrito desprezível. Um homem segura a roda acima da cabeça com uma das mãos, com o eixo na posição vertical, enquanto está sentado em um banco que pode girar sem atrito; a roda gira no sentido horário, quando vista de cima, com uma velocidade angular de 57,7 rad/s, e o banco está inicialmente em repouso. O momento de inércia do sistema *roda + homem + banco* em relação ao eixo de rotação comum é 2,10 kg · m². O homem usa a mão livre para interromper bruscamente a rotação da roda (em relação ao banco). Determine (a) a velocidade angular resultante e (b) o sentido de rotação do sistema.

92 Para uma pessoa de 84 kg que se encontra no equador, qual é o módulo do seu momento angular em relação ao centro da Terra devido à rotação da Terra?

93 Uma garota de massa M está em pé na borda de um carrossel sem atrito de raio R e momento de inércia I que não está se movendo. Ela joga uma pedra de massa m horizontalmente em uma direção tangente à borda do carrossel. A velocidade da pedra em relação ao chão é v. Depois disso, quais são (a) a velocidade angular do carrossel e (b) a velocidade linear da garota?

94 Uma partícula de 4,0 kg se move em um plano xy. No instante em que a posição e a velocidade da partícula são $\vec{r} = (2{,}0\hat{\mathrm{i}} + 4{,}0\hat{\mathrm{j}})$ m e $\vec{v} = -4{,}0\hat{\mathrm{j}}$ m/s, a força que age sobre a partícula é $\vec{F} = -3{,}0\hat{\mathrm{i}}$ N. Nesse instante, determine (a) o momento

angular da partícula em relação à origem, (b) o momento angular da partícula em relação ao ponto $x = 0, y = 4{,}0$ m, (c) o torque que age sobre a partícula em relação à origem e (d) o torque que age sobre a partícula em relação ao ponto $x = 0, y = 4{,}0$ m.

95 Na Fig. 11-64, uma força horizontal constante $\vec{F}_{ap}$ de módulo 12 N é aplicada a um cilindro maciço uniforme através de uma linha de pescar enrolada no cilindro. A massa do cilindro é de 10 kg, seu raio é 0,10 m e o cilindro rola suavemente em uma superfície horizontal. (a) Qual é o módulo da aceleração do centro de massa do cilindro? (b) Qual é o módulo da aceleração angular do cilindro em relação ao centro de massa? (c) Em termos dos vetores unitário qual é a força de atrito que age sobre o cilindro?

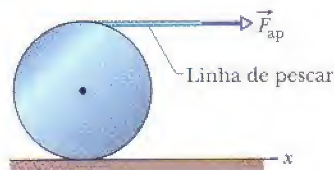


FIG. 11-64 Problema 95.

96 (a) No Exemplo 10-8, quando o rotor explodiu qual foi o momento, em relação ao eixo de rotação, liberado para o ambiente? (b) Supondo que a maioria dos pedaços do rotor parou de se mover no máximo 0,025 s após a explosão, qual foi o módulo do torque médio a que esses pedaços foram submetidos, calculado em relação ao eixo de rotação?

97 Uma partícula de massa $M = 0{,}25$ kg é liberada de um ponto que está a uma altura $h = 1{,}80$ m acima do solo e a uma distância $s = 0{,}45$ m de um ponto de observação O, como mostra a Fig. 11-65. Qual é o módulo do momento angular da partícula em relação a O quando a partícula percorreu metade da distância até o solo?

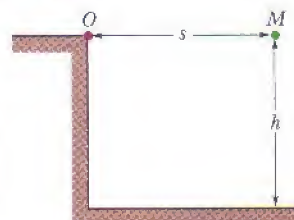


FIG. 11-65 Problema 97.

98 Em um certo instante, uma partícula de 0,80 kg está situada na posição $\vec{r} = (2{,}0 \text{ m})\hat{i} + (3{,}0 \text{ m})\hat{j}$. O momento linear da partícula está no plano xy e tem um módulo de 2,4 kg · m/s e uma direção de 115° medida no sentido anti-horário a partir do semi-eixo x positivo. Qual é o momento angular da partícula em relação à origem, em termos dos vetores unitários?

O Sistema Internacional de Unidades (SI)* A

TABELA 1

As Unidades Fundamentais do SI

Grandeza	Nome	Símbolo	Definição
comprimento	metro	m	". . . a distância percorrida pela luz no vácuo em 1/299.792.458 de segundo." (1983)
massa	quilograma	kg	". . . este protótipo [um certo cilindro de platina-irídio] será considerado daqui em diante como a unidade de massa." (1889)
tempo	segundo	s	". . . a duração de 9.192.631.770 períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio-133." (1967)
corrente elétrica	ampère	A	". . . a corrente constante que, se mantida em dois condutores paralelos retos de comprimento infinito, de seção transversal circular desprezível e separados por uma distância de 1 m no vácuo, produziria entre esses condutores uma força igual a 2×10^{-7} newton por metro de comprimento." (1946)
temperatura termodinâmica	kelvin	K	". . . a fração 1/273,16 da temperatura termodinâmica do ponto triplo da água." (1967)
quantidade de matéria	mol	mol	". . . a quantidade de matéria de um sistema que contém um número de entidades elementares igual ao número de átomos que existem em 0,012 quilograma de carbono-12." (1971)
intensidade luminosa	candela	cd	". . . a intensidade luminosa, em uma dada direção, de uma fonte que emite radiação monocromática de freqüência 540×10^{12} hertz e que irradia nessa direção com uma intensidade de 1/683 watt por esferorradiano." (1979)

*Adaptado de "The International System of Units (SI)", Publicação Especial 330 do National Bureau of Standards, edição de 2001. As definições acima foram adotadas pela Conferência Nacional de Pesos e Medidas, um órgão internacional, nas datas indicadas. A candela não é usada neste livro.

TABELA 2

Algumas Unidades Secundárias do SI

Grandeza	Nome da Unidade	Símbolo	
área	metro quadrado	m^2	
volume	metro cúbico	m^3	
freqüência	hertz	Hz	s^{-1}
massa específica (densidade)	quilograma por metro cúbico	kg/m^3	
velocidade escalar, velocidade	metro por segundo	m/s	
velocidade angular	radiano por segundo	rad/s	
aceleração	metro por segundo ao quadrado	m/s^2	
aceleração angular	radiano por segundo ao quadrado	rad/s^2	
força	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
pressão	pascal	Pa	N/m^2
trabalho, energia, quantidade de calor	joule	J	$N \cdot m$
potência	watt	W	J/s
quantidade de carga elétrica	coulomb	C	$A \cdot s$
diferença de potencial, força eletromotriz	volt	V	W/A
intensidade de campo elétrico	volt por metro (ou newton por coulomb)	V/m	N/C
resistência elétrica	ohm	Ω	V/A
capacitância	farad	F	$A \cdot s/V$
fluxo magnético	weber	Wb	$V \cdot s$
indutância	henry	H	$V \cdot s/A$
densidade de fluxo magnético	tesla	T	Wb/m^2
intensidade de campo magnético	ampère por metro	A/m	
entropia	joule por kelvin	J/K	
calor específico	joule por quilograma kelvin	$J/(kg \cdot K)$	
condutividade térmica	watt por metro kelvin	$W/(m \cdot K)$	
intensidade radiante	watt por esferorradiano	W/sr	

TABELA 3

As Unidades Suplementares SI

Grandeza	Nome da Unidade	Símbolo
ângulo plano	radiano	rad
ângulo sólido	esferorradiano	sr

Algumas Constantes Fundamentais da Física* B

Constante	Símbolo	Valor Prático	Melhor Valor (2006)	
			Valor[a]	Incerteza
Velocidade da luz no vácuo	c	$3{,}00 \times 10^{8}$ m/s	2,997 924 58	exata
Carga elementar	e	$1{,}60 \times 10^{-19}$ C	1,602 176 487	$2{,}5 \times 10^{-8}$
Constante gravitacional	G	$6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/s^2 \cdot kg}$	6,674 28	$1{,}0 \times 10^{-4}$
Constante universal dos gases	R	8,31 J/mol · K	8,314 472	$1{,}7 \times 10^{-6}$
Constante de Avogadro	N_A	$6{,}02 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$	6,022 141 79	$5{,}0 \times 10^{-8}$
Constante de Boltzmann	k	$1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K	1,380 650 4	$1{,}7 \times 10^{-6}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5{,}67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2 \cdot K^4}$	5,670 400	$7{,}0 \times 10^{-6}$
Volume molar de um gás ideal nas CNTP[c]	V_m	$2{,}27 \times 10^{-2}\ \mathrm{m^3/mol}$	2,271 098 1	$1{,}7 \times 10^{-6}$
Permissividade do vácuo	ϵ_0	$8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m	8,854 187 817 62	exata
Permeabilidade do vácuo	μ_0	$1{,}26 \times 10^{-6}$ H/m	1,256 637 061 43	exata
Constante de Planck	h	$6{,}63 \times 10^{-34}$ J · s	6,626 068 96	$5{,}0 \times 10^{-8}$
Massa do elétron[b]	m_e	$9{,}11 \times 10^{-31}$ kg	9,109 382 15	$5{,}0 \times 10^{-8}$
		$5{,}49 \times 10^{-4}$ u	5,485 799 094	$4{,}2 \times 10^{-10}$
Massa do próton[b]	m_p	$1{,}67 \times 10^{-27}$ kg	1,672 621 637	$5{,}0 \times 10^{-8}$
		1,0073 u	1,007 276 466 77	$1{,}0 \times 10^{-10}$
Razão entre a massa do próton e a massa do elétron	m_p/m_e	1840	1,836 152 672 47	$4{,}3 \times 10^{-10}$
Razão entre a massa e a carga do elétron	e/m_e	$1{,}76 \times 10^{11}$ C/kg	1,758 820 150	$2{,}5 \times 10^{-8}$
Massa do nêutron[b]	m_n	$1{,}68 \times 10^{-27}$ kg	1,674 927 211	$5{,}0 \times 10^{-8}$
		1,0087 u	1,008 664 915 97	$4{,}3 \times 10^{-10}$
Massa do átomo de hidrogênio[b]	m_{1_H}	1,0078 u	1,007 825 031 6	$1{,}0 \times 10^{-10}$
Massa do átomo de deutério[b]	m_{2_H}	2,0141 u	2,014 101 777 9	$1{,}0 \times 10^{-10}$
Massa do átomo de hélio[b]	$m_{4_{He}}$	4,0026 u	4,002 603 2	$1{,}0 \times 10^{-10}$
Massa do múon	m_μ	$1{,}88 \times 10^{-28}$ kg	1,883 531 30	$5{,}6 \times 10^{-8}$
Momento magnético do elétron	μ_e	$9{,}28 \times 10^{-24}$ J/T	9,284 763 77	$2{,}5 \times 10^{-8}$
Momento magnético do próton	μ_p	$1{,}41 \times 10^{-26}$ J/T	1,410 606 662	$2{,}6 \times 10^{-8}$
Magnéton de Bohr	μ_B	$9{,}27 \times 10^{-24}$ J/T	9,274 008 009 15	$2{,}5 \times 10^{-8}$
Magnéton nuclear	μ_N	$5{,}05 \times 10^{-27}$ J/T	5,050 783 24	$2{,}5 \times 10^{-8}$
Raio de Bohr	a	$5{,}29 \times 10^{-11}$ m	5,291 772 085 9	$6{,}8 \times 10^{-10}$
Constante de Rydberg	R	$1{,}10 \times 10^{7}\ \mathrm{m^{-1}}$	1,097 373 156 852 7	$6{,}6 \times 10^{-12}$
Comprimento de onda de Compton do elétron	λ_C	$2{,}43 \times 10^{-12}$ m	2,426 310 217 5	$1{,}4 \times 10^{-9}$

[a]Os valores desta coluna têm a mesma unidade e potência de 10 que o valor prático.

[b]As massas dadas em u estão em unidades unificadas de massa atômica: 1 u = $1{,}660\,538\,86 \times 10^{-27}$ kg.

[c]CNPT significa condições normais de temperatura e pressão: 0°C e 1,0 atm (0,1 MPa).

*Os valores desta tabela foram selecionados entre os valores recomendados pelo CODATA em 2006 (www.physics.nist.gov).

C Alguns Dados Astronômicos

Algumas Distâncias da Terra

À Lua*	$3{,}82 \times 10^8$ m	Ao centro da nossa galáxia	$2{,}2 \times 10^{20}$ m
Ao Sol*	$1{,}50 \times 10^{11}$ m	À galáxia de Andrômeda	$2{,}1 \times 10^{22}$ m
À estrela mais próxima (*Proxima Centauri*)	$4{,}04 \times 10^{16}$ m	Ao limite do universo observável	$\sim 10^{26}$ m

*Distância média.

O Sol, a Terra e a Lua

Propriedade	Unidade	Sol	Terra	Lua
Massa	kg	$1{,}99 \times 10^{30}$	$5{,}98 \times 10^{24}$	$7{,}36 \times 10^{22}$
Raio médio	m	$6{,}96 \times 10^8$	$6{,}37 \times 10^6$	$1{,}74 \times 10^6$
Massa específica média	kg/m³	1410	5520	3340
Aceleração de queda livre na superfície	m/s²	274	9,81	1,67
Velocidade de escape	km/s	618	11,2	2,38
Período de rotação[a]	—	37 d nos pólos[b] 26 d no equador[b]	23 h 56 min	27,3 d
Potência de radiação[c]	W	$3{,}90 \times 10^{26}$		

[a]Medido em relação às estrelas distantes.

[b]O Sol, uma bola de gás, não gira como um corpo rígido.

[c]Perto dos limites da atmosfera terrestre a energia solar é recebida a uma taxa de 1340 W/m², supondo uma incidência normal.

Algumas Propriedades dos Planetas

	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno	Plutão*
Distância média do Sol, 10^6 km	57,9	108	150	228	778	1430	2870	4500	5900
Período de revolução, anos	0,241	0,615	1,00	1,88	11,9	29,5	84,0	165	248
Período de rotação,[a] dias	58,7	−243[b]	0,997	1,03	0,409	0,426	−0,451[b]	0,658	6,39
Velocidade orbital, km/s	47,9	35,0	29,8	24,1	13,1	9,64	6,81	5,43	4,74
Inclinação do eixo em relação à órbita	<28°	≈3°	23,4°	25,0°	3,08°	26,7°	97,9°	29,6°	57,5°
Inclinação da órbita em relação à órbita da Terra	7,00°	3,39°		1,85°	1,30°	2,49°	0,77°	1,77°	17,2°
Excentricidade da órbita	0,206	0,0068	0,0167	0,0934	0,0485	0,0556	0,0472	0,0086	0,250
Diâmetro equatorial, km	4880	12 100	12 800	6790	143 000	120 000	51 800	49 500	2300
Massa (Terra = 1)	0,0558	0,815	1,000	0,107	318	95,1	14,5	17,2	0,002
Massa específica (água = 1)	5,60	5,20	5,52	3,95	1,31	0,704	1,21	1,67	2,03
Valor de g na superfície[c], m/s²	3,78	8,60	9,78	3,72	22,9	9,05	7,77	11,0	0,5
Velocidade de escape[c], km/s	4,3	10,3	11,2	5,0	59,5	35,6	21,2	23,6	1,1
Satélites conhecidos	0	0	1	2	63 + anéis	34 + anéis	27 + anéis	13 + anéis	1

[a]Medido em relação às estrelas distantes.

[b]Vênus e Urano giram no sentido contrário ao do movimento orbital.

[c]Aceleração gravitacional medida no equador do planeta.

*A partir de 2008, por decisão da União Astronômica, Plutão não é mais um planeta e sim um plutóide, uma nova classe de astro que, até o momento, tem apenas dois representantes: Plutão e Eris. (N.T.)

Fatores de Conversão D

Os fatores de conversão podem ser lidos diretamente dessas tabelas. Assim, por exemplo, 1 grau = $2{,}778 \times 10^{-3}$ revoluções e, portanto, 16,7° = $16{,}7 \times 2{,}778 \times 10^{-3}$ revoluções. As unidades do SI estão em letras maiúsculas. Adaptado parcialmente de G. Shortley e D. Williams, *Elements of Physics*, 1971, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Ângulo Plano

°	′	″	RADIANOS	revoluções
1 grau = 1	60	3600	$1{,}745 \times 10^{-2}$	$2{,}778 \times 10^{-3}$
1 minuto = $1{,}667 \times 10^{-2}$	1	60	$2{,}909 \times 10^{-4}$	$4{,}630 \times 10^{-5}$
1 segundo = $2{,}778 \times 10^{-4}$	$1{,}667 \times 10^{-2}$	1	$4{,}848 \times 10^{-6}$	$7{,}716 \times 10^{-7}$
1 RADIANO = 57,30	3438	$2{,}063 \times 10^{5}$	1	0,1592
1 revolução = 360	$2{,}16 \times 10^{4}$	$1{,}296 \times 10^{6}$	6,283	1

Ângulo Sólido

1 esfera = 4π esferorradianos = 12,57 esferorradianos

Comprimento

cm	METROS	km	polegadas	pés	milhas
1 centímetro = 1	10^{-2}	10^{-5}	0,3937	$3{,}281 \times 10^{-2}$	$6{,}214 \times 10^{-6}$
1 METRO = 100	1	10^{-3}	39,37	3,281	$6{,}214 \times 10^{-4}$
1 quilômetro = 10^{5}	1000	1	$3{,}937 \times 10^{4}$	3281	0,6214
1 polegada = 2,540	$2{,}540 \times 10^{-2}$	$2{,}540 \times 10^{-5}$	1	$8{,}333 \times 10^{-2}$	$1{,}578 \times 10^{-5}$
1 pé = 30,48	0,3048	$3{,}048 \times 10^{-4}$	12	1	$1{,}894 \times 10^{-4}$
1 milha = $1{,}609 \times 10^{5}$	1609	1,609	$6{,}336 \times 10^{4}$	5280	1

1 angström = 10^{-10} m
1 milha marítima = 1852 m = 1,151 milha = 6076 pés
1 fermi = 10^{-15} m
1 ano-luz = $9{,}461 \times 10^{12}$ km
1 parsec = $3{,}084 \times 10^{13}$ km
1 braça = 6 pés
1 raio de Bohr = $5{,}292 \times 10^{-11}$ m
1 jarda = 3 pés
1 vara = 16,5 pés
1 mil = 10^{-3} polegadas
1 nm = 10^{-9} m

Área

METROS²	cm²	pés²	polegadas²
1 METRO QUADRADO = 1	10^{4}	10,76	1550
1 centímetro quadrado = 10^{-4}	1	$1{,}076 \times 10^{-3}$	0,1550
1 pé quadrado = $9{,}290 \times 10^{-2}$	929,0	1	144
1 polegada quadrada = $6{,}452 \times 10^{-4}$	6,452	$6{,}944 \times 10^{-3}$	1

1 milha quadrada = $2{,}788 \times 10^{7}$ pés² = 640 acres
1 barn = 10^{-28} m²
1 acre = 43 560 pés²
1 hectare = 10^{4} m² = 2,471 acres

Volume

METROS^3	cm^3	L	pés^3	polegadas^3
1 METRO CÚBICO = 1	10^6	1000	35,31	$6{,}102 \times 10^4$
1 centímetro cúbico = 10^{-6}	1	$1{,}000 \times 10^{-3}$	$3{,}531 \times 10^{-5}$	$6{,}102 \times 10^{-2}$
1 litro = $1{,}000 \times 10^{-3}$	1000	1	$3{,}531 \times 10^{-2}$	61,02
1 pé cúbico = $2{,}832 \times 10^{-2}$	$2{,}832 \times 10^4$	28,32	1	1728
1 polegada cúbica = $1{,}639 \times 10^{-5}$	16,39	$1{,}639 \times 10^{-2}$	$5{,}787 \times 10^{-4}$	1

1 galão americano = 4 quartos de galão americano = 8 quartilhos americanos = 128 onças fluidas americanas = 231 polegadas^3

1 galão imperial britânico = 277,4 polegadas^3 = 1,201 galão americano

Massa

As grandezas nas áreas sombreadas não são unidades de massa, mas são freqüentemente usadas como tal. Assim, por exemplo, quando escrevemos 1 kg "=" 2,205 lb, isso significa que um quilograma é a *massa* que *pesa* 2,205 libras em um local onde g tem o valor-padrão de 9,80665 m/s^2.

g	QUILOGRAMAS	slugs	u	onças	libras	toneladas
1 grama = 1	0,001	$6{,}852 \times 10^{-5}$	$6{,}022 \times 10^{23}$	$3{,}527 \times 10^{-2}$	$2{,}205 \times 10^{-3}$	$1{,}102 \times 10^{-6}$
1 QUILOGRAMA = 1000	1	$6{,}852 \times 10^{-2}$	$6{,}022 \times 10^{26}$	35,27	2,205	$1{,}102 \times 10^{-3}$
1 slug = $1{,}459 \times 10^4$	14,59	1	$8{,}786 \times 10^{27}$	514,8	32,17	$1{,}609 \times 10^{-2}$
1 unidade de massa atômica = $1{,}661 \times 10^{-24}$	$1{,}661 \times 10^{-27}$	$1{,}138 \times 10^{-28}$	1	$5{,}857 \times 10^{-26}$	$3{,}662 \times 10^{-27}$	$1{,}830 \times 10^{-30}$
1 onça = 28,35	$2{,}835 \times 10^{-2}$	$1{,}943 \times 10^{-3}$	$1{,}718 \times 10^{25}$	1	$6{,}250 \times 10^{-2}$	$3{,}125 \times 10^{-5}$
1 libra = 453,6	0,4536	$3{,}108 \times 10^{-2}$	$2{,}732 \times 10^{26}$	16	1	0,0005
1 tonelada = $9{,}072 \times 10^5$	907,2	62,16	$5{,}463 \times 10^{29}$	$3{,}2 \times 10^4$	2000	1

1 tonelada métrica = 1000 kg

Massa Específica

As grandezas nas áreas sombreadas são pesos específicos e, como tal, dimensionalmente diferentes das massas específicas. Veja a nota na tabela de massas.

slugs/pé^3	QUILOGRAMAS/ METRO^3	g/cm^3	lb/pé^3	lb/polegada^3
1 slug por pé^3 = 1	515,4	0,5154	32,17	$1{,}862 \times 10^{-2}$
1 QUILOGRAMA por METRO^3 = $1{,}940 \times 10^{-3}$	1	0,001	$6{,}243 \times 10^{-2}$	$3{,}613 \times 10^{-5}$
1 grama por centímetro^3 = 1,940	1000	1	62,43	$3{,}613 \times 10^{-2}$
1 libra por pé^3 = $3{,}108 \times 10^{-2}$	16,02	$16{,}02 \times 10^{-2}$	1	$5{,}787 \times 10^{-4}$
1 libra por polegada^3 = 53,71	$2{,}768 \times 10^4$	27,68	1728	1

Tempo

anos	d	h	min	SEGUNDOS
1 ano = 1	365,25	$8{,}766 \times 10^3$	$5{,}259 \times 10^5$	$3{,}156 \times 10^7$
1 dia = $2{,}738 \times 10^{-3}$	1	24	1440	$8{,}640 \times 10^4$
1 hora = $1{,}141 \times 10^{-4}$	$4{,}167 \times 10^{-2}$	1	60	3600
1 minuto = $1{,}901 \times 10^{-6}$	$6{,}944 \times 10^{-4}$	$1{,}667 \times 10^{-2}$	1	60
1 SEGUNDO = $3{,}169 \times 10^{-8}$	$1{,}157 \times 10^{-5}$	$2{,}778 \times 10^{-4}$	$1{,}667 \times 10^{-2}$	1

Velocidade

	pés/s	km/h	METROS/SEGUNDO	milhas/h	cm/s
1 pé por segundo =	1	1,097	0,3048	0,6818	30,48
1 quilômetro por hora =	0,9113	1	0,2778	0,6214	27,78
1 METRO por SEGUNDO =	3,281	3,6	1	2,237	100
1 milha por hora =	1,467	1,609	0,4470	1	44,70
1 centímetro por segundo =	$3,281 \times 10^{-2}$	$3,6 \times 10^{-2}$	0,01	$2,237 \times 10^{-2}$	1

1 nó = 1 milha marítima/h = 1,688 pés/s 1 milha/min = 88,00 pés/s = 60,00 milhas/h

Força

As unidades de força nas áreas sombreadas são atualmente pouco usadas. 1 grama-força (= 1 gf) é a força da gravidade que atua sobre um objeto cuja massa é 1 grama em um local onde g possui o valor-padrão de 9,80665 m/s^2.

	dina	NEWTONS	libras	poundals	gf	kgf
1 dina =	1	10^{-5}	$2,248 \times 10^{-6}$	$7,233 \times 10^{-5}$	$1,020 \times 10^{-3}$	$1,020 \times 10^{-6}$
1 NEWTON =	10^5	1	0,2248	7,233	102,0	0,1020
1 libra =	$4,448 \times 10^5$	4,448	1	32,17	453,6	0,4536
1 poundal =	$1,383 \times 10^4$	0,1383	$3,108 \times 10^{-2}$	1	14,10	$1,410 \times 10^2$
1 grama-força =	980,7	$9,807 \times 10^{-3}$	$2,205 \times 10^{-3}$	$7,093 \times 10^{-2}$	1	0,001
1 quilograma-força =	$9,807 \times 10^5$	9,807	2,205	70,93	1000	1

1 tonelada = 2000 lb

Pressão

	atm	dinas/cm^2	polegadas de água	cm Hg	PASCALS	libras/polegada^2	libras/pé^2
1 atmosfera =	1	$1,013 \times 10^6$	406,8	76	$1,013 \times 10^5$	14,70	2116
1 dina por centímetro^2 =	$9,869 \times 10^{-7}$	1	$4,015 \times 10^{-4}$	$7,501 \times 10^{-5}$	0,1	$1,405 \times 10^{-5}$	$2,089 \times 10^{-3}$
1 polegada de água a 4°C =	$2,458 \times 10^{-3}$	2491	1	0,1868	249,1	$3,613 \times 10^{-2}$	5,202
1 centímetro de mercúrio[a] a 0°C =	$1,316 \times 10^{-2}$	$1,333 \times 10^4$	5,353	1	1333	0,1934	27,85
1 PASCAL =	$9,869 \times 10^{-6}$	10	$4,015 \times 10^{-3}$	$7,501 \times 10^{-4}$	1	$1,450 \times 10^{-4}$	$2,089 \times 10^{-2}$
1 libra por polegada^2 =	$6,805 \times 10^{-2}$	$6,895 \times 10^4$	27,68	5,171	$6,895 \times 10^3$	1	144
1 libra por pé^2 =	$4,725 \times 10^{-4}$	478,8	0,1922	$3,591 \times 10^{-2}$	47,88	$6,944 \times 10^{-3}$	1

[a]Onde a aceleração da gravidade possui o valor-padrão de 9,80665 m/s^2.

1 bar = 10^6 dina/cm^2 = 0,1 MPa 1 milibar = 10^3 dinas/cm^2 = 10^2 Pa 1 torr = 1 mm Hg

Energia, Trabalho e Calor

As grandezas nas áreas sombreadas não são unidades de energia, mas foram incluídas por conveniência. Elas se originam da fórmula relativística de equivalência entre massa e energia $E = mc^2$, e representam a energia equivalente a um quilograma ou uma unidade unificada de massa atômica (u) (as duas últimas linhas) e a massa equivalente a uma unidade de energia (as duas colunas da extremidade direita).

	Btu	erg	pés-libras	hp · h	JOULES	cal	kW · h	eV	MeV	kg	u
1 Btu =	1	$1,055 \times 10^{10}$	777,9	$3,929 \times 10^{-4}$	1055	252,0	$2,930 \times 10^{-4}$	$6,585 \times 10^{21}$	$6,585 \times 10^{15}$	$1,174 \times 10^{-14}$	$7,070 \times 10^{12}$
1 erg =	$9,481 \times 10^{-11}$	1	$7,376 \times 10^{-8}$	$3,725 \times 10^{-14}$	10^{-7}	$2,389 \times 10^{-8}$	$2,778 \times 10^{-14}$	$6,242 \times 10^{11}$	$6,242 \times 10^{5}$	$1,113 \times 10^{-24}$	670,2
1 pé-libra =	$1,285 \times 10^{-3}$	$1,356 \times 10^{7}$	1	$5,051 \times 10^{-7}$	1,356	0,3238	$3,766 \times 10^{-7}$	$8,464 \times 10^{18}$	$8,464 \times 10^{12}$	$1,509 \times 10^{-17}$	$9,037 \times 10^{9}$
1 horsepower-hora =	2545	$2,685 \times 10^{13}$	$1,980 \times 10^{6}$	1	$2,685 \times 10^{6}$	$6,413 \times 10^{5}$	0,7457	$1,676 \times 10^{25}$	$1,676 \times 10^{19}$	$2,988 \times 10^{-11}$	$1,799 \times 10^{16}$
1 JOULE =	$9,481 \times 10^{-4}$	10^{7}	0,7376	$3,725 \times 10^{-7}$	1	0,2389	$2,778 \times 10^{-7}$	$6,242 \times 10^{18}$	$6,242 \times 10^{12}$	$1,113 \times 10^{-17}$	$6,702 \times 10^{9}$
1 caloria =	$3,968 \times 10^{-3}$	$4,1868 \times 10^{7}$	3,088	$1,560 \times 10^{-6}$	4,1868	1	$1,163 \times 10^{-6}$	$2,613 \times 10^{19}$	$2,613 \times 10^{13}$	$4,660 \times 10^{-17}$	$2,806 \times 10^{10}$
1 quilowatt-hora =	3413	$3,600 \times 10^{13}$	$2,655 \times 10^{6}$	1,341	$3,600 \times 10^{6}$	$8,600 \times 10^{5}$	1	$2,247 \times 10^{25}$	$2,247 \times 10^{19}$	$4,007 \times 10^{-11}$	$2,413 \times 10^{16}$
1 elétron-volt =	$1,519 \times 10^{-22}$	$1,602 \times 10^{-12}$	$1,182 \times 10^{-19}$	$5,967 \times 10^{-26}$	$1,602 \times 10^{-19}$	$3,827 \times 10^{-20}$	$4,450 \times 10^{-26}$	1	10^{-6}	$1,783 \times 10^{-36}$	$1,074 \times 10^{-9}$
1 milhão de elétron-volts =	$1,519 \times 10^{-16}$	$1,602 \times 10^{-6}$	$1,182 \times 10^{-13}$	$5,967 \times 10^{-20}$	$1,602 \times 10^{-13}$	$3,827 \times 10^{-14}$	$4,450 \times 10^{-20}$	10^{-6}	1	$1,783 \times 10^{-30}$	$1,074 \times 10^{-3}$
1 quilograma =	$8,521 \times 10^{13}$	$8,987 \times 10^{23}$	$6,629 \times 10^{16}$	$3,348 \times 10^{10}$	$8,987 \times 10^{16}$	$2,146 \times 10^{16}$	$2,497 \times 10^{10}$	$5,610 \times 10^{35}$	$5,610 \times 10^{29}$	1	$6,022 \times 10^{26}$
1 unidade unificada de massa atômica =	$1,415 \times 10^{-13}$	$1,492 \times 10^{-3}$	$1,101 \times 10^{-10}$	$5,559 \times 10^{-17}$	$1,492 \times 10^{-10}$	$3,564 \times 10^{-11}$	$4,146 \times 10^{-17}$	$9,320 \times 10^{8}$	932,0	$1,661 \times 10^{-27}$	1

Potência

	Btu/h	pés-libras/s	hp	cal/s	kW	WATTS
1 Btu por hora =	1	0,2161	$3,929 \times 10^{-4}$	$6,998 \times 10^{-2}$	$2,930 \times 10^{-4}$	0,2930
1 pé-libra por segundo =	4,628	1	$1,818 \times 10^{-3}$	0,3239	$1,356 \times 10^{-3}$	1,356
1 horsepower =	2545	550	1	178,1	0,7457	745,7
1 caloria por segundo =	14,29	3,088	$5,615 \times 10^{-3}$	1	$4,186 \times 10^{-3}$	4,186
1 quilowatt =	3413	737,6	1,341	238,9	1	1000
1 WATT =	3,413	0,7376	$1,341 \times 10^{-3}$	0,2389	0,001	1

Campo Magnético

	gauss	TESLAS	miligauss
1 gauss =	1	10^{-4}	1000
1 TESLA =	10^{4}	1	10^{7}
1 miligauss =	0,001	10^{-7}	1

1 tesla = 1 weber/metro²

Fluxo Magnético

	maxwell	WEBERS
1 maxwell =	1	10^{-8}
1 WEBER =	10^{8}	1

Fórmulas Matemáticas E

Geometria

Círculo de raio r: circunferência $= 2\pi r$; área $= \pi r^2$.

Esfera de raio r: área $= 4\pi r^2$; volume $= \frac{4}{3}\pi r^3$.

Cilindro circular reto de raio r e altura h:
área $= 2\pi r^2 + 2\pi r h$; volume $= \pi r^2 h$.

Triângulo de base a e altura h: área $= \frac{1}{2}ah$.

Fórmula de Báskara

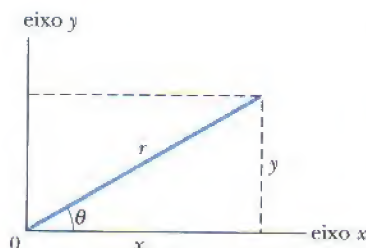
Se $ax^2 + bx + c = 0$, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Funções Trigonométricas do Ângulo θ

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r}$ $\quad\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

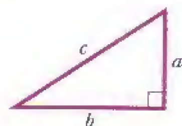
$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ $\quad\cot\theta = \dfrac{x}{y}$

$\sec\theta = \dfrac{r}{x}$ $\quad\csc\theta = \dfrac{r}{y}$



Teorema de Pitágoras

Neste triângulo retângulo,
$a^2 + b^2 = c^2$



Triângulos

Ângulos: A, B, C

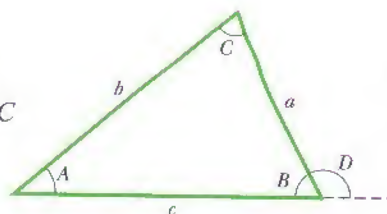
Lados opostos: a, b, c

$A + B + C = 180°$

$\dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

Ângulo externo $D = A + C$



Sinais e Símbolos Matemáticos

$=$ igual a

$\approx$ aproximadamente igual a

$\sim$ da ordem de grandeza de

$\neq$ diferente de

$\equiv$ idêntico a, definido como

$>$ maior que ($\gg$ muito maior que)

$<$ menor que ($\ll$ muito menor que)

$\geq$ maior ou igual a (não menor que)

$\leq$ menor ou igual a (não maior que)

$\pm$ mais ou menos

$\propto$ proporcional a

Σ somatório de

$x_{\text{méd}}$ valor médio de x

Identidades Trigonométricas

$\operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$

$\cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$

$\operatorname{sen}\theta/\cos\theta = \tan\theta$

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$

$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

$\operatorname{sen}\alpha \pm \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

Teorema Binomial

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots \qquad (x^2 < 1)$$

Expansão Exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Expansão Logarítmica

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots \qquad (|x| < 1)$$

Expansões Trigonométricas (θ em radianos)

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \cdots$$

Regra de Cramer

Duas equações lineares simultâneas com incógnitas x e y,

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{e} \quad a_2x + b_2y = c_2,$$

têm como soluções

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Produtos de Vetores

Sejam $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$ e $\hat{\mathrm{k}}$ vetores unitários nas direções x, y e z, respectivamente. Nesse caso,

$$\hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}}\cdot\hat{\mathrm{k}} = 1, \quad \hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{k}} = \hat{\mathrm{k}}\cdot\hat{\mathrm{i}} = 0,$$

$$\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{j}}\times\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}}\times\hat{\mathrm{k}} = 0,$$

$$\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}}, \qquad \hat{\mathrm{j}}\times\hat{\mathrm{k}} = \hat{\mathrm{i}}, \qquad \hat{\mathrm{k}}\times\hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{j}}$$

Qualquer vetor $\vec{a}$ de componentes a_x, a_y e a_z ao longo dos eixos x, y e z pode ser escrito na forma

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}.$$

Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores arbitrários de módulos a, b e c. Nesse caso,

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{c})$$

$$(s\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(s\vec{b}) = s(\vec{a}\times\vec{b}) \qquad (s = \text{escalar}).$$

Seja θ o menor dos dois ângulos entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Nesse caso,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = ab\cos\theta$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} & \hat{\mathrm{j}} & \hat{\mathrm{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\mathrm{i}}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{\mathrm{j}}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{\mathrm{k}}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= (a_yb_z - b_ya_z)\hat{\mathrm{i}} + (a_zb_x - b_za_x)\hat{\mathrm{j}} + (a_xb_y - b_xa_y)\hat{\mathrm{k}}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\operatorname{sen}\theta$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

Derivadas e Integrais

Nas fórmulas a seguir as letras u e v representam duas funções de x, e a e m são constantes. A cada integral indefinida deve-se somar uma constante de integração arbitrária. O *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press Inc.) contém uma tabela mais completa.

1. $\dfrac{dx}{dx} = 1$

2. $\dfrac{d}{dx}(au) = a\dfrac{du}{dx}$

3. $\dfrac{d}{dx}(u+v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

4. $\dfrac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$

5. $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$

6. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

7. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$

8. $\dfrac{d}{dx}\,\text{sen}\, x = \cos x$

9. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\text{sen}\, x$

10. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

11. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

12. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$

13. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\cot x \csc x$

14. $\dfrac{d}{dx}e^u = e^u\dfrac{du}{dx}$

15. $\dfrac{d}{dx}\,\text{sen}\, u = \cos u\dfrac{du}{dx}$

16. $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\text{sen}\, u\dfrac{du}{dx}$

1. $\int dx = x$

2. $\int au\, dx = a\int u\, dx$

3. $\int (u+v)\, dx = \int u\, dx + \int v\, dx$

4. $\int x^m\, dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\ (m \neq -1)$

5. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|$

6. $\int u\dfrac{dv}{dx}\, dx = uv - \int v\dfrac{du}{dx}\, dx$

7. $\int e^x\, dx = e^x$

8. $\int \text{sen}\, x\, dx = -\cos x$

9. $\int \cos x\, dx = \text{sen}\, x$

10. $\int \tan x\, dx = \ln|\sec x|$

11. $\int \text{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\text{sen}\, 2x$

12. $\int e^{-ax}\, dx = -\dfrac{1}{a}e^{-ax}$

13. $\int xe^{-ax}\, dx = -\dfrac{1}{a^2}(ax+1)e^{-ax}$

14. $\int x^2 e^{-ax}\, dx = -\dfrac{1}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$

15. $\int_0^\infty x^n e^{-ax}\, dx = \dfrac{n!}{a^{n+1}}$

16. $\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2}\, dx = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$

17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$

18. $\int \dfrac{x\, dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\dfrac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}$

19. $\int \dfrac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \dfrac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$

20. $\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2}\, dx = \dfrac{n!}{2a^{n+1}}\ (a > 0)$

21. $\int \dfrac{x\, dx}{x+d} = x - d\ln(x+d)$

F Propriedades dos Elementos

Todas as propriedades físicas são dadas para uma pressão de 1 atm, a menos que seja indicado em contrário.

Elemento	Símbolo	Número Atômico, Z	Massa Molar, g/mol	Massa Específica, g/cm³ a 20°C	Ponto de Fusão, °C	Ponto de Ebulição, °C	Calor Específico, J/(g · °C) a 25°C
Actínio	Ac	89	(227)	10,06	1323	(3473)	0,092
Alumínio	Al	13	26,9815	2,699	660	2450	0,900
Amerício	Am	95	(243)	13,67	1541	—	—
Antimônio	Sb	51	121,75	6,691	630,5	1380	0,205
Argônio	Ar	18	39,948	$1{,}6626 \times 10^{-3}$	−189,4	−185,8	0,523
Arsênio	As	33	74,9216	5,78	817 (28 atm)	613	0,331
Astatínio	At	85	(210)	—	(302)	—	—
Bário	Ba	56	137,34	3,594	729	1640	0,205
Berílio	Be	4	9,0122	1,848	1287	2770	1,83
Berquélio	Bk	97	(247)	14,79	—	—	—
Bismuto	Bi	83	208,980	9,747	271,37	1560	0,122
Bóhrio	Bh	107	262,12	—	—	—	—
Boro	B	5	10,811	2,34	2030	—	1,11
Bromo	Br	35	79,909	3,12 (líquida)	−7,2	58	0,293
Cádmio	Cd	48	112,40	8,65	321,03	765	0,226
Cálcio	Ca	20	40,08	1,55	838	1440	0,624
Califórnio	Cf	98	(251)	—	—	—	—
Carbono	C	6	12,01115	2,26	3727	4830	0,691
Cério	Ce	58	140,12	6,768	804	3470	0,188
Césio	Cs	55	132,905	1,873	28,40	690	0,243
Chumbo	Pb	82	207,19	11,35	327,45	1725	0,129
Cloro	Cl	17	35,453	$3{,}214 \times 10^{-3}$ (0°C)	−101	−34,7	0,486
Cobalto	Co	27	58,9332	8,85	1495	2900	0,423
Cobre	Cu	29	63,54	8,96	1083,40	2595	0,385
Criptônio	Kr	36	83,80	$3{,}488 \times 10^{-3}$	−157,37	−152	0,247
Cromo	Cr	24	51,996	7,19	1857	2665	0,448
Cúrio	Cm	96	(247)	13,3	—	—	—
Darmstádtio	Ds	110	(271)	—	—	—	—
Disprósio	Dy	66	162,50	8,55	1409	2330	0,172
Dúbnio	Db	105	262,114	—	—	—	—
Einstêinio	Es	99	(254)	—	—	—	—
Enxofre	S	16	32,064	2,07	119,0	444,6	0,707
Érbio	Er	68	167,26	9,15	1522	2630	0,167
Escândio	Sc	21	44,956	2,99	1539	2730	0,569
Estanho	Sn	50	118,69	7,2984	231,868	2270	0,226
Estrôncio	Sr	38	87,62	2,54	768	1380	0,737
Európio	Eu	63	151,96	5,243	817	1490	0,163
Férmio	Fm	100	(237)	—	—	—	—
Ferro	Fe	26	55,847	7,874	1536,5	3000	0,447
Flúor	F	9	18,9984	$1{,}696 \times 10^{-3}$ (0°C)	−219,6	−188,2	0,753

Elemento	Símbolo	Número Atômico, Z	Massa Molar, g/mol	Massa Específica, g/cm³ a 20°C	Ponto de Fusão, °C	Ponto de Ebulição, °C	Calor Específico, J/(g·°C) a 25°C
Fósforo	P	15	30,9738	1,83	44,25	280	0,741
Frâncio	Fr	87	(223)	—	(27)	—	—
Gadolínio	Gd	64	157,25	7,90	1312	2730	0,234
Gálio	Ga	31	69,72	5,907	29,75	2237	0,377
Germânio	Ge	32	72,59	5,323	937,25	2830	0,322
Háfnio	Hf	72	178,49	13,31	2227	5400	0,144
Hássio	Hs	108	(265)	—	—	—	—
Hélio	He	2	4,0026	$0{,}1664 \times 10^{-3}$	−269,7	−268,9	5,23
Hidrogênio	H	1	1,00797	$0{,}08375 \times 10^{-3}$	−259,19	−252,7	14,4
Hólmio	Ho	67	164,930	8,79	1470	2330	0,165
Índio	In	49	114,82	7,31	156,634	2000	0,233
Iodo	I	53	126,9044	4,93	113,7	183	0,218
Irídio	Ir	77	192,2	22,5	2447	(5300)	0,130
Itérbio	Yb	70	173,04	6,965	824	1530	0,155
Ítrio	Y	39	88,905	4,469	1526	3030	0,297
Lantânio	La	57	138,91	6,189	920	3470	0,195
Laurêncio	Lr	103	(257)	—	—	—	—
Lítio	Li	3	6,939	0,534	180,55	1300	3,58
Lutécio	Lu	71	174,97	9,849	1663	1930	0,155
Magnésio	Mg	12	24,312	1,738	650	1107	1,03
Manganês	Mn	25	54,9380	7,44	1244	2150	0,481
Meitnério	Mt	109	(266)	—	—	—	—
Mendelévio	Md	101	(256)	—	—	—	—
Mercúrio	Hg	80	200,59	13,55	−38,87	357	0,138
Molibdênio	Mo	42	95,94	10,22	2617	5560	0,251
Neodímio	Nd	60	144,24	7,007	1016	3180	0,188
Neônio	Ne	10	20,183	$0{,}8387 \times 10^{-3}$	−248,597	−246,0	1,03
Netúnio	Np	93	(237)	20,25	637	—	1,26
Nióbio	Nb	41	92,906	8,57	2468	4927	0,264
Níquel	Ni	28	58,71	8,902	1453	2730	0,444
Nitrogênio	N	7	14,0067	$1{,}1649 \times 10^{-3}$	−210	−195,8	1,03
Nobélio	No	102	(255)	—	—	—	—
Ósmio	Os	76	190,2	22,59	3027	5500	0,130
Ouro	Au	79	196,967	19,32	1064,43	2970	0,131
Oxigênio	O	8	15,9994	$1{,}3318 \times 10^{-3}$	−218,80	−183,0	0,913
Paládio	Pd	46	106,4	12,02	1552	3980	0,243
Platina	Pt	78	195,09	21,45	1769	4530	0,134
Plutônio	Pu	94	(244)	19,8	640	3235	0,130
Polônio	Po	84	(210)	9,32	254	—	—
Potássio	K	19	39,102	0,862	63,20	760	0,758
Praseodímio	Pr	59	140,907	6,773	931	3020	0,197
Prata	Ag	47	107,870	10,49	960,8	2210	0,234
Promécio	Pm	61	(145)	7,22	(1027)	—	—
Protactínio	Pa	91	(231)	15,37 (estimada)	(1230)	—	—
Rádio	Ra	88	(226)	5,0	700	—	—
Radônio	Rn	86	(222)	$9{,}96 \times 10^{-3}$ (0°C)	(−71)	−61,8	0,092
Rênio	Re	75	186,2	21,02	3180	5900	0,134
Ródio	Rh	45	102,905	12,41	1963	4500	0,243

Elemento	Símbolo	Número Atômico, Z	Massa Molar, g/mol	Massa Específica, g/cm³ a 20°C	Ponto de Fusão, °C	Ponto de Ebulição, °C	Calor Específico, J/(g · °C) a 25°C
Roentgênio	Rg	111	(272)	—	—	—	—
Rubídio	Rb	37	85,47	1,532	39,49	688	0,364
Rutênio	Ru	44	101,107	12,37	2250	4900	0,239
Rutherfórdio	Rf	104	261,11	—	—	—	—
Samário	Sm	62	150,35	7,52	1072	1630	0,197
Seabórgio	Sg	106	263,118	—	—	—	—
Selênio	Se	34	78,96	4,79	221	685	0,318
Silício	Si	14	28,086	2,33	1412	2680	0,712
Sódio	Na	11	22,9898	0,9712	97,85	892	1,23
Tálio	Tl	81	204,37	11,85	304	1457	0,130
Tântalo	Ta	73	180,948	16,6	3014	5425	0,138
Tecnécio	Tc	43	(99)	11,46	2200	—	0,209
Telúrio	Te	52	127,60	6,24	449,5	990	0,201
Térbio	Tb	65	158,924	8,229	1357	2530	0,180
Titânio	Ti	22	47,90	4,54	1670	3260	0,523
Tório	Th	90	(232)	11,72	1755	(3850)	0,117
Túlio	Tm	69	168,934	9,32	1545	1720	0,159
Tungstênio	W	74	183,85	19,3	3380	5930	0,134
Unúmbio	Uub	112	(285)	—	—	—	—
Ununhéxio	Uuh	116	(293)	—	—	—	—
Ununóctio	Uuo	118	(294)	—	—	—	—
Ununpêntio	Uup	115	(288)	—	—	—	—
Ununquádio	Uuq	114	(289)	—	—	—	—
Ununséptio	Uus	117	—	—	—	—	—
Ununtrio	Uut	113	(284)	—	—	—	—
Urânio	U	92	(238)	18,95	1132	3818	0,117
Vanádio	V	23	50,942	6,11	1902	3400	0,490
Xenônio	Xe	54	131,30	$5{,}495 \times 10^{-3}$	−111,79	−108	0,159
Zinco	Zn	30	65,37	7,133	419,58	906	0,389
Zircônio	Zr	40	91,22	6,506	1852	3580	0,276

Os números entre parênteses na coluna das massas molares são os números de massa dos isótopos de vida mais longa dos elementos radioativos. Os pontos de fusão e pontos de ebulição entre parênteses são pouco confiáveis.

Os dados para os gases são válidos apenas quando estes se encontram no estado molecular mais comum, como H_2, He, O_2, Ne etc. Os calores específicos dos gases são os valores à pressão constante.

Fonte: Adaptada de J. Emsley, *The Elements*, 3ª edição, 1998, Clarendon Press, Oxford. Veja também www.webelements.com para valores atualizados e, possivelmente, novos elementos.

Tabela Periódica dos Elementos G

Metais · Metalóides · Não-metais

Metais de transição

PERÍODOS HORIZONTAIS

	Metais alcalinos IA	IIA	IIIB	IVB	VB	VIB	VIIB	VIIIB	VIIIB	VIIIB	IB	IIB	IIIA	IVA	VA	VIA	VIIA	Gases nobres 0
1	1 H																	2 He
2	3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
3	11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
4	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
5	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
6	55 Cs	56 Ba	57-71 *	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
7	87 Fr	88 Ra	89-103 †	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Ds	111 Rg	112	113	114	115	116	117	118

Metais de transição

Série dos lantanídeos *	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
Série dos actinídeos †	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr

Os elementos 112, 114 e 116 foram descobertos, mas até 2007 ainda não haviam recebido nomes. Veja www.webelements.com para informações mais atualizadas e possíveis novos elementos.

Respostas

dos Testes e das Perguntas e Problemas Ímpares

Capítulo 1

PR **1.** (a) 10^9 μm; (b) 10^{-4}; (c) $9{,}1 \times 10^5$ μm **3.** (a) 160 varas; (b) 40 cadeias **5.** (a) $4{,}00 \times 10^4$ km; (b) $5{,}10 \times 10^8$ km^2; (c) $1{,}08 \times 10^{12}$ km^3 **7.** $1{,}9 \times 10^{22}$ cm^3 **9.** $1{,}1 \times 10^3$ acres-pés **11.** $1{,}21 \times 10^{12}$ μs **13.** (a) 1,43; (b) 0,864 **15.** (a) 495 s; (b) 141 s; (c) 198 s; (d) −245 s **17.** C, D, A, B, E; o critério importante é a constância dos resultados, e não o seu valor **19.** $5{,}2 \times 10^6$ m **21.** (a) 1×10^3 kg; (b) 158 kg/s **23.** $9{,}0 \times 10^{49}$ átomos **25.** (a) $1{,}18 \times 10^{-29}$ m^3; (b) 0,282 nm **27.** 1750 kg **29.** $1{,}9 \times 10^5$ kg **31.** 1,43 kg/min **33.** (a) 22 *pecks*; (b) 5,5 *Imperial bushels*; (c) 200 L **35.** (a) 18,8 galões; (b) 22,5 galões **37.** (a) 11,3 m^2/L; (b) $1{,}13 \times 10^4$ m^{-1}; (c) $2{,}17 \times 10^{-3}$ pés^2/galão; (d) número de galões para pintar um pé quadrado **39.** 0,3 cord **41.** (a) 293 alqueires americanos; (b) $3{,}81 \times 10^3$ alqueires americanos **43.** 8×10^2 km **45.** 0,12 UA/min **47.** 3,8 mg/s **49.** 10,7 pimentas *habanero* **51.** (a) sim; (b) 8,6 segundos do universo **53.** (a) 3,88; (b) 7,65; (c) 156 ken^3; (d) $1{,}19 \times 10^3$ m^3 **55.** 1,2 m **57.** (a) $4{,}9 \times 10^{-6}$ parsecs; (b) $1{,}6 \times 10^{-5}$ anos-luz **59.** (a) 3,9 m, 4,8 m; (b) $3{,}9 \times 10^3$ mm, $4{,}8 \times 10^3$ mm; (c) 2,2 m^3, 4,2 m^3

Capítulo 2

T **1.** b e c **2.** (verifique a derivada dx/dt) (a) 1 e 4; (b) 2 e 3 **3.** (a) positivo; (b) negativo; (c) negativo; (d) positivo **4.** 1 e 4 ($a = d^2x/dt^2$ deve ser constante) **5.** (a) positivo (deslocamento para cima ao longo do eixo y); (b) negativo (deslocamento para baixo ao longo do eixo y); (c) $a = -g = -9{,}8$ m/s^2
P **1.** (a) todas iguais; (b) 4, 1 e 2, 3 **3.** (a) negativo; (b) positivo; (c) sim; (d) positiva; (e) constante **5.** (a) positivo; (b) negativo; (c) 3 e 5; (d) 2 e 6, 3 e 5, 1 e 4 **7.** (a) 3, 2, 1; (b) 1, 2, 3; (c) todas iguais; (d) 1, 2, 3 **9.** (a) D; (b) E **PR** **1.** (a) +40 km/h; (b) 40 km/h **3.** 13 m **5.** (a) 0; (b) −2 m; (c) 0; (d) 12 m; (e) +12 m; (f) +7 m/s **7.** 1,4 m **9.** 128 km/h **11.** 60 km **13.** (a) 73 km/h; (b) 68 km/h; (c) 70 km/h; (d) 0 **15.** (a) −6 m/s; (b) no sentido negativo; (c) 6 m/s; (d) diminuindo; (e) 2 s; (f) não **17.** (a) 28,5 cm/s; (b) 18,0 cm/s; (c) 40,5 cm/s; (d) 28,1 cm/s; (e) 30,3 cm/s **19.** −20 m/s^2 **21.** (a) m/s^2; (b) m/s^3; (c) 1,0 s; (d) 82 m; (e) −80 m; (f) 0; (g) −12 m/s; (h) −36 m/s; (i) −72 m/s; (j) −6 m/s^2; (k) −18 m/s^2; (l) −30 m/s^2; (m) −42 m/s^2 **23.** (a) +1,6 m/s; (b) +18 m/s **25.** (a) $3{,}1 \times 10^6$ s; (b) $4{,}6 \times 10^{13}$ m **27.** $1{,}62 \times 10^{15}$ m/s^2 **29.** (a) 30 s; (b) 300 m **31.** (a) 10,6 m; (b) 41,5 s **33.** (a) 3,56 m/s^2; (b) 8,43 m/s **35.** (a) 4,0 m/s^2; (b) positivo **37.** (a) −2,5m/s^2; (b) 1; (d) 0; (e) 2 **39.** 40 m **41.** 0,90 m/s^2 **43.** (a) 15,0 m; (b) 94 km/h **45.** (a) 29,4 m; (b) 2,45 s **47.** (a) 31 m/s; (b) 6,4 s **49.** (a) 5,4 s; (b) 41 m/s **51.** 4,0 m/s **53.** (a) 20 m; (b) 59 m **55.** (a) 857 m/s^2; (b) para cima **57.** (a) $1{,}26 \times 10^3$ m/s^2; (b) para cima **59.** (a) 89 cm; (b) 22 cm **61.** 2,34 m **63.** 20,4 m **65.** (a) 2,25 m/s; (b) 3,90 m/s **67.** 100 m **69.** 0,56 m/s **71.** (a) 82 m; (b) 19 m/s **73.** (a) 2,00 s; (b) 12 cm; (c) −9,00 cm/s^2; (d) para a direita; (e) para a esquerda; (f) 3,46 s **75.** (a) 48,5 m/s; (b) 4,95 s; (c) 34,3 m/s; (d) 3,50 s **77.** 414 ms **79.** 90 m **81.** (a) 3,0 s; (b) 9,0 m **83.** 2,78 m/s^2 **85.** (a) 0,74 s; (b) 6,2 m/s^2 **87.** 17 m/s **89.** +47 m/s **91.** (a) 3,1 m/s^2; (b) 45 m; (c) 13 s **93.** (a) 1,23 cm; (b) por 4; (c) por 9; (d) por 16; (e) por 25 **95.** 25 km/h **97.** 1,2 h **99.** $4H$ **101.** (a) 3,2 s; (b) 1,3 s **103.** (a) 10,2 s; (b) 10,0 m **105.** (a) 8,85 m/s; (b) 1,00 m **107.** (a) 2,0 m/s^2; (b) 12 m/s; (c) 45 m **109.** 3,75 ms **111.** (a) 5,44 s; (b) 53,3 m/s; (c) 5,80 m **113.** (a) 9,08 m/s^2; (b) 0,926g; (c) 6,12 s; (d) 15,3T_r; (e) ao processo de frenagem; (f) 5,56 m

Capítulo 3

T **1.** (a) 7 m ($\vec{a}$ e $\vec{b}$ no mesmo sentido; (b) 1 m ($\vec{a}$ e $\vec{b}$ em sentidos opostos) **2.** c, d, f (a origem da segunda componente deve coincidir com a extremidade da primeira; $\vec{a}$ deve ligar a origem da primeira componente com a extremidade da segunda) **3.** (a), +; (b) +, −; (c) +, + (o vetor deve ser traçado da origem de $\vec{d}_1$ à extremidade de $\vec{d}_2$) **4.** (a) 90°; (b) 0° (os vetores são paralelos); (c) 180° (os vetores são antiparalelos) **5.** (a) 0° ou 180°; (b) 90° **P** **1.** A seqüência $\vec{d}_2$, $\vec{d}_1$ ou a seqüência $\vec{d}_2$, $\vec{d}_2$, $\vec{d}_3$. **3.** sim, se os vetores forem paralelos **5.** (a) sim; (b) sim; (c) não **7.** todos, menos (e) **9.** (a) $+x$ para (1), $+z$ para (2), $+z$ para (3); (b) $-x$ para (1), $-z$ para (2), $-z$ para (3)
PR **1.** (a) 47,2 m; (b) 122° **3.** (a) −2,5 m; (b) −6,9 m **5.** (a) 156 km; (b) 39,8° a oeste do norte **7.** (a) 6,42 m; (b) não; (c) sim; (d) sim; (e) uma possível resposta: $(4{,}30\text{ m})\hat{i} + (3{,}70\text{ m})\hat{j} + (3{,}00\text{ m})\hat{k}$; (f) 7,96 m **9.** (a) $(-9{,}0\text{ m})\hat{i} + (10\text{ m})\hat{j}$; (b) 13 m; (c) 132° **11.** 4,74 km **13.** (a) $(3{,}0\text{ m})\hat{i} - (2{,}0\text{ m})\hat{j} + (5{,}0\text{ m})\hat{k}$; (b) $(5{,}0\text{ m})\hat{i} - (4{,}0\text{ m})\hat{j} - (3{,}0\text{ m})\hat{k}$; (c) $(-5{,}0\text{ m})\hat{i} + (4{,}0\text{ m})\hat{j} + (3{,}0\text{ m})\hat{k}$ **15.** (a) −70,0 cm; (b) 80,0 cm; (c) 141 cm; (d) −172° **17.** (a) 1,59 m; (b) 12,1 m; (c) 12,2 m; (d) 82,5° **19.** (a) 38 m; (b) −37,5°; (c) 130 m; (d) 1,2°; (e) 62 m; (f) 130° **21.** 5,39 m e 21,8° à esquerda ou para a frente **23.** 2,6 km **25.** 3,2 **27.** (a) 7,5 cm; (b) 90°; (c) 8,6 cm; (d) 48° **29.** (a) $8\hat{i} + 16\hat{j}$; (b) $2\hat{i} + 4\hat{j}$ **31.** (a) $a\hat{i} + a\hat{j} + a\hat{k}$; (b) $-a\hat{i} + a\hat{j} + a\hat{k}$; (c) $a\hat{i} - a\hat{j} + a\hat{k}$; (d) $-a\hat{i} - a\hat{j} + a\hat{k}$; (e) 54,7°; (f) $3^{0,5}a$ **33.** (a) −18,8 unidades; (b) 26,9 unidades, na direção $+z$ **35.** (a) −21; (b) −9; (c) $5\hat{i} - 11\hat{j} - 9\hat{k}$ **37.** (a) 12; (b) $+z$; (c) 12; (d) $-z$; (e) 12; (f) $+z$ **39.** 22° **41.** 70,5° **43.** (a) 3,00 m; (b) 0; (c) 3,46 m; (d) 2,00 m; (e) −5,00 m; (f) 8,66 m; (g) −6,67; (h) 4,33 **45.** (a) 27,8 m; (b) 13,4 m **47.** (a) 30; (b) 52 **49.** (a) −2,83 m; (b) −2,83 m; (c) 5,00 m; (d) 0; (e) 3,00 m; (f) 5,20 m; (g) 5,17 m; (h) 2,37 m; (i) 5,69 m; (j) 25° ao norte do leste; (k) 5,69 m; (l) 25° ao sul do oeste **51.** (a) 103 km; (b) 60,9° ao norte do oeste **53.** (a) 140°; (b) 90,0°; (c) 99,1° **55.** (a) −83,4; (b) $(1{,}14 \times 10^3)\hat{k}$; (c) $1{,}14 \times 10^3$, θ não é definido, $\phi = 0°$; (d) 90,0°; (e) $-5{,}14\hat{i} + 6{,}13\hat{j} + 3{,}00\hat{k}$; (f) 8,54, $\theta = 130°$, $\phi = 69{,}4°$ **57.** (a) 3,0 m^2; (b) 52 m^3; (c) $(11\text{ m}^2)\hat{i} + (9{,}0\text{ m}^2)\hat{j} + (3{,}0\text{ m}^2)\hat{k}$ **59.** (a) $+y$; (b) $-y$; (c) 0; (d) 0; (e) $+z$; (f) $-z$; (g) ab; (h) ab; (i) ab/d; (j) $+z$ **61.** (a) 0; (b) 0; (c) −1; (d) para oeste; (e) para cima; (f) para oeste **63.** Walpole (onde fica a penitenciária estadual) **65.** (a) $(9{,}19\text{ m})\hat{i}' + (7{,}71\text{ m})\hat{j}'$; (b) $(14{,}0\text{ m})\hat{i}' + (3{,}41\text{ m})\hat{j}'$ **67.** (a) $11\hat{i} + 5{,}0\hat{j} - 7{,}0\hat{k}$; (b) 120°; (c) −4,9; (d) 7,3 **69.** (a) $(-40\hat{i} - 20\hat{j} + 25\hat{k})$ m; (b) 45 m **71.** 4,1

Capítulo 4

T **1.** (trace $\vec{v}$ tangente à trajetória, com a origem na trajetória) (a) primeiro; (b) terceiro **2.** (calcule a derivada segunda em relação ao tempo) (1) e (3) a_x e a_y são constantes e, portanto, $\vec{a}$ é constante; (2) e (4) a_y é constante mas a_x não é constante e, portanto, $\vec{a}$ não é constante **3.** não **4.** (a) v_x é constante; (b) v_y é inicialmente positiva, diminui até zero e depois se torna cada vez mais negativa; (c) $a_x = 0$ sempre; (d) $a_y = -g$ sempre **5.** (a) $-(4\text{ m/s})\hat{i}$; (b) $-(8\text{ m/s}^2)\hat{j}$ **P** **1.** (a) $(7\text{ m})\hat{i} + (1\text{ m})\hat{j} + (-2\text{ m})\hat{k}$; (b) $(5\text{ m})\hat{i} + (-3\text{ m})\hat{j} + (1\text{ m})\hat{k}$; (c) $(-2\text{ m})\hat{i}$

3. (a) todos iguais; (b) 1 e 2 (o foguete é disparado para cima), 3 e 4 (o foguete é disparado para baixo!) 5. diminui 7. (a) todas iguais; (b) todas iguais; (c) 3, 2, 1; (d) 3, 2 ,1 9. (a) 0; (b) 350 km/h; (c) 350 km/h; (d) igual (a componente vertical do movimento seria a mesma) 11. (a) 90° e 270°; (b)0° e 180°; (c) 90° e 270° 13. 2, 1 e 4, 3 **PR** 1. $(-2{,}0\text{ m})\hat{i} + (6{,}0\text{ m})\hat{j} - (10\text{ m})\hat{k}$ 3. (a) 6,2 m 5. $(-0{,}70\text{ m/s})\hat{i} + (1{,}4\text{ m/s})\hat{j} - (0{,}40\text{ m/s})\hat{k}$ 7. (a) 7,59 km/h; (b) 22,5° a leste do norte 9. (a) 0,83 cm/s; (b) 0°; (c) 0,11 m/s; (d) −63° 11. (a) $(8\text{ m/s}^2)t\hat{j} + (1\text{ m/s})\hat{k}$; (b) $(8\text{ m/s}^2)\hat{j}$ 13. (a) $(6{,}00\text{ m})\hat{i} - (106\text{ m})\hat{j}$; (b) $(19{,}0\text{ m/s})\hat{i} - (224\text{ m/s})\hat{j}$; (c) $(24{,}0\text{ m/s}^2)\hat{i} - (336\text{ m/s}^2)\hat{j}$; (d) −85,2° 15. $(32\text{ m/s})\hat{i}$ 17. (a) $(-1{,}50\text{ m/s})\hat{j}$; (b) $(4{,}50\text{ m})\hat{i} - (2{,}25\text{ m})\hat{j}$ 19. (a) $(72{,}0\text{ m})\hat{i} + (90{,}7\text{ m})\hat{j}$; (b) 49,5° 21. (a) 3,03 s; (b) 758 m; (c) 29,7 m/s 23. 43,1 m/s (155 km/h) 25. (a) 18 cm; (b) 1,9 m 27. (a) 10,0 s; (b) 897 m 29. (a) 1,60 m; (b) 6,86 m; (c) 2,86 m 31. (a) 202 m/s; (b) 806 m; (c) 161 m/s; (d) −171 m/s 33. 3,35 m 35. 78,5° 37. (a) 11 m; (b) 23 m; (c) 17 m/s; (d) 63° 39. 4,84 cm 41. (a) 32,3 m; (b) 21,9 m/s; (c) 40,4° 43. (a) na rampa; (b) 5,82 m; (c) 31,0° 45. 64,8° 47. (a) sim; (b) 2,56 m 49. (a) 2,3°; (b) 1,4 m; (c) 18° 51. (a) 31°; (b) 63° 53. no terceiro 55. (a) 75,0 m; (b) 31,9 m/s; (c) 66,9°; (d) 25,5 m 57. (a) 12 s; (b) 4,1 m/s²; (c) para baixo; (d) 4,1 m/s²; (e) para cima 59. (a) $1{,}3 \times 10^5$ m/s; (b) $7{,}9 \times 10^5$ m/s²; (c) aumentam 61. (a) 7,32 m; (b) para oeste; (c) para o norte 63. $(3{,}00\text{ m/s}^2)\hat{i} + (6{,}00\text{ m/s}^2)\hat{j}$ 65. 2,92 m 67. 160 m/s² 69. (a) 13 m/s²; (b) para leste; (c) 13 m/s²; (d) para leste 71. 1,67 73. (a) 38 nós; (b) 1,5° a leste do norte; (c) 4,2 h; (d) 1,5° a oeste do sul 75. 60° 77. 32 m/s 79. (a) $(80\text{ km/h})\hat{i} - (60\text{ km/h})\hat{j}$; (b) 0°; (c) não 81. (a) $(-32\text{ km/h})\hat{i} - (46\text{ km/h})\hat{j}$; (b) $[(2{,}5\text{ km}) - (32\text{ km/h})t]\hat{i} + [(4{,}0\text{ km}) - (46\text{ km/h})t]\hat{j}$; (c) 0,084 h; (d) 2×10^2 m 83. (a) 2,7 km; (b) 76° no sentido horário 85. 2,64 m 87. (a) 2,5 m; (b) 0,82 m; (c) 9,8 m/s²; (d) 9,8 m/s² 89. (a) − 30°; (b) 69 min; (c) 80 min; (d) 80 min; (e) 0°; (f) 60 min 91. (a) 62 ms; (b) $4{,}8 \times 10^2$ m/s 93. (a) $6{,}7 \times 10^6$ m/s; (b) $1{,}4 \times 10^{-7}$ s 95. (a) 4,2 m, 45°; (b) 5,5 m, 68°; (c) 6,0 m, 90°; (d) 4,2 m, 135°; (e) 0,85 m/s, 135°; (f) 0,94 m/s, 90°; (g) 0,94 m/s, 180°; (h) 0,30 m/s², 180°; (i) 0,30 m/s², 270° 97. (a) 6,79 km/h; (b) 6,96° 99. (a) 16 m/s; (b) 23°; (c) acima; (d) 27 m/s; (e) 57°; (f) abaixo 101. (a) 24 m/s; (b) 65° 103. (a) 1,5; (b) (36 m, 54 m) 105. (a) 0,034 m/s²; (b) 84 min 107. (a) 44 m; (b) 13 m; (c) 8,9 m 109. (a) $2{,}6 \times 10^2$ m/s; (b) 45 s; (c) aumentaria 111. (a) 45 m; (b) 22 m/s 113. (a) 2,00 ns; (b) 2,00 mm; (c) $1{,}00 \times 10^7$ m/s; (d) $2{,}00 \times 10^6$ m/s 115. (a) $4{,}6 \times 10^{12}$ m; (b) $2{,}4 \times 10^5$ s 117. 93° em relação à direção do movimento do vagão 119. (a) 8,43 m; (b) −129° 121. (a) 63 km; (b) 18° ao sul do leste; (c) 0,70 km/h; (d) 18° ao sul do leste; (e) 1,6 km/h; (f) 1,2 km/h; (g) 33° ao norte do leste 123. 3×10^1 m 125. (a) 14 m/s; (b) 14 m/s; (c) −10 m; (d) −4,9 m; (e) +10 m; (f) −4,9 m 127. 67 km/h 129. (a) 75° a leste do sul; (b) 30° a leste do norte. Existe uma segunda solução, com o leste substituído por oeste nas duas respostas. 131. (a) 11 m; (b) 45 m/s

Capítulo 5

T 1. *c*, *d* e *e* 2. (a) e (b) 2 N, para a esquerda (a aceleração é zero nas duas situações) 3. (a) igual; (b) maior (a aceleração é para cima e, portanto, a força resultante é para cima) 4. (a) igual; (b) maior; (c) menor 5. (a) aumentam; (b) sim; (c) permanecem os mesmos; (d) sim **P** 1. aumentar 3. (a) 2 e 4; (b) 2 e 4 5. (a) 2, 3, 4; (b) 1, 3, 4; (c) 1, +*y*; 2, +*x*; 3, quarto quadrante; 4, terceiro quadrante 7. (a) 20 kg; (b) 18 kg; (c) 10 kg; (d) todas iguais; (e) 3,2,1 9. (a) aumenta a partir do valor inicial *mg*; (b) diminui de *mg* até zero (e depois o bloco perde o contato com o piso) 11. (a) *M*; (b) *M*; (c) *M*; (d) 2*M*; (e) 3*M*

PR 1. (a) 1,88 N; (b) 0,684 N; (c) $(1{,}88\text{ N})\hat{i} + (0{,}684\text{ N})\hat{j}$ 3. 2,9 m/s² 5. (a) $(-32{,}0\text{ N})\hat{i} - (20{,}8\text{ N})\hat{j}$; (b) 38,2 N; (c) −147° 7. (a) $(0{,}86\text{ m/s}^2)\hat{i} - (0{,}16\text{ m/s}^2)\hat{j}$; (b) 0,88m/s²; (c) −11° 9. 9,0 m/s² 11. (a) 8,37 N; (b) −133°; (c) -125° 13. (a) 108 N; (b) 108 N; (c) 108 N 15. (a) 4,0 kg; (b) 1,0 kg; (c) 4,0 kg; (d) 1,0 kg 17. (a) $-9{,}80\hat{j}$ m/s²; (b) $2{,}35\hat{j}$ m/s²; (c) 1,37 s; (d) $(-5{,}56 \times 10^{-3}\text{ N})\hat{j}$; (e) $(1{,}333 \times 10^{-3}\text{ N})\hat{j}$ 19. (a) 42 N; (b) 72 N; (c) 4,9 m/s² 21. (a) 11,7 N; (b) − 59,0° 23. (a) 0,022 m/s²; (b) $8{,}3 \times 10^4$ km; (c) $1{,}9 \times 10^3$ m/s 25. $1{,}2 \times 10^5$ N 27. (a) 494 N; (b) para cima; (c) 494 N; (d) para baixo 29. 1,5 mm 31. (a) 46,7°; (b) 28,0° 33. (a) 0,62 m/s²; (b) 0,13 m/s²; (c) 2,6 m 35. (a) 1,18 m; (b) 0,674 s; (c) 3,50 m/s 37. (a) $2{,}2 \times 10^{-3}$N; (b) $3{,}7 \times 10^{-3}$ N 39. $1{,}8 \times 10^4$ N 41. (a) 31,3 kN; (b) 24,3 kN 43. (a) 1,4 m/s²; (b) 4,1 m/s 45. (a) 1,23 N; (b) 2,46 N; (c) 3,69 N; (d) 4,92 N; (e) 6,15 N; (f) 0,250 N 47. (a) 2,18 m/s²; (b) 116 N; (c) 21,0 m/s² 49. $6{,}4 \times 10^3$ N 51. (a) 0,970 m/s²; (b) 11,6 N; (c) 34,9 N 53. (a) 1,1 N 55. (a) 3,6 m/s²; (b) 17 N 57. (a) 4,9 m/s²; (b) 2,0 m/s²; (c) para cima; (d) 120 N 59. (a) 0,735 m/s²; (b) para baixo; (c) 20,8 N 61. $2Ma/(a + g)$ 63. (a) 0,653 m/s³; (b) 0,896 m/s³; (c) 6,50 s 65. 81,7 N 67. (a) 8,0 m/s; (b) +*x* 69. (a) 13 597 kg; (b) 4917 L; (c) 6172 kg; (d) 20,075 L; (e) 45% 71. (a) 0; (b) 0,83 m/s²; (c) 0 73. (a) 0,74 m/s²; (b) 7,3 m/s² 75. (a) a corda arrebenta; (b) 1,6 m/s² 77. 2,4 N 79. (a) 4,6 m/s²; (b) 2,6 m/s² 81. (a) 65 N; (b) 49 N 83. (a) 11 N; (b) 2,2 kg; (c) 0; (d) 2,2 kg 85. (a) $4{,}6 \times 10^3$ N; (b) $5{,}8 \times 10^3$ N 87. (a) 4 kg; (b) 6,5 m/s²; (c) 13 N 89. 195 N 91. (a) 44 N; (b) 78 N; (c) 54 N; (d) 152 N 93. 16N 95. (a) $1{,}8 \times 10^2$ N; (b) $6{,}4 \times 10^2$ N 97. (a) $(5{,}0\text{ m/s})\hat{i} + (4{,}3\text{ m/s})\hat{j}$; (b) $(15\text{ m})\hat{i} + (6{,}4\text{ m})\hat{j}$ 99. 16 N 101. (a) 2,6 N; (b) 17° 103. (a) 4,1 m/s²; (b) 836 N

Capítulo 6

T 1. (a) zero (porque não há uma tentativa de deslizamento); (b) 5 N; (c) não; (d) sim; (e) 8 N 2. ($\vec{a}$ aponta para o centro da trajetória circular) (a) $\vec{a}$ aponta para baixo, $\vec{F}_N$ aponta para cima; (b) $\vec{a}$ e $\vec{F}_N$ apontam para cima **P** 1. (a) permanece o mesmo; (b) aumenta; (c) aumenta; (d) não 3. (a) diminui; (b) diminui; (c) aumenta; (d) aumenta; (e) aumenta 5. (a) para cima; (b) horizontal, na sua direção; (c) não varia; (d) aumenta; (e) aumenta 7. A princípio, $\vec{f}_s$ aponta para cima ao longo da rampa e seu módulo aumenta a partir de mg sen θ até atingir $f_{s,máx}$. Daí em diante a força se torna a força de atrito cinético, que aponta para cima ao longo da rampa e cujo módulo é f_k (um valor constante menor que $f_{s,máx}$). 9. (a) todas iguais; (b) todas iguais; (c) 2, 3, 1 11. Primeiro 4, depois 3 e depois 1, 2 e 5 empatadas **PR** 1. (a) $2{,}0 \times 10^2$ N; (b) $1{,}2 \times 10^2$ N 3. (a) $1{,}9 \times 10^2$ N; (b) 0,56 m/s² 5. 36 m 7. (a) 11 N; (b) 0,14 m/s² 9. (a) 6,0 N; (b) 3,6 N; (c) 3,1 N 11. (a) $1{,}3 \times 10^2$ N; (b) não; (c) $1{,}1 \times 10^2$ N; (d) 46 N; (e) 17 N 13. (a) $3{,}0 \times 10^2$ N; (b) 1,3 m/s² 15. 2° 17. (a) não; (b) $(-12\text{ N})\hat{i} + (5{,}0\text{N})\hat{j}$ 19. (a) 19°; (b) 3,3 kN 21. (a) $(17\text{ N})\hat{i}$; (b) $(20\text{ N})\hat{i}$; (c) $(15\text{ N})\hat{i}$ 23. $1{,}0 \times 10^2$ N 25. 0,37 27. (a) 3,5 m/s²; (b) 0,21 N 29. (a) 0; (b) $(-3{,}9\text{ m/s}^2)\hat{i}$; (c) $(-1{,}0\text{ m/s}^2)\hat{i}$ 31. (a) 66 N; (b) 2,3 m/s² 33. $4{,}9 \times 10^2$ N 35. 9,9 s 37. 2,3 39. (a) $3{,}2 \times 10^2$ km/h; (b) $6{,}5 \times 10^2$ km/h; (c) não 41. 21 m 43. 0,60 45. (a) 10 s; (b) $4{,}9 \times 10^2$ N; (c) $1{,}1 \times 10^3$ N 47. $1{,}37 \times 10^3$ N 49. (a) mais leve; (b) 778 N; (c) 223 N; (d) 1,11 kN 51. 12° 53. 2,2 km 55. 1,81 m/s 57. $2{,}6 \times 10^3$ N 59. (a) 8,74 N; (b) 37,9 N; (c) 6,45 m/s; (d) na direção da haste 61. (a) 69 km/h; (b) 139 km/h; (c) sim 63. (a) 7,5 m/s²; (b) para baixo; (c) 9,5 m/s²; (d) para baixo 65. (a) 27 N; (b) 3,0 m/s² 67. (a) 35,3 N; (b) 39,7 N; (c) 320 N 69. g (sen $\theta - 2^{0,5}\mu_k \cos\theta$) 71. (a) $3{,}0 \times 10^5$ N; (b) 1,2° 73. 147 m/s 75. (a) 56 N; (b) 59 N;

(c) $1,1 \times 10^3$ N **77.** (a) 275 N; (b) 877 N **79.** (b) 240 N; (c) 0,60 **81.** (a) 13 N; (b) 1,6 m/s^2 **83.** 0,76 **85.** (a) $3,21 \times 10^3$ N; (b) sim **87.** 3,4 m/s^2 **89.** (a) 84,2 N; (b) 52,8 N; (c) 1,87 m/s^2 **91.** (a) 222 N; 334 N; (c) 311 N; (d) 311 N; (e) c, d **93.** (a) 6,80 s; (b) 6,76 s **95.** 3,4% **97.** (a) $\mu_k mg/(\text{sen}\ \theta - \mu_k \cos\theta)$; (b) $\theta_0 = \tan^{-1} \mu_s$ **99.** (a) $v_0^2/(4g\ \text{sen}\ \theta)$; (b) não **101.** (a) 30 cm/s; (b) 180 cm/s^2; (c) para dentro; (d) $3,6 \times 10^{-3}$ N; (e) para dentro; (f) 0,37 **103.** (a) 0,34; (b) 0,24 **105.** 0,18 **107.** 0,56 **109.** (a) 2,1 m/s^2; (b) para baixo; (c) 3,9 m; (d) permanece em repouso

Capítulo 7

T **1.** (a) diminui; (b) permanece a mesma; (c) negativo, nulo **2.** (a) positivo; (b) negativo; (c) nulo **3.** nula
P **1.** (a) positivo; (b) negativo; (c) negativo **3.** são todas iguais **5.** são todos iguais **7.** *b* (trabalho positivo), *a* (trabalho nulo), *c* (trabalho negativo), *d* (trabalho mais negativo) **9.** (a) *A*; (b) *B* **PR** **1.** (a) 5×10^{14} J; (b) 0,1 megaton de TNT; (c) 8 bombas **3.** (a) $2,9 \times 10^7$ m/s; (b) $2,1 \times 10^{-13}$ J **5.** (a) 2,4 m/s; (b) 4,8 m/s **7.** 20 J **9.** 0,96 J **11.** (a) $1,7 \times 10^2$ N; (b) $3,4 \times 10^2$ m; (c) $-5,8 \times 10^4$ J; (d) $3,4 \times 10^2$ N; (e) $1,7 \times 10^2$ m; (f) $-5,8 \times 10^4$ J **13.** (a) 1,50 J; (b) aumenta **15.** (a) 62,3°; (b) 118° **17.** (a) 12 kJ; (b) −11 kJ; (c) 1,1 kJ; (d) 5,4 m/s **19.** (a) $-3Mgd/4$; (b) Mgd; (c) $Mgd/4$; (d) $(gd/2)^{0,5}$ **21.** 4,41 J **23.** 25 J **25.** (a) 25,9 kJ; (b) 2,45 N **27.** (a) 7,2 J; (b) 7,2 J; (c) 0; (d) −25 J **29.** (a) 6,6 m/s; (b) 4,7 m **31.** (a) 0,90 J; (b) 2,1 J; (c) 0 **33.** (a) 0,12 m; (b) 0,36 J; (c) −0,36 J; (d) 0,060 m; (e) 0,090 J **35.** (a) 0; (b) 0 **37.** $5,3 \times 10^2$ J **39.** (a) 42 J; (b) 30 J; (c) 12 J; (d) 6,5 m/s, eixo $+x$; (e) 5,5 m/s, eixo $+x$; (f) 3,5 m/s, eixo $+x$ **41.** 4,00 N/m **43.** $4,9 \times 10^2$ W **45.** (a) 0,83 J; (b) 2,5 J; (c) 4,2 J; (d) 5,0 W **47.** $7,4 \times 10^2$ W **49.** (a) $1,0 \times 10^2$ J; (b) 8,4 W **51.** (a) 32,0 J; (b) 8,00 W; (c) 78,2° **53.** (a) 1×10^5 megatons de TNT; (b) 1×10^7 bombas **55.** −6 J **57.** (a) 98 N; (b) 4,0 cm; (c) 3,9 J; (d) −3,9 J **59.** −37 J **61.** 165 kW **63.** (a) $1,8 \times 10^5$ ft·lb; (b) 0,55 hp **65.** (a) 797 N; (b) 0; (c) −1,55 kJ; (d) 0; (e) 1,55 kJ; (f) *F* varia durante o deslocamento **67.** (a) 1,20 J; (b) 1,10 m/s **69.** (a) 314 J; (b) −155 J; (c) 0; (d) 158 J **71.** (a) 23 mm; (b) 45 N **73.** 235 kW **75.** (a) 13 J; (b) 13 J **77.** (a) 0,6 J; (b) 0; (c) −0,6 J **79.** (a) 6 J; (b) 6,0 J

Capítulo 8

T **1.** não (em duas trajetórias de *a* a *b*, o trabalho é −60 J; na terceira, é 60 J) **2.** 3, 1, 2 (veja a Eq. 8-6) **3.** (a) todas iguais; (b) todas iguais **4.** (a) *CD*, *AB*, *BC* (0) (com base nas inclinações); (b) o sentido positivo de *x* **5.** são todas iguais
P **1.** (a) 12 J; (b) −2 J **3.** (a) 3, 2, 1; (b) 1, 2, 3 **5.** 2, 1, 3 **7.** +30 J **9.** (a) aumenta; (b) diminui; (c) diminui; (d) permanece constante em *AB* e *BC* e diminui em *CD* **PR** **1.** (a) 167 J; (b) −167 J; (c) 196 J; (d) 29 J; (e) 167 J; (f) −167 J; (g) 296 J; (h) 129 J **3.** (a) 4,31 mJ; (b) −4,31 mJ; (c) 4,31 mJ; (d) −4,31 mJ; (e) todos aumentariam **5.** 89 N/cm **7.** (a) 13,1 J; (b) −13,1 J; (c) 13,1 J; (d) todos aumentam **9.** (a) $2,6 \times 10^2$ m; (b) permanece o mesmo; (c) diminui **11.** (a) 2,08 m/s; (b) 2,08 m/s; (c) aumentaria **13.** (a) 17,0 m/s; (b) 26,5 m/s; (c) 33,4 m/s; (d) 56,7 m; (e) continuariam as mesmas **15.** (a) 0,98 J; (b) −0,98 J; (c) 3,1 N/cm **17.** (a) 8,35 m/s; (b) 4,33 m/s; (c) 7,45 m/s; (d) diminuem **19.** (a) 2,5 N; (b) 0,31 N; (c) 30 cm **21.** (a) 4,85 m/s; (b) 2,42 m/s **23.** $-3,2 \times 10^2$ J **25.** (a) não; (b) $9,3 \times 10^2$ N **27.** (a) 784 N/m; (b) 62,7 J; (c) 62,7 J; (d) 80,0 cm **29.** (a) 39,2 J; (b) 39,2 J; (c) 4,00 m **31.** (a) 35 cm; (b) 1,7 m/s **33.** (a) 2,40 m/s; (b) 4,19 m/s **35.** −18 mJ **37.** (a) 39,6 cm; (b) 3,64 cm **39.** (a) 2,1 m/s; (b) 10 N; (c) $+x$; (d) 5,7 m; (e) 30 N; (f) $-x$ **41.** (a) −3,7 J; (c) 1,3 m; (d) 9,1 m; (e) 2,2 J; (f) 4,0 m; (g) $(4 - x)\,e^{x/4}$; (h) 4,0 m **43.** (a) 5,6 J; (b) 3,5 J **45.** (a) 30,1 J; (b) 30,1 J; (c) 0,225 **47.** (a) −2,9 kJ; (b) $3,9 \times 10^2$ J; (c) $2,1 \times 10^2$ N **49.** 0,53 J **51.** (a) 1,5 MJ; (b) 0,51 MJ; (c) 1,0 MJ; (d) 63 m/s **53.** 1,2 m **55.** (a) 67 J; (b) 67 J; (c) 46 cm **57.** (a) $1,5 \times 10^{-2}$ N; (b) $(3,8 \times 10^2)\,g$ **59.** (a) −0,90 J; (b) 0,46 J; (c) 1,0 m/s **61.** (a) 19,4 m; (b) 19,0 m/s **63.** 20 cm **65.** (a) 7,4 m/s; (b) 90 cm; (c) 2,8 m; (d) 15 m **67.** (a) 10 m; (b) 49 N; (c) 4,1 m; (d) $1,2 \times 10^2$ N **69.** 4,33 m/s **71.** (a) 5,5 m/s; (b) 5,4 m; (c) permanecem as mesmas **73.** (a) 109 J; (b) 60,3 J; (c) 68,2 J; (d) 41,0 J **75.** 3,7 J **77.** 15 J **79.** (a) 2,7 J; (b) 1,8 J; (c) 0,39 m **81.** 80 mJ **83.** (a) 7,0 J; (b) 22 J **85.** (a) $7,4 \times 10^2$ J; (b) $2,4 \times 10^2$ J **87.** 25 J **89.** 24 W **91.** −12 J **93.** (a) 8,8 m/s; (b) 2,6 kJ; (c) 1,6 kW **95.** (a) 300 J; (b) 93,8 J; (c) 6,38 m **97.** 738 m **99.** (a) −0,80 J; (b) −0,80 J; (c) +1,1 J **101.** (a) $2,35 \times 10^3$ J; (b) 352 J **103.** (a) −3,8 kJ; (b) 31 kN **105.** (a) $2,1 \times 10^6$ kg; (b) $(100 + 1,5t)^{0,5}$ m/s; (c) $(1,5 \times 10^6)/(100 + 1,5t)^{0,5}$ N; (d) 6,7 km **107.** (a) 5,6 J; (b) 12 J; (c) 13 J **109.** (a) 4,9 m/s; (b) 4,5 N; (c) 71°; (d) permanece a mesma **111.** (a) 1,2 J; (b) 11 m/s; (c) não; (d) não **113.** 54% **115.** (a) $2,7 \times 10^9$ J; (b) $2,7 \times 10^9$ W; (c) $2,4 \times 10^8$ dólares **117.** (a) 5,00 J; (b) 9,00 J; (c) 11,0 J; (d) 3,00 J; (e) 12,0 J; (f) 2,00 J; (g) 13,0 J; (h) 1,00 J; (i) 13,0 J; (j) 1,00 J; (l) 11,0 J; (m) 10,8 m; (n) volta para $x = 0$ e pára. **119.** (a) 3,7 J; (b) 4,3 J; (c) 4,3 J **121.** (a) 4,8 N; (b) $+x$; (c) 1,5 m; (d) 13,5 m; (e) 3,5 m/s **123.** (a) 24 kJ; (b) $4,7 \times 10^2$ N **125.** (a) 3,0 mm; (b) 1,1 J; (d) sim; (e) ≈ 40 J; (f) não **127.** (a) 6,0 kJ; (b) $6,0 \times 10^2$ W; (c) $3,0 \times 10^2$ W; (d) $9,0 \times 10^2$ W **129.** $3,1 \times 10^{11}$ W **131.** 880 MW **133.** (a) $v_0 = (2gL)^{0,5}$; (b) $5\,mg$; (c) $-mgL$; (d) $-2\,mgL$ **135.** porque a força que você exerce sobre o repolho (para fazê-lo descer) realiza trabalho

Capítulo 9

T **1.** (a) na origem; (b) no quarto quadrante; (c) no eixo *y*, abaixo da origem; (d) na origem; (e) no terceiro quadrante; (f) na origem **2.** (a)–(c) no centro de massa, ainda na origem (as forças são internas ao sistema e não podem deslocar o centro de massa) **3.** (Considere as inclinações e a Eq. 9-23). (a) 1, 3 e depois 2 e 4 empatadas (força nula); (b) 3 **4.** (a) mantém inalterado; (b) mantém inalterado (veja a Eq. 9-32); (c) diminui (Eq. 9-35) **5.** (a) nula; (b) positiva (inicial para baixo, final para cima); (c) $+y$ **6.** (Não há força externa; $\vec{P}$ é conservado). (a) 0; (b) não; (c) $-x$ **7.** (a) 10 kg · m/s; (b) 14 kg · m/s; (c) 6 kg · m/s **8.** (a) 4 kg · m/s; (b) 8 kg · m/s; (c) 3 J **9.** (a) 2 kg · m/s (conservação da componente *x* do momento) (b) 3 kg · m/s (conservação da componente *y* do momento)
P **1.** (a) 2 N, para a direita; (b) 2 N, para a direita; (c) maior que 2 N, para a direita **3.** (a) *x* sim, *y* não; (b) *x* sim, *y* não; (c) *x* não, *y* sim **5.** b, c, a **7.** (a) um estava em repouso; (b) 2; (c) 5; (d) igual (como o choque de duas bolas de sinuca) **9.** (a) *C*; (b) *B*; (c) 3 **11.** (a) *c*, a energia cinética não pode ser negativa; *d*, a energia cinética total não pode aumentar; (b) *a*; (c) *b*
PR **1.** (a) −1,50 m; (b) −1,43 m **3.** (a) −0,45 cm; (b) −2,0 cm **5.** (a) 0; (b) $3,13 \times 10^{-11}$ m **7.** (a) −6,5 cm; (b) 8,3 cm; (c) 1,4 cm **9.** $(-4,0\ \text{m})\hat{i} + (4,0\ \text{m})\hat{j}$ **11.** (a) 28 cm; (b) 2,3 m/s **13.** (a) $(2,35\hat{i} - 1,57)\hat{j}$ m/s^2; (b) $(2,35\hat{i} - 1,57\hat{j})t$ m/s, com *t* em segundos; (d) retilínea, fazendo um ângulo de 34° para baixo **15.** 53 m **17.** 4,2 m **19.** (a) $7,5 \times 10^4$ J; (b) $3,8 \times 10^4$ kg · m/s; (c) 39° ao sul do leste **21.** (a) 5,0 kg · m/s; (b) 10 kg · m/s **23.** (a) 67 m/s; (b) $-x$; (c) 1,2 kN; (d) $-x$ **25.** $1,0 \times 10^3$ a $1,2 \times 10^3$ kg · m/s **27.** (a) 42 N · s; (b) 2,1 kN **29.** 5 N **31.** (a) 5,86 kg · m/s; (b) 59,8°; (c) 2,93 kN; (d) 59,8° **33.** (a) $2,39 \times 10^3$ N · s; (b) $4,78 \times 10^5$ N; (c) $1,76 \times 10^3$ N · s; (d) $3,52 \times 10^5$ N **35.** (a) 9,0 kg · m/s;

(b) 3,0 kN; (c) 4,5 kN; (d) 20 m/s **37.** $9{,}9 \times 10^2$ N **39.** 3,0 mm/s **41.** 55 cm **43.** (a) $-(0{,}15$ m/s$)\hat{i}$; (b) 0,18 m **45.** (a) 14 m/s; (b) $-45°$ **47.** (a) $(1{,}00\hat{i} - 0{,}167\hat{j})$ km/s; (b) 3,23 MJ **49.** $3{,}1 \times 10^2$ m/s **51.** (a) 33%; (b) 23%; (c) diminui **53.** (a) 721 m/s; (b) 937 m/s **55.** (a) 4,4 m/s; (b) 0,80 **57.** (a) +2,0 m/s; (b) $-1{,}3$ J; (c) +40 J; (d) o sistema recebeu energia de alguma fonte, como, por exemplo, uma pequena explosão **59.** 25 cm **61.** (a) 99 g; (b) 1,9 m/s; (c) 0,93 m/s **63.** (a) 1,2 kg; (b) 2,5 m/s **65.** -28 cm **67.** (a) 3,00 m/s; (b) 6,00 m/s **69.** (a) 0,21 kg; (b) 7,2 m **71.** (a) 433 m/s; (b) 250 m/s **73.** (a) $4{,}15 \times 10^5$ m/s; (b) $4{,}84 \times 10^5$ m/s **75.** 120° **77.** (a) $1{,}57 \times 10^6$ N; (b) $1{,}35 \times 10^5$ kg; (c) 2,08 km/s **79.** (a) 46 N; (b) nenhuma **81.** (a) 1,78 m/s; (b) menor; (c) menor; (d) maior **83.** (a) 1,92 m; (b) 0,640 m **85.** 28,8 N **87.** 1,10 m/s **89.** (a) 7290 m/s; (b) 8200 m/s; (c) $1{,}271 \times 10^{10}$ J; (d) $1{,}275 \times 10^{10}$ J **91.** (a) 1,0 kg·m/s; (b) $2{,}5 \times 10^2$ J; (c) 10 N; (d) 1,7 kN; (e) porque a resposta do item (c) inclui o tempo entre as colisões **93.** (a) $(7{,}4 \times 10^3$ N·s$)\hat{i} - (7{,}4 \times 10^3$ N·s$)\hat{j}$; (b) $(-7{,}4 \times 10^3$ N·s$)\hat{i}$; (c) $2{,}3 \times 10^3$ N; (d) $2{,}1 \times 10^4$ N; (e) $-45°$ **95.** (a) 3,7 m/s; (b) 1,3 N·s; (c) $1{,}8 \times 10^2$ N **97.** $1{,}18 \times 10^4$ kg **99.** +4,4 m/s **101.** (a) 1,9 m/s; (b) $-30°$; (c) elástica **103.** (a) 6,9 m/s; (b) 30°; (c) 6,9 m/s; (d) $-30°$; (e) 2,0 m/s; (f) $-180°$ **105.** (a) 25 mm; (b) 26 mm; (c) para baixo; (d) $1{,}6 \times 10^{-2}$ m/s^2 **107.** (a) 0,745 mm; (b) 153°; (c) 1,67 mJ **109.** (a) $(2{,}67$ m/s$)\hat{i} + (-3{,}00$ m/s$)\hat{j}$; (b) 4,01 m/s; (c) 48,4° **111.** 0,22% **113.** 190 m/s **115.** (a) $4{,}6 \times 10^3$ km; (b) 73% **117.** (a) 50 kg/s; (b) $1{,}6 \times 10^2$ kg/s **119.** (a) $-0{,}50$ m; (b) $-1{,}8$ cm; (c) 0,50 m **121.** (a) 0,800 kg·m/s; (b) 0,400 kg·m/s **123.** 29 J **125.** $5{,}0 \times 10^6$ N **127.** (a) 1; (b) $1{,}83 \times 10^3$; (c) $1{,}83 \times 10^3$; (d) continuam as mesmas **129.** 5,0 kg **131.** 2,2 kg **133.** (a) 11,4 m/s; (b) 95,1° **135.** (a) 0; (b) 0; (c) 0

Capítulo 10

T **1.** b e c **2.** (a) e (d) ($\alpha = d^2\theta/dt^2$ deve ser constante) **3.** (a) sim; (b) não; (c) sim; (d) sim **4.** são todos iguais **5.** 1, 2, 4, 3 (veja a Eq. 10-36) **6.** (veja a Eq. 10-40) 1 e 3, 4, 2 e 5 (zero) **7.** (a) para baixo na figura ($\tau_{res} = 0$); (b) menor (considere os braços de alavanca) **P** **1.** (a) *c*, *a*, *b* e *d* empatados; (b) *b*, *a* e *c*, *d* **3.** *c*, *a*, *b* **5.** aumentar **7.** (a) diminuir; (b) horário; (c) anti-horário **9.** todas iguais **PR** **1.** 14 rev **3.** 11 rad/s **5.** (a) 4,0 rad/s; (b) 11,9 rad/s **7.** (a) 4,0 m/s; (b) não **9.** (a) 30 s; (b) $1{,}8 \times 10^3$ rad **11.** (a) 3,00 s; (b) 18,9 rad **13.** 8,0 s **15.** (a) 44 rad; (b) 5,5 s; (c) 32 s; (d) $-2{,}1$ s; (e) 40 s **17.** (a) $3{,}4 \times 10^2$ s; (b) $-4{,}5 \times 10^{-3}$ rad/s^2; (c) 98 s **19.** $6{,}9 \times 10^{-13}$ rad/s **21.** (a) 20,9 rad/s; (b) 12,5 m/s; (c) 800 rev/min^2; (d) 600 rev **23.** (a) $2{,}50 \times 10^3$ rad/s; (b) 20,2 m/s^2; (c) 0 **25.** (a) 40 s; (b) 2,0 rad/s^2 **27.** (a) $3{,}8 \times 10^3$ rad/s; (b) $1{,}9 \times 10^2$ m/s **29.** (a) $7{,}3 \times 10^{-5}$ rad/s; (b) $3{,}5 \times 10^2$ m/s; (c) $7{,}3 \times 10^{-5}$ rad/s; (d) $4{,}6 \times 10^2$ m/s **31.** (a) 73 cm/s^2; (b) 0,075; (c) 0,11 **33.** 12,3 kg·m^2 **35.** 0,097 kg·m^2 **37.** (a) 1,1 kJ; (b) 9,7 kJ **39.** (a) 0,023 kg·m^2; (b) 11 mJ **41.** $4{,}7 \times 10^{-4}$ kg·m^2 **43.** (a) 49 MJ; (b) $1{,}0 \times 10^2$ min **45.** 4,6 N·m **47.** $-3{,}85$ N·m **49.** (a) 28,2 rad/s^2; (b) 338 N·m **51.** 0,140 N **53.** $2{,}51 \times 10^{-4}$ kg·m^2 **55.** (a) 6,00 cm/s^2; (b) 4,87 N; (c) 4,54 N; (d) 1,20 rad/s^2; (e) 0,0138 kg·m^2 **57.** (a) $4{,}2 \times 10^2$ rad/s^2; (b) $5{,}0 \times 10^2$ rad/s **59.** (a) 19,8 kJ; (b) 1,32 kW **61.** 396 N·m **63.** 5,42 m/s **65.** 9,82 rad/s **67.** (a) 5,32 m/s^2; (b) 8,43 m/s^2; (c) 41,8° **69.** (a) 314 rad/s^2; (b) 7,54 m/s^2; (c) 14,0 N; (d) 4,36 N **71.** $6{,}16 \times 10^{-5}$ kg·m^2 **73.** (a) 1,57 m/s^2; (b) 4,55 N; (c) 4,94 N **75.** (a) $4{,}81 \times 10^5$ N; (b) $1{,}12 \times 10^4$ N·m; (c) $1{,}25 \times 10^6$ J **77.** 30 rev **79.** 3,1 rad/s **81.** (a) 0,791 kg·m^2; (b) $1{,}79 \times 10^{-2}$ N·m **83.** (a) 2,3 rad/s^2; (b) 1,4 rad/s^2 **85.** $1{,}4 \times 10^2$ N·m **87.** 4,6 rad/s^2 **89.** (a) -67 rev/min^2; (b) 8,3 rev **93.** 0,054 kg·m^2 **95.** (a) $5{,}92 \times 10^4$ m/s^2; (b) $4{,}39 \times 10^4$ s^{-2} **97.** 2,6 J **99.** (a) 0,32 rad/s; (b) $1{,}0 \times 10^2$ km/h **101.** (a) 7,0 kg·m^2; (b) 7,2 m/s; (c) 71° **103.** (a) $1{,}4 \times 10^2$ rad; (b) 14 s **105.** (a) 221 kg·m^2; (b) $1{,}10 \times 10^4$ J **107.** 0,13 rad/s **109.** $6{,}75 \times 10^{12}$ rad/s **111.** (a) $1{,}5 \times 10^2$ cm/s; (b) 15 rad/s; (c) 15 rad/s; (d) 75 cm/s; (e) 3,0 rad/s **113.** 18 rad **115.** (a) 10 J; (b) 0,27 m

Capítulo 11

T **1.** (a) igual; (b) menor **2.** menor (considere a transferência de energia como de energia cinética de rotação para energia potencial gravitacional) **3.** (desenhe os vetores e use a regra da mão direita) (a) $\pm z$; (b) $\pm y$; (c) $-x$ **4.** (veja a Eq. 11-21) (a) 1 e 3; 2 e 4,5 (zero); (b) 2 e 3 **5.** (veja as Eqs. 11-23 e 11-16) (a) 3, 1; 2 e 4 (zero); (b) 3 **6.** (a) todos iguais (mesmo τ, mesmo t e, portanto, mesmo ΔL); (b) esfera, disco, anel (ordem inversa de I) **7.** (a) diminui; (b) permanece o mesmo ($\tau_{res} = 0$ e, portanto, L é conservado; (c) aumenta **P** **1.** (a) 1, 2, 3 (zero); (b) 1 e 2, 3; (c) 1 e 3, 2 **3.** (a) fica girando no mesmo lugar; (b) rola na sua direção; (c) rola para longe de você **5.** *a*, *b* e *c*, *e*, *d* (zero) **7.** *D*, *B* e depois *A* e *C* empatados **9.** (a) permanece o mesmo; (b) aumenta; (c) diminui; (d) permanece o mesmo, diminui, aumenta **PR** **1.** (a) 0; (b) $(22$ m/s$)\hat{i}$; (c) $(-22$ m/s$)\hat{i}$; (d) 0; (e) $1{,}5 \times 10^3$ m/s^2; (f) $1{,}5 \times 10^3$ m/s^2; (g) $(22$ m/s$)\hat{i}$; (h) $(44$ m/s$)\hat{i}$; (i) 0; (j) 0; (k) $1{,}5 \times 10^3$ m/s^2; (l) $1{,}5 \times 10^3$ m/s^2 **3.** 0,020 **5.** $-3{,}15$ J **7.** (a) $(-4{,}0$ N$)\hat{i}$; (b) 0,60 kg·m^2 **9.** (a) 63 rad/s; (b) 4,0 m **11.** 4,8 m **13.** (a) $-(0{,}11$ m$)\omega$; (b) $-2{,}1$ m/s^2; (c) -47 rad/s^2; (d) 1,2 s; (e) 8,6 m; (f) 6,1 m/s **15.** 0,50 **17.** (a) 13 cm/s^2; (b) 4,4 s; (c) 55 cm/s; (d) 18 mJ; (e) 1,4 J; (f) 27 rev/s **19.** (a) $(6{,}0$ N·m$)\hat{j} + (8{,}0$ N·m$)\hat{k}$; (b) $(-22$ N·m$)\hat{i}$ **21.** $(-2{,}0$ N·m$)\hat{i}$ **23.** (a) $(50$ N·m$)\hat{k}$; (b) 90° **25.** (a) $(-1{,}5$ N·m$)\hat{i} - (4{,}0$ N·m$)\hat{j} - (1{,}0$ N·m$)\hat{k}$; (b) $(-1{,}5$ N·m$)\hat{i} - (4{,}0$ N·m$)\hat{j} - (1{,}0$ N·m$)\hat{k}$ **27.** (a) 9,8 kg·m^2/s; (b) $+z$ **29.** (a) 0; (b) $(8{,}0$ N·m$)\hat{i} + (8{,}0$ N·m$)\hat{k}$ **31.** (a) 0; (b) $-22{,}6$ kg·m^2/s; (c) $-7{,}84$ N·m; (d) $-7{,}84$ N·m **33.** (a) $(-1{,}7 \times 10^2$ kg·m^2/s$)\hat{k}$; (b) $(+56$ N·m$)\hat{k}$; (c) $(+56$ kg·m^2/s$^2)\hat{k}$ **35.** (a) $48t\hat{k}$ N·m; (b) aumentando **37.** (a) 1,47 N·m; (b) 20,4 rad; (c) $-29{,}9$ J; (d) 19,9 W **39.** (a) $4{,}6 \times 10^3$ kg·m^2; (b) $1{,}1 \times 10^{-3}$ kg·m^2/s; (c) $3{,}9 \times 10^{-3}$ kg·m^2/s **41.** (a) 1,6 kg·m^2; (b) 4,0 kg·m^2/s **43.** (a) 3,6 rev/s; (b) 3,0; (c) a força que o homem exerce sobre os tijolos converte energia interna do homem em energia cinética **45.** (a) 267 rev/min; (b) 0,667 **47.** (a) 750 rev/min; (b) 450 rev/min; (c) horário **49.** 0,17 rad/s **51.** (a) 1,5 m; (b) 0,93 rad/s; (c) 98 J; (d) 8,4 rad/s; (e) $8{,}8 \times 10^2$ J; (f) da energia interna das patinadoras **53.** 3,4 rad/s **55.** $1{,}3 \times 10^3$ m/s **57.** 11,0 m/s **59.** (a) 18 rad/s; (b) 0,92 **61.** 1,5 rad/s **63.** (a) 0,180 m; (b) horário **65.** 0,070 rad/s **67.** (a) 0,148 rad/s; (b) 0,0123; (c) 181° **69.** 0,041 rad/s **71.** 39,1 J **73.** (a) $6{,}65 \times 10^{-5}$ kg·m^2/s; (b) não; (c) 0; (d) sim **75.** (a) 0,333; (b) 0,111 **77.** (a) 58,8 J; (b) 39,2 J **79.** (a) 0,81 mJ; (b) 0,29; (c) $1{,}3 \times 10^2$ N **81.** (a) $mR^2/2$; (b) um cilindro circular maciço **83.** a velocidade de rotação ficaria menor; o dia ficaria cerca de 0,8 s mais longo **85.** (a) 149 kg·m^2; (b) 158 kg·m^2/s; (c) 0,744 rad/s **87.** (a) 0; (b) 0; (c) $-30t^3\hat{k}$ kg·m^2/s; (d) $-90t^2\hat{k}$ N·m; (e) $30t^3\hat{k}$ kg·m^2/s; (f) $90t^2\hat{k}$ N·m **89.** (a) 61,7 J; (b) 3,43 m; (c) não **91.** (a) 12,7 rad/s; (b) horário **93.** (a) $mvR/(I + MR^2)$; (b) $mvR^2/(I + MR^2)$ **95.** (a) 1,6 m/s^2; (b) 16 rad/s^2; (c) $(4{,}0$ N$)\hat{i}$ **97.** 0,47 kg·m^2/s

Índice

As figuras estão identificadas pelos números das páginas em itálico; as tabelas estão indicadas por um t após o número da página

Serviços de impressão e acabamento
executados, a partir de arquivos digitais fornecidos,
nas oficinas gráficas da EDITORA SANTUÁRIO
Fone: (0XX12) 3104-2000 - Fax (0XX12) 3104-2016
http://www.editorasantuario.com.br - Aparecida-SP

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Algumas Propriedades Físicas

Ar (seco, a 20°C e 1 atm)	
Massa específica	1,21 kg/m^3
Calor específico a pressão constante	1010 J/kg · K
Razão entre os calores específicos	1,40
Velocidade do som	343 m/s
Rigidez dielétrica	3×10^6 V/m
Massa molar efetiva	0,0289 kg/mol
Água	
Massa específica	1000 kg/m^3
Velocidade do som	1460 m/s
Calor específico a pressão constante	4190 J/kg · K
Calor de fusão (0°C)	333 kJ/kg
Calor de vaporização (100°C)	2260 kJ/kg
Índice de refração (λ = 589 nm)	1,33
Massa molar	0,0180 kg/mol
Terra	
Massa	$5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Raio médio	$6{,}37 \times 10^6$ m
Aceleração de queda livre na superfície da Terra	9,8 m/s^2
Atmosfera-padrão	$1{,}01 \times 10^5$ Pa
Período de um satélite a uma altitude de 100 km	86,3 min
Raio da órbita geossíncrona	42 200 km
Velocidade de escape	11,2 km/s
Momento dipolar magnético	$8{,}0 \times 10^{22}$ A · m^2
Campo elétrico médio na superfície	150 V/m, para baixo
Distância até	
A Lua	$3{,}82 \times 10^8$ m
O Sol	$1{,}50 \times 10^{11}$ m
A estrela mais próxima	$4{,}04 \times 10^{16}$ m
O centro da nossa galáxia	$2{,}2 \times 10^{20}$ m
A galáxia de Andrômeda	$2{,}1 \times 10^{22}$ m
O limite do universo observável	$\sim 10^{26}$ m

Alfabeto Grego

Alfa	A	α	Iota	I	ι	Rô	P	ρ
Beta	B	β	Capa	K	κ	Sigma	Σ	σ
Gama	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	Mi	M	μ	Ípsilon	Y	υ
Epsílon	E	ϵ	Ni	N	ν	Fi	Φ	ϕ, φ
Zeta	Z	ζ	Csi	Ξ	ξ	Qui	X	χ
Eta	H	η	Ômicron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Teta	Θ	θ	Pi	Π	π	Ômega	Ω	ω

Algumas Constantes Físicas*

Velocidade da luz	c	$2,998 \times 10^8$ m/s
Constante gravitacional	G	$6,673 \times 10^{-11}$ N · m²/kg²
Constante de Avogadro	N_A	$6,022 \times 10^{23}$ mol^{-1}
Constante universal dos gases	R	8,314 J/mol · K
Relação entre massa e energia	c^2	$8,988 \times 10^{16}$ J/kg
		931,49 MeV/u
Permissividade elétrica do vácuo	ε_0	$8,854 \times 10^{-12}$ F/m
Permeabilidade magnética do vácuo	μ_0	$1,257 \times 10^{-6}$ H/m
Constante de Planck	h	$6,626 \times 10^{-34}$ J · s
		$4,136 \times 10^{-15}$ eV · s
Constante de Boltzmann	k	$1,381 \times 10^{-23}$ J/K
		$8,617 \times 10^{-5}$ eVK
Carga elementar	e	$1,602 \times 10^{-19}$ C
Massa do elétron	m_e	$9,109 \times 10^{-31}$ kg
Massa do próton	m_p	$1,673 \times 10^{-27}$ kg
Massa do nêutron	m_n	$1,675 \times 10^{-27}$ kg
Massa do dêuteron	m_d	$3,344 \times 10^{-27}$ kg
Raio de Bohr	a	$5,292 \times 10^{-11}$ m
Magnéton de Bohr	μ_B	$9,274 \times 10^{-24}$ J/T
		$5,788 \times 10^{-5}$ eV/T
Constante de Rydberg	R	$1,097\,373 \times 10^7$ m^{-1}

*Uma lista mais completa, que mostra também os melhores valores experimentais, está no Apêndice B.

Alguns Fatores de Conversão*

Massa e Massa Específica
1 kg = 1000 g = $6,02 \times 10^{26}$ u
1 slug = 14,59 kg
1 u = $1,661 \times 10^{-27}$ kg
1 kg/m³ = 10^{-3} g/cm³

Comprimento e Volume
1 m = 100 cm = 39,4 in = 3,28 ft
1 mi = 1,61 km = 5280 ft
1 in = 2,54 cm
1 nm = 10^{-9} m = 10 Å
1 pm = 10^{-12} m = 1000 fm
1 ano-luz = $9,461 \times 10^{15}$ m
1 m³ = 1000 L = 35,3 ft³ = 264 gal

Tempo
1 d = 86 400 s
1 ano = 365 d 6 h = $3,16 \times 10^7$ s

Ângulos
1 rad = 57,0° = 0,159 rev
π rad = 180° = $\frac{1}{2}$ rev

Velocidade
1 m/s = 3,28 ft/s = 2,24 mi/h
1 km/h = 0,621 mi/h = 0,278 m/s

Força e Pressão
1 N = 10^5 dina = 0,225 lb
1 lb = 4,45 N
1 t = 2000 lb
1 Pa = 1 N/m² = 10 dina/cm²
= $1,45 \times 10^{-4}$ lb/in²
1 atm = $1,01 \times 10^5$ Pa = 14,7 lb/in²
= 76,0 cm Hg

Energia e Potência
1 J = 10^7 erg = 0,2389 cal = 0,738 ft · lb
1 kW · h = $3,6 \times 10^6$ J
1 cal = 4,1868 J
1 eV = $1,602 \times 10^{-19}$ J
1 hp** = 746 W = 550 ft·lb/s

Magnetismo
1 T = 1 Wb/m² = 10^4 gauss

*Uma lista mais completa está no Apêndice D.
**A unidade de potência hp é uma abreviatura do inglês *horsepower*, que não corresponde exatamente ao cavalo-vapor (cv), que é igual a 735,5 W (N.T.)

Sobre a capa

A capa é uma imagem de Eric J. Heller que mostra as trajetórias de elétrons em uma superfície com irregularidades microscópicas. Os 100.000 elétrons partem do canto superior direito e se espalham para formar um desenho complexo ao se dirigirem para o canto inferior esquerdo.

O movimento dos elétrons é tratado em vários capítulos deste livro, e é especialmente importante na discussão sobre centelhas elétricas. Algumas centelhas são inofensivas, como os clarões azuis produzidos quando alguém mastiga uma pastilha de gaultéria em um quarto escuro (Capítulo 21). Outras centelhas podem ser muito perigosas, como as descargas eletrostáticas que podem causar a explosão de um pó industrial (Capítulo 25).

Ocupe Seu Lugar — O Espetáculo Vai Começar!

Esta 8ª edição de **Fundamentos de Física** contém centenas de exemplos interessantes extraídos da vida real, no espírito do livro de Jearl Walker **O Circo Voador da Física**. A primeira edição de **O Circo Voador da Física**, no mercado há mais de 30 anos em 10 idiomas, tornou-se um clássico para estudantes de física, professores de física e o público em geral. A segunda edição, lançada nos Estados Unidos em 2007, foi publicada recentemente em português pela LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional.



LTC
www.ltceditora.com.br

ISBN 978-85-216-1605-4

